Esercizi di preparazione alla PFB

A.A. 2012/2013 — A cura di Sara Lamboglia, Gianluca Lauteri, Maria Chiara Timpone.

Esercizi di Analisi Matematica, Algebra e Geometria.

Parte 1: Analisi Matematica.

Esercizio 1.1. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n\geq 1} n^{\alpha} x^{n^{\beta}},$$

al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

Esercizio 1.2. Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri, al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ quando compaiono:

(1.2.1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{\sin\sqrt{x} + x^3}\,\mathrm{d}x,$

(1.2.2) $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\ (a < b),$

(1.2.3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^a\,(1+x^3)}\mathrm{d}x,$

(1.2.4) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(\log(1+x) - \log(x))^a}{x^b}\mathrm{d}x.$

Esercizio 1.3. Sia

$$V := \left\{ f \in \mathscr{C}\left((0,\infty), \mathbb{R}\right) \middle| \int_0^\infty f(x)^2 \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

(1.3.1) Provare che $\langle f, g\rangle := \displaystyle\int_0^\infty f(x)g(x)\mathrm{d}x$ è un prodotto scalare su V.

(1.3.2) Stabilire per quali $\alpha > 0$ le seguenti funzioni sono integrabili in senso generalizzato in $[0,\infty)$ (i.e., sono elementi di $\mathscr{R}(0,\infty)$) e/o sono elementi di V:

(a) $f_\alpha(x) := \dfrac{\sin(x)}{x^\alpha}$, (b) $g_\alpha(x) := \dfrac{\arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{t^\alpha}$, (c) $h_\alpha(x) := \sin\left(e^{\alpha x}\right)$.

Esercizio 1.4.

(1.4.1) Si enuncino le formule di riduzione nell'integrale di Riemann.

(1.4.2) Si indichi con $|A|_n$ la misura di Peano-Jordan di un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$. Sia $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un insieme Peano-Jordan misurabile. Si consideri la piramide n-dimensionale di base B

$$E := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \middle| \mathbf{x} = \lambda\left(\boldsymbol{\xi}, 0\right) + (1-\lambda)\left(\mathbf{0}, 1\right),\ \lambda \in [0,1],\ \boldsymbol{\xi} \in B \right\}.$$

Utilizzando il Teorema del punto (i), e affettando la piramide opportunamente, dimostrare che

$$|E|_n = \frac{1}{n}\,|B|_{n-1}.$$

Esercizio 1.5.

(1.5.1) Calcolare l'integrale di Gauß

$$:= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

Dedurre quindi il valore di

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||\mathbf{x}||^2} \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

(1.5.2) Si consideri la funzione Γ di Eulero, che ricordiamo essere definita come

$$\Gamma : x \in (0, \infty) \longmapsto \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t \in (0, \infty).$$

Dimostrare che

(1.5.2.1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$,

(1.5.2.2) $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$,

(1.5.2.3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

(1.5.2.4) $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}\ \forall n \in \mathbb{N}$,

dove $n!!$ è il *semifattoriale* di n, definito da $(-1)!! := 1 =: 0!!$, $n!! := n(n-2)!!$, per $n \geq 1$.

(1.5.3) Calcolare l'area della sfera unità di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

(1.5.4) Calcolare il volume della palla unità di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

Esercizio 1.6. Data la serie

$$\sum_{n \geq 0} t^2 e^{-nt},$$

(1.6.1) Dimostrare che converge uniformemente in $[0, +\infty)$, con somma $\frac{t^2}{1 - e^{-t}}$ (se $t > 0$).

(1.6.2) Utilizzando il punto precedente, dimostrare che

$$\int_0^{\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} \mathrm{d}t = 2 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^3}.$$

Esercizio 1.7. Si consideri la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) := \frac{1}{1 + (x-n)^2}.$$

Dimostrare che la funzione

$$u(x) := \sum_{n \geq 1} f_n(x)$$

è integrabile in $(0, 1)$, e calcolarne l'integrale.

