Esercizi di preparazione alla PFB - Soluzioni

A.A. 2012-2013 — A cura di Sara Lamboglia, Gianluca Lauteri, Maria Chiara Timpone.

Esercizi di Analisi Matematica, Algebra e Geometria.

Parte 1: Analisi Matematica.

Soluzione Esercizio 1.1. Stabiliremo per quali $x \in (0, +\infty)$ la serie è convergente, al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Consideriamo separatamente i seguenti sottocasi:

- *Se $\alpha < -1$ e $\beta \leq 0$, allora la serie converge $\forall x > 0$.* Infatti, in tal caso $x^{n^\beta} = \exp\left(n^\beta \log(x)\right) \to 1$ (poiché $n^\beta \to 0$ e $x \mapsto e^x$ è continua), e quindi esisterà un $\epsilon \in (0, 1)$ tale che se n è sufficientemente grande
$$n^\alpha x^{n^\beta} \leq (1+\epsilon) n^\alpha \sim n^\alpha.$$
Notare che l'argomento funziona *senza bisogno di alcuna modifica* anche se $x = 1$.

- *Se $\alpha < -1$ e $\beta > 0$, allora la serie converge per $x \in (0, 1]$ e diverge per $x > 1$.* Infatti, se $x > 1$, allora
$$n^\alpha x^{n^\beta} \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty.$$
Se invece $x \in (0, 1]$, allora $x^{n^\beta} \to 0$ per $n \to \infty$ se $x < 1$ oppure $x^{n^\beta} \equiv 1$, e quindi esisterà una costante $C > 0$ tale che per tutti gli n sufficientemente grandi
$$n^\alpha x^{n^\beta} \leq C n^\alpha,$$
Si ottiene dunque la convergenza della serie, poiché $\alpha < -1$.

- *Se $\alpha \geq -1$ e $\beta \leq 0$, allora la serie diverge $\forall x > 0$.* Infatti, se $x > 0$, poiché $n^\beta \to 0$, si avrà $x^{n^\beta} \to 1$ e quindi se n è sufficientemente grande
$$n^\alpha x^{n^\beta} \geq \frac{n^\alpha}{2}$$
Dunque la serie è divergente.

- *Se $\alpha \geq -1$ e $\beta > 0$, allora la serie converge per $x \in [0, 1)$ e diverge altrimenti.* Infatti, se $x \geq 1$ si ha
$$n^\alpha x^{n^\beta} \geq n^\alpha.$$
Se invece $x \in [0, 1)$, allora $n^\alpha x^{n^\beta} \leq x^{n^\beta}$ e, argomentando come nel punto (18) del precedente esercizio, si ottiene che la serie è convergente.

Soluzione Esercizio 1.2.

(1.2.1) La funzione integranda ha una singolarità nello 0. Dal criterio del confronto asintotico con la funzione $\sqrt{x}$, otteniamo che
$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{\sin \sqrt{x} + x^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{\sqrt{x}\left[\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + x^{5/2}\right]} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x} = 1,$$
e quindi l'integrale è convergente, poiché nell'origine la funzione integranda si comporta come $\sqrt{x}$.

(1.2.2) Poniamo $m := \frac{a+b}{2}$ e $\delta := \frac{b-a}{2}$. Si può spezzare l'integrale come
$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_a^m \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} + \int_m^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$
Si ha
$$\int_a^m \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_0^\delta \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}\sqrt{2\delta - y}},$$
dove abbiamo effettuato il cambio di variabile $y = x - a$. Poiché
$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}\sqrt{2\delta - y}} = \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \neq 0,$$

per il criterio del confronto asintotico
$$\int_0^\delta \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}\sqrt{2\delta - y}} \sim \int_0^\delta \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} < \infty.$$
Analogamente, si dimostra che
$$\int_m^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} < \infty.$$

(1.2.3) Studiamo prima la convergenza in un intorno di 0: per confronto asintotico,
$$\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{x^a(1+x^3)}\mathrm{d}x \sim \int_0^1 \frac{x^2}{x^a(1+x^3)}\mathrm{d}x \sim \int_0^1 \frac{1}{x^{a-2}}\mathrm{d}x.$$
Quindi, la funzione è integrabile in un intorno di 0 se e solo se $a < 3$. Consideriamo ora l'integrale tra 1 e ∞. Per il confronto asintotico, si ha
$$\int_1^\infty \frac{\log\left(1+x^2\right)}{x^a(1+x^3)}\mathrm{d}x \sim \int_1^\infty \frac{\log\left(x\right)}{x^{3+a}}\mathrm{d}x,$$
che converge se e solo se $a > -2$. Quindi l'integrale proposto è convergente se e solo se $x \in (-2, 3)$.

(1.2.4) Il problema della convergenza si ha solo all'infinito. Notiamo quindi che, per confronto asintotico,
$$\int_1^\infty \frac{(\log(1+x) - \log(x))^a}{x^b}\mathrm{d}x \sim \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{b+a}},$$
che converge se e solo se $b + a > 1$.

Soluzione Esercizio 1.3. (1.3.1) È facile verificare che $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sia effettivamente un prodotto scalare.

