Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
28 Settembre 2011

Dipartimento di Matematica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

<u>Esercizio 1.1</u> (15 punti)
Sia $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{N}$ una funzione Riemann-integrabile. Si denoti con $|A|$ la misura di Peano-Jordan dell'insieme $A \subset [0,1]$.
(i) Dimostrare che

$$\int_0^1 \alpha(x)\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0} n\,|\{x \in [0,1] \ : \alpha(x) = n\}|.$$

(ii) Usando il punto (i), dimostrare che

$$\int_0^1 \alpha(x)\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0} |\{x \in [0,1] : \alpha(x) > n\}|.$$

<u>Esercizio 1.2</u> (15 punti)
Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{2\mathrm{e}^x - \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}{2(\mathrm{e}^x - 1)} - \frac{1}{x^\alpha}$$

è integrabile, in senso improprio, su $(0,1)$.

<u>Esercizio 1.3</u> (15 punti)
Si determini se la funzione

$$g(t) = \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}} - 1}{t + \sin t}$$

è integrabile, in senso improprio, su $(0,+\infty)$.

ESERCIZIO 1.4 (15 punti)
Sia $a \in \mathbb{R}^n$ il vettore con componenti, nella base canonica, $a_k = \delta_{k,n}$ per $k = 1, \ldots, n$ e sia A la matrice $n \times n$ le cui righe sono tutte uguali ad a. Si consideri in $\mathbb{R}^n$ il sistema di equazioni differenziali lineari $\dot{x} = Ax$.
(i) (5 punti) Si determini la soluzione con dato iniziale $\bar{x}_k = 1 - \delta_{n,k}$.
(ii) (5 punti) Si determini la soluzione con dato iniziale arbitrario $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$.
(iii) (5 punti) Sia E la matrice identità $n \times n$: si determini la soluzione del sistema $\dot{x} = Ax + Ex$, con dato iniziale arbitrario $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$.

ESERCIZIO 1.5 (25 punti)
Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\int_0^1 f(u(x))\mathrm{d}x = 0$$

per ogni funzione $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann integrabile tale che

$$\int_0^1 u(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Dimostrare che f è lineare.

ESERCIZIO 1.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
(i) (10 punti) Si enuncino le formule di riduzione nell'integrale di Riemann.
(ii) (15 punti) Si indichi con $|A|_n$ la misura di Peano-Jordan di un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$. Sia $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un insieme Peano-Jordan misurabile. Si consideri la piramide n-dimensionale di base B:

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \quad : \quad (x,y) = \lambda(\xi, 0) + (1-\lambda)(0,1), \quad \lambda \in [0,1], \quad \xi \in B\}.$$

Usando il teorema del punto precedente, e affettando la piramide opportunamente, dimostrare che

$$|E|_n = \frac{1}{n}|B|_{n-1}.$$

GRUPPO 2 (Geometria)

<u>Esercizio 2.1</u> (15 punti)

Per $n \geq 1$, indichiamo con U_n il gruppo delle radici complesse n-sime dell'unità e, se p è un numero primo, poniamo

$$U_{p^\infty} := \bigcup_{k \geq 0} U_{p^k}.$$

(i) Verificare che U_{p^∞} è un sottogruppo moltiplicativo di $\mathbb{C}$.

(ii) Mostrare che tutti e soli i sottogruppi propri di U_{p^∞} sono i sottogruppi U_{p^k}, per $k \geq 1$.

<u>Esercizio 2.2</u> (15 punti)

Siano A e B due matrici 3×3. Si dimostri che $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

<u>Esercizio 2.3</u> (15 punti)

Sia V lo spazio delle funzioni continue su $[0, 1]$ a valori reali. Si dimostri che l'applicazione

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

definisce su V un prodotto scalare. Sia W il sottospazio definito dalle funzioni $f(t) = t$ e $g(t) = t^2$; si trovi una base ortonormale per W.

<u>Esercizio 2.4</u> (15 punti)

Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$3X^2 - 2XY + 3Y^2 + 2X + 2Y = 0.$$

<u>ESERCIZIO 2.5</u> (25 punti)

Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che, rispetto alla base canonica, è associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}$$

con $h \in \mathbb{R}$. Trovato il valore di h per cui f non è suriettiva, avendo fissato tale valore:

(i) determinare l'immagine $\operatorname{Im} f$ di f,

(ii) determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, k^2 - k, k) \in \operatorname{Im} f$,

(iii) determinare il nucleo $\operatorname{Ker} f$ di f,

(iv) verificare che $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$,

(v) esistono dei vettori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(\mathbf{v}) = (3, 2, -2)$?

<u>ESERCIZIO 2.6</u> (25 punti)

Dissertazione teorica.

La risoluzione dei sistemi lineari: si enunci il Teorema di Rouché-Capelli, si descrivano il metodo di Gauss e il metodo di Cramer e si applichi la teoria per classificare le possibili intersezioni tra due piani nello spazio affine tridimensionale.