Esercizio 1.8. Studiare le traiettorie del sistema planare associato a

$$\ddot{x} + x^n = 0, \qquad 2 \nmid n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare poi che l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema planare associato a

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + x^n = 0, \qquad 2 \nmid n \in \mathbb{N},\ \alpha > 0.$$

Suggerimento: utilizzare il Teorema di Barbašin-Krasovskij...

Esercizio 1.9. Si consideri il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - y, \\ \dot{y} = xy. \end{cases}$$

(1.9.1) Dimostrare che

$$H : (x, y) \in \mathbb{R} \times \{y > 0\} \longmapsto \frac{x^2}{2} + y - \log(y) \in \mathbb{R}$$

è una costante del moto per il sistema.

(1.9.2) Dimostrare che $D := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y \geq 0 \right\}$ è invariante per il sistema.

(1.9.3) Si determinino i punti di equilibrio in D e se ne studi la stabilità.

(1.9.4) Si studi qualitativamente il moto in D.

Esercizio 1.10. Siano $a < 0 < b$, $I := [a, b]$ e si consideri lo spazio $X := \mathscr{C}(I)$, equipaggiato con la norma dell'estremo superiore $||\cdot|| := ||\cdot||_\infty$, cioè $||f|| = \sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t)|$. Si consideri quindi l'operatore $T : X \to X$ che manda f nell'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + |f(t)| + 1, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Provare che esistono a e b tali che T sia una contrazione su X. Quindi, per tali a, b, determinare il punto fisso di T.
Suggerimento. $(Tf)(t) = \int_0^t ((Tf)(\tau) + |f(\tau)| + 1)\, \mathrm{d}\tau \ldots$

Esercizio 1.11. Si enunci il Teorema della Funzione Implicita per funzioni di più variabili, con particolare attenzione alla formula che dà la derivata della funzione implicita.
Si dimostri che esistono due mappe $T_i : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (u_i(x, y), v_i(x, y)) \in \mathbb{R}^2$, $i \in \{1, 2\}$, che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} xyu - 4yu + 9v = 0, \\ 2xy - 3y^2 + v^2 = 0, \end{cases}$$

in un intorno di $x_0 := (1, 1)$. Si scelga una di queste mappe e se ne calcoli la derivata in x_0.

Esercizio 1.12. Enunciare un teorema di passaggio al limite sotto segno d'integrale nella teoria di Riemann.
Ricordando che, per $|x| < 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(2n - 1)!!}{(2n)!!} x^{2n},$$

dimostrare che

$$\arcsin(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(2n - 1)!!}{(2n)!!(2n + 1)} x^{2n+1}.$$

Esercizio 1.13. Si consideri l'insieme $A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^4 + y^4 + x^2 - y^2 = 0 \right\}$.

(1.13.1) Dimostrare che A contiene i punti $(0, 1), (0, -1)$ e $(0, 0)$.

(1.13.2) Enunciare il teorema della funzione implicita per funzioni di due variabili.

(1.13.3) Dimostrare che, in un intorno del punto $(0, 1)$, A è il grafico di una funzione $y(x)$ di classe $\mathscr{C}^1$; calcolare $y'(0)$. Stessa domanda per un intorno del punto $(0, -1)$.

(1.13.4) Determinare se valgono le ipotesi del teorema della funzione implicita nel punto $(0, 0)$.

(1.13.5) Enunciare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange per funzioni di due variabili.

(1.13.6) Usando i moltiplicatori di Lagrange, si trovino il massimo e il minimo della funzione $f(x, y) := y$ su A.

Esercizio 1.14.

(1.14.1) Sia $\mathfrak{A}$ l'insieme dei numeri naturali che non contengono la cifra 5 nella loro espansione decimale, i.e.

$$\mathfrak{A} := \left\{ \sum_{i=0}^{N} a_i 10^i \middle| N \in \mathbb{N},\ a_i \in ([0,9] \cap \mathbb{N}) \setminus \{5\} \right\} \setminus \{0\}.$$

Dimostrare che $\displaystyle\sum_{a \in \mathfrak{A}} \frac{1}{a} < \infty$, cioè che $\mathfrak{A}$ definisce una sottoserie convergente della serie armonica.

