Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
28 Gennaio 2010

Dipartimento di Matematica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

<u>Istruzioni</u>

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

<u>Esercizio 1.1</u> (15 punti)

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile (Peano-Jordan misurabile se si conosce solo l'integrale di Riemann) di misura finita, e $u\colon E \to \mathbb{R}$ sia una funzione misurabile (o Riemann integrabile se si conosce solo l'integrale di Riemann). Si supponga che

$$\int_E |u| \mathrm{d}x < +\infty \quad \text{e} \quad \int_E |u|^2 \mathrm{d}x < +\infty.$$

Per $t \in \mathbb{R}$ si definisca:

$$F(t) = \int_E |u(x) - t|^2 \mathrm{d}x.$$

Dimostrare che

(i) $F \in C^1(\mathbb{R})$.

(ii) F ha un unico minimo in $\mathbb{R}$.

<u>Esercizio 1.2</u> (15 punti)

(i) Stabilire per quali valori del parametro reale x la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x-12|^{n+2}}{n^3 e^{2n}}$$

converge.

(ii) Stessa domanda per la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-x^2}}.$$

<u>Esercizio 1.3</u> (15 punti)

Calcolare i due limiti seguenti.

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{-1}^{4} \frac{t^2 x \sqrt{|x|}}{1 + t^2 x^2} \mathrm{d}x.$$

$$\lim_{y \to +\infty} \int_{0}^{1} \frac{y(x)^{\frac{1}{3}}}{xy + \sin^2(x)} \mathrm{d}x.$$

ESERCIZIO 1.4 (15 punti)
Si consideri il sistema meccanico conservativo bidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \lambda^2 W(y)\right),$$

con $W \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tale che $W(0) = 0$ e $yW'(y) > 0$ per $y \neq 0$ [$W' = \mathrm{d}W/\mathrm{d}y$.] Si indichi con $\varphi_{\lambda,E}(t)$ la soluzione, in funzione del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ e dell'energia totale E.
(i) Si dimostri che esiste $\lim_{\lambda\to\infty} \varphi_{\lambda,E}(t)$ e lo si calcoli esplicitamente.
(ii) Indebolire le ipotesi su W in modo che il risultato valga ancora.

ESERCIZIO 1.5 (25 punti)
Si calcoli

$$\int\int_T x^2(y - x^3)e^{y+x^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

dove

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x^3 < y < 3, \quad x \geq 1\}.$$

Potrebbe essere utile il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} u = y - x^3 \\ v = y + x^3. \end{cases}$$

ESERCIZIO 1.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Si enunci il teorema di cambiamento di variabili negli integrali multipli; se ne dia un'applicazione a scelta tra:
(i) area sotto la Gaussiana o
(ii) volume della sfera n-dimensionale.

GRUPPO 2 (Geometria)

<u>ESERCIZIO 2.1</u> (15 punti)
Si consideri l'applicazione di gruppi additivi

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \,, \quad x \to ([x]_3, [x]_4)$$

(dove $[x]_n$ è la classe resto di x modulo n).
(i) Mostrare che φ è un omomorfismo di gruppi suriettivo.
(ii) Determinare la controimmagine tramite φ di $([1]_3, [2]_4)$.
(iii) Determinare $\mathrm{Ker}(\varphi)$ ed applicare il Primo Teorema di Omomorfismo.

<u>ESERCIZIO 2.2</u> (15 punti)
Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_3[X]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3 si consideri il sottoinsieme

$$P = \{p(X) \in \mathbb{R}_3[X] | p(1) = p(-1) = 0\}.$$

(i) Dimostrare che P è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[X]$.
(ii) Determinare una base di P.
(iii) Determinare un sottospazio Q di $\mathbb{R}_3[X]$ tale che $\mathbb{R}_3[X] = P \oplus Q$.
(iv) Scrivere il vettore $X \in \mathbb{R}_3[X]$ come $X = p + q$ con $p \in P$, $q \in Q$.

<u>ESERCIZIO 2.3</u> (25 punti)
Sia A una matrice quadrata qualsiasi.
(i) Dimostrare che gli autovalori di A sono gli stessi autovalori della matrice trasposta A^t.
(ii) Se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

determinare gli autospazi di A e di A^t.
(iii) Determinare se gli autospazi di A e di A^t relativi agli stessi autovalori coincidono o se sono piuttosto differenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$.

ESERCIZIO 2.4 (15 punti)
Sia $A \in O_2(\mathbb{R})$ una matrice 2×2 ortogonale a coefficienti reali. Dimostrare che $\det A \in \{1, -1\}$ e che se $\det A = 1$ esiste $\theta \in \mathbb{R}$ tale che

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 2.5 (15 punti)
Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$Y^2 - XY + 1 = 0.$$

ESERCIZIO 2.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Si enunci il Teorema di Rouché-Capelli e lo si utilizzi per esibire, per ciascuna delle seguenti condizioni, un sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite il cui insieme delle soluzioni S soddisfi le condizioni indicate:

- $S = \emptyset$.
- S è uno spazio vettoriale di dimensione 2.
- S ha ∞^2 soluzioni ma non è uno spazio vettoriale.