(1.14.2) Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,+\infty)$ tale che $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n = +\infty$. Provare che

(1.14.2.1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+a_n} = +\infty$,

(1.14.2.2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+n^2 a_n} < +\infty$,

(1.14.2.3) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+n a_n}$ può sia convergere che divergere,

(1.14.2.4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+a_n^2}$ può sia convergere che divergere.

Suggerimento: per (1.14.2.3) e (1.14.2.4), potrebbe essere utile il punto (1.14.1)...

Esercizio 1.15. Sia (X,d) uno spazio metrico, e sia $f : X \to \mathbb{R}$ un'applicazione tale che

$$G := \mathrm{Graph}(f) := \left\{ (x, f(x)) \middle| x \in X \right\} \subset X \times \mathbb{R}$$

è compatto. Provare che allora f è continua su X, i.e. che $\forall x \in X, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall y\ :\ d(x,y) < \delta$.
Suggerimento: argomentare per assurdo...

Esercizio 1.16. Calcolare (se esiste) il limite delle seguenti successioni:

(1.16.1) $\displaystyle a_n := \prod_{j=1}^{n} \sin(j\pi\theta),\ \theta \in \mathbb{R}$,

(1.16.2) $b_n := \sin(2\pi n! e)$.

Suggerimenti: per il punto (1.16.1), potrebbe essere utile ricordare che se θ è irrazionale, allora esiste una successione $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che $\{n_k\theta\} \to 0$ per $k \to \infty$, dove $\{x\} := x - [x]$ è la *parte frazionaria* di $x \in \mathbb{R}$ (cfr. *Esercizi e complementi di analisi matematica* di E. Giusti, pagina 70)...
Per il punto (1.16.2), ricordare che $\displaystyle e = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}$. Spezzare quindi la serie in modo opportuno ed utilizzare la formula di addizione per il seno...

Esercizio 1.17. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad f(x) \equiv 0 \text{ su } \complement B_1(0),$$

dove $B_1(0) := (-1,1)$ (e $\complement A$ è il complementare dell'insieme A).
Suggerimento: argomentare per assurdo...

Esercizio 1.18. Si consideri lo spazio $\mathcal{C} := (\mathscr{C}([0,1]), ||\cdot||)$, dove $||\cdot|| := ||\cdot||_\infty$ e $||\cdot||_\infty$ è l'usuale norma dell'estremo superiore ($||f||_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$). Si definisca il funzionale

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\mathrm{d}x, \end{array}$$

e si ponga

$$M := \left\{ f \in \mathcal{C} \middle| Tf = 1 \right\}.$$

(1.18.1) Fornire la (o meglio una) definizione di insieme chiuso in $\mathcal{C}$.

(1.18.2) Fornire la definizione di insieme convesso in $\mathcal{C}$.

(1.18.3) Provare che M è chiuso e convesso in $\mathcal{C}$.

(1.18.4) Dimostrare che $||f||_\infty > 1 \quad \forall f \in M$.

(1.18.5) Dimostrare che $\forall \varepsilon \in (0,1)\ \exists f \in M\ :\ ||f||_\infty \leq 1+\varepsilon$.

(1.18.6) Dedurre che non esistono elementi in M di norma minima.

Esercizio 1.19. Sia $\alpha : [0,1] \to \mathbb{N}$ una funzione Riemann-integrabile. Sia $\operatorname{meas}(A)$ la misura di Peano-Jordan dell'insieme $A \subset [0,1]$. Dimostrare che

(1.19.1)
$$\int_0^1 \alpha(x)\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0} n \operatorname{meas}\left(\left\{x \in [0,1] \middle| \alpha(x) = n\right\}\right),$$

(1.19.2)
$$\int_0^1 \alpha(x)\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0} \operatorname{meas}\left(\left\{x \in [0,1] \middle| \alpha(x) > n\right\}\right).$$

Esercizio 1.20. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$\int_0^1 f(u(x))\mathrm{d}x = 0 \quad \forall u \in \mathcal{U} := \left\{u : [0,1] \to \mathbb{R} \middle| u \text{ Riemann-integrabile, } \int_0^1 u(x)\mathrm{d}x = 0\right\}.$$

Dimostrare che f è lineare.
Suggerimento. Sfruttando delle opportune funzioni $u \in \mathcal{U}$, dimostrare che (i) $f(-x) = -f(x)$; (ii) $f(x+y) = f(x)+f(y)$; (iii) $f(\alpha x) = \alpha f(x),\ \ \forall \alpha, x \in \mathbb{R}$ (notando che è sufficiente, in virtù del punto (ii), provare ciò solo per $\alpha \in (0,1)\ldots$). Ad esempio, per provare (i), potrebbero essere utili le funzioni

$$u_{x_0}(x) := \begin{cases} x_0 & \text{se } x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right), \\ -x_0 & \text{se } x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Procedere poi sulla stessa falsariga per i punti (ii) e (iii)...

Esercizio 1.21. Sia X lo spazio delle funzioni polinomiali su $\mathbb{R}$, cioè

$$X := \left\{\left(t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{i=0}^N a_i t^i \in \mathbb{R}\right) \middle| N \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R}\right\}.$$

Si definisca la mappa $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}^+$ come

$$||p|| := \sup_{t\in[0,1]} |p(t)|.$$

Si dimostri che $||\cdot||$ definisce una norma su X. Quindi, si equipaggi X con la topologia indotta da $||\cdot||$, e si verifichi che il funzionale

$$\varphi : p \in X \longmapsto p(2) \in \mathbb{R}$$

non è continuo.

Esercizio 1.22. Sia

$$I_n := \int_{[0,1]^n} \max\{x_1, \cdots, x_n\}\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} I_n.$$

Suggerimento. Evitare di calcolare direttamente l'integrale...

Esercizio 1.23. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definita come

$$\begin{cases} f_1(x) := x, \\ f_{n+1}(x) := x^{f_n(x)}. \end{cases}$$

Si dimostri che

$$\lim_{x\to 0+} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ 1 & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

Suggerimento. Provare per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che $\dfrac{f_{2n+1}(x)}{x} \xrightarrow{x\downarrow 0} 1\ldots$

Esercizio 1.24. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione monotona crescente di numeri positivi. Dimostrare che la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\prod_{j=1}^{n}(1+a_j)}$$

è convergente.

Esercizio 1.25. Si consideri la serie

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^{\frac{1}{n}}, \qquad a_n,\ x > 0.$$

Provare che se tale serie converge per un qualche $x_0 > 0$, allora converge per ogni $x \in (0, \infty)$.

Parte 2: Algebra e Geometria.

Esercizio 2.1. Considerare lo spazio generato da $\{\cos t, \sin t\}$ nello spazio $\mathscr{C}([-\pi,\pi])$:

(2.1.1) Dimostrare che $U = \langle \cos t, \sin t\rangle$ ha dimensione 2;

(2.1.2) Data $b(f,g) := \int_{-\pi}^{\pi} fg$ dimostrare che è una forma bilineare simmetrica su U;

(2.1.3) Rappresentare la matrice associata a b rispetto alla base di U.

Esercizio 2.2. Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 a coefficienti in $\mathbb{R}$, dotato del prodotto scalare standard:

$$\left\langle a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3\right\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

(2.2.1) Dopo aver verificato che i seguenti polinomi costituiscono una base di V, applicare ad essi il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt:

$$t+1,\ t+t^2,\ 2-t-t^3,\ t^3$$

(2.2.2) Dato il sottospazio $U = \left\langle t^3-1, t+2\right\rangle$ di V calcolare le equazioni cartesiane e parametriche di $U^\perp$. Scrivere poi una base ortonormale di U e di $U^\perp$.

Esercizio 2.3. In $\mathbb{R}^3$ considerare i vettori

$$v_1 = (1,0,1) \quad v_2 = (1,2,0) \quad v_3 = (0,1,1).$$

Determinare la proiezione ortogonale di v_3 sul piano generato da v_1 e v_2.

Esercizio 2.4. Sia A la matrice a coefficienti reali

$$\begin{pmatrix} 3-k & -1 & 0 \\ k & 2 & k \\ 0 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

(2.4.1) Si determinino gli autovalori della matrice A al variare del parametro k;

(2.4.2) Si stabilisca per quali valori di k la matrice è diagonalizzabile.

Esercizio 2.5. Dati i vettori $v_1 = (1,0,2)$,$v_2 = (1,1,1)$ e $v_3 = (2,1,2) \in \mathbb{R}^3$, dimostrare che:

(2.5.1) esiste un unico endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che v_1,v_2 e v_3 siano autovettori di f rispettivamente associati agli autovalori $1, 2, 3$;

(2.5.2) f è un isomorfismo;

(2.5.3) f^{-1} ammette gli stessi autovettori di f. Quali sono gli autovalori associati?

Esercizio 2.6. Sia $\mathcal{C}$ l'ellisse di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ di equazione:

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 2y - 3 = 0.$$

(2.6.1) Determinare tutte le isometrie di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ che trasformano $\mathcal{C}$ nella forma canonica $\mathcal{D}$ ad essa congruente.

(2.6.2) Determinarne il centro, i due assi di simmetria e i quattro vertici.

Esercizio 2.7. Sia V uno spazio vettoriale reale, $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica e $f : V \to V$ lineare tale che $(b(f(x)), b(f(y))) = b(x,y)$ per ogni $x, y \in V$. Dimostrare che:

(2.7.1) se b non è degenere allora f è iniettiva;

(2.7.2) il rango di f è maggiore o uguale al rango di b.

Esercizio 2.8. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si consideri la conica Γ_t di equazione

$$t^2x^2 + t^2y^2 - 2txy + 2(1+t)x - 3 = 0$$

(2.8.1) Si determinino le coordinate del centro C_t di Γ_t al variare di t e si scriva l'equazione cartesiana della conica $\mathcal{C}$ su cui giacciono i punti dell'insieme $I = \{C_t, t \in \mathbb{R}\}$.

(2.8.2) Si studi la conica $\mathcal{C}$ determinando il tipo, se è degenere o non degenere, gli eventuali centro ed assi.

(2.8.3) Si determinino le isometrie che portano $\mathcal{C}$ nella forma canonica ad essa equivalente.

(2.8.4) Si determini un sistema di riferimento di $\mathbb{R}^3$ rispetto al quale la conica $\mathcal{C}$ assuma forma canonica.

Esercizio 2.9. Sia $U = \langle(1,0,2),(2,0,3),(0,0,1)\rangle$ e $W = \langle(0,1,0),(1,2,3),(1,4,3)\rangle$. Trovare le dimensioni di U, W, $U+W$ e $U \cap W$ e una base per ciascuno di essi. $U+W$ è somma diretta.

Esercizio 2.10. Sia $\mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$ lo spazio euclideo con il riferimento canonico $O\underline{e}_1\underline{e}_2\underline{e}_3$.

(2.10.1) Dimostrare che esiste un unico piano $\mathcal{P}$ contenente il punto $A\,(3,4,0)$ e la retta $\mathcal{R}$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x & + & y & = 0 \\ 2x & + & y & = 0 \end{cases}.$$

Determinare inoltre l'equazione cartesiana di $\mathcal{P}$.

(2.10.2) Provare che i punti $O, A, B\,(0,0,5)$ sono i vertici di un quadrato $\mathcal{Q}$ contenuto in $\mathcal{P}$, e determinare il quarto vertice del quadrato.

(2.10.3) Determinare l'equazione cartesiana di una sfera $\mathcal{S}$ che intersechi $\mathcal{P}$ nella circonferenza circoscritta al quadrato $\mathcal{Q}$.

Esercizio 2.11. Si consideri l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(0,1,2) = (8, -2+2k, 16),$$

$$F(2,0,-1) = (-1, -2-2k, -2),$$

$$F(1,3,-1) = (4, -7-k, 8).$$

(2.11.1) Per ogni valore di k si determini una base per il nucleo e per l'immagine di F;

(2.11.2) Posto $k = 1$ verificare che F è diagonalizzabile e scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale F è diagonale.

Esercizio 2.12. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e sia $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione definita ponendo $\varphi(X) = AX$ per ogni $X \in M_2(\mathbb{R})$.

(2.12.1) Si verifichi che φ è un'applicazione lineare e si determini $M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\varphi)$, dove

$$\mathcal{E} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\};$$

(2.12.2) Si dica se φ è un automorfismo e in tal caso si trovi $M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\varphi^{-1})$.

Esercizio 2.13. Sia T un'indeterminata su $\mathbb{R}$. Si dimostri che esiste un unico sottospazio proprio W di $\mathbb{R}_{\leq 3}[T]$ contenente i polinomi

$$f(T) := 1 + T \quad g(T) := 3 - 2T + T^2 \quad h(T) := T^2,$$

e si determinino almeno due completamenti distinti di W a una base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[T]$.

Esercizio 2.14. Sia $\mathbb{Q}[X]$ l'anello dei polinomi a coefficienti razionali nell'indeterminata X e siano

$$f(X) := X^7 - X^5 - X^4 + X^2; \quad g(X) := X^5 - X \in \mathbb{Q}[X].$$

Determinare il generatore monico dell'ideali $I := (f(X), g(X))$ e dell'ideale $J := (f(X)) \cap (g(X))$. Stabilire se $\dfrac{\mathbb{Q}[X]}{I}$ e $\dfrac{\mathbb{Q}[X]}{J}$ sono campi.

Esercizio 2.15. Sia G un gruppo, $|G| = p^2$ con p primo. Si dimostri che G è abeliano.

Esercizio 2.16. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$

$$A := \{a + i\sqrt{2}b : a, b \in \mathbb{Z}\}; \quad B := \{2n + i\sqrt{2}m : n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

(2.16.1) Si dimostri che A,B sono sottoanelli di $\mathbb{C}$;

(2.16.2) Si dimostri che B è un ideale di A;

(2.16.3) Si dimostri che B è un ideale massimale di A.

Esercizio 2.17. Un anello commutativo unitario A si dice *booleano* se $a^2 = a$ per ogni $a \in A$. Provare che in A:

(2.17.1) $2a = 0$ per ogni $a \in A$;

(2.17.2) per ogni $a, b \in A$ si ha $ab(a+b) = 0$;

(2.17.3) ogni ideale primo P è massimale (*Sugg:* si trovi un isomorfismo tra $\dfrac{A}{P}$ e il campo $\mathbb{F}_2$).

Esercizio 2.18. Sia $\alpha := \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

(2.18) Si calcoli il grado dell'ampliamento $\mathbb{Q}(\alpha)$ su $\mathbb{Q}$;

(2.18) Si determini una base di $\mathbb{Q}(\alpha)$;

(2.18) Si verifichi che $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\alpha)$;

(2.18) Si dimostri che $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] = 2$.

Esercizio 2.19. Sia $\phi : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ l'omomorfismo di anelli definito nel seguente modo $f(X) = (f(2), f(-3))$.

(2.19.1) Trovare il nucleo e l'immagine di ϕ;

(2.19.2) Stabilire se l'anello quoziente $\dfrac{\mathbb{Q}[X]}{\ker(\phi)}$ è integro;

(2.19.3) Applicare a ϕ il teorema fondamentale di omomorfismo.

Esercizio 2.20. Si consideri il dominio d'integrità $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

(2.20.1) Verificare che in $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ non ci sono elementi di norma 2;

(2.20.2) Verificare che $2, 1+\sqrt{-7}$ e $1-\sqrt{-7}$ sono elementi irriducibili e non primi in $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$;

(2.20.3) Trovare un elemento di $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ che ammette due fattorizzazioni in elementi irriducibili non associati.