(1.3.2)

(a) Spezziamo l'integrale
$$\int_0^\infty f_\alpha(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f_\alpha(t)\mathrm{d}t + \int_1^\infty f_\alpha(t)\mathrm{d}t,$$
e discutiamo separatamente la convergenza di questi due integrali.

- $0 \le t < 1$: abbiamo una singolarità nell'origine; ma, per il criterio del confronto asintotico
$$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t \sim \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha-1}} < \infty \quad\Leftrightarrow\quad \alpha \in (0,2)\,.$$
Dobbiamo quindi escludere dalla discussione il caso $\alpha \ge 2$.
- $1 \le t < \infty$: integrando per parti, abbiamo
$$\int_1^\infty \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t = -\frac{\cos(t)}{t^\alpha}\bigg|_1^\infty - \alpha\int_1^\infty \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t = \cos(1) - \alpha\int_1^\infty \frac{\cos(t)}{t^{1+\alpha}}\mathrm{d}t,$$
ma
$$\int_1^\infty \left|\frac{\cos(t)}{t^{1+\alpha}}\right|\mathrm{d}t \le \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^{1+\alpha}} < \infty \quad\Leftrightarrow\quad \alpha > 0.$$
Cioè, $f_\alpha \in \mathscr{R}\,(1,\infty) \quad \forall\alpha > 0$.

Quindi, $f_\alpha \in \mathscr{R}\,(0,\infty) \quad\Leftrightarrow\quad \alpha \in (0,2)$. Cerchiamo ora gli $\alpha > 0$ per i quali $f_\alpha \in V$: sempre per confronto asintotico
$$\int_0^1 \frac{\sin^2(t)}{t^{2\alpha}}\mathrm{d}t \sim \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{2(\alpha-1)}}\mathrm{d}t < \infty \quad\Leftrightarrow\quad \alpha < \frac{3}{2}.$$
Dobbiamo quindi escludere gli $\alpha \ge \frac{3}{2}$. Abbiamo
$$\int_1^\infty \frac{\sin^2(t)}{t^{2\alpha}}\mathrm{d}t \le \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^{2\alpha}} < \infty \quad\Leftrightarrow\quad \alpha > \frac{1}{2},$$
se invece $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$ abbiamo, $\forall n \in \mathbb{N}^+$
$$\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{\sin^2(t)}{t^{2\alpha}}\mathrm{d}t \ge \frac{1}{\left(2\left(n+1\right)\pi\right)^{2\alpha}}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \sin^2(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\left(2\left(n+1\right)\pi\right)^{2\alpha}} \equiv \frac{C}{\left(n+1\right)^{2\alpha}}.$$

Quindi

$$\int_{2\pi}^{\infty}\frac{\sin^2(t)}{t^{2\alpha}}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi}\frac{\sin^2(t)}{t^{2\alpha}}\mathrm{d}t\geq C\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)^{2\alpha}}=\infty \quad \text{se } \alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right],$$

i.e., $f_\alpha \in V \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$, e per tali α è anche $f_\alpha\in V\cap\mathscr{R}(0,\infty)$.

(b) $g_\alpha\in\mathscr{R}(0,\infty) \Leftrightarrow \alpha\in(0,1)$, mentre $g_\alpha\in V \Leftrightarrow \alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ (svolgimento omesso).

(c) Abbiamo che

$$\int_0^\infty \sin\left(e^{\alpha x}\right)\mathrm{d}x \overset{y=e^{\alpha x}}{=} \frac{1}{\alpha}\int_1^\infty\frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y<\infty \quad \forall\alpha>0,$$

cioè $h_\alpha\in\mathscr{R}(0,\infty) \quad \forall\alpha>0$. Discutiamo ora l'appartenenza a V di h_α:

$$\int_0^\infty \sin\left(e^{\alpha x}\right)^2\mathrm{d}y \overset{y=e^{\alpha x}}{=} \frac{1}{\alpha}\int_1^\infty\frac{\sin^2(y)}{y}\mathrm{d}y.$$

Ma

$$\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi}\frac{\sin^2(y)}{y}\mathrm{d}y\geq\frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi}\sin^2(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2(n+1)}.$$

Quindi

$$\int_{2\pi}^{\infty}\frac{\sin^2(y)}{y}\mathrm{d}y=\sum_{n\geq1}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi}\frac{\sin^2(y)}{y}\mathrm{d}y\geq\sum_{n\geq1}\frac{1}{2(n+1)}=\infty,$$

i.e., $h_\alpha\notin V \quad \forall\alpha>0$.

Soluzione Esercizio 1.4.

(1.4) Sia $E\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$. Si considerino le proiezioni

$$\begin{array}{rccc} \pi_{\mathbf{x}}: & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (\mathbf{x},\mathbf{y}) & \mapsto & \mathbf{x}, \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \pi_{\mathbf{y}}: & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & (\mathbf{x},\mathbf{y}) & \mapsto & \mathbf{y}. \end{array}$$

Si definiscano quindi gli *insiemi di livello*

$$E_{\mathbf{x}}:=\left\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m\,\middle|\,(\mathbf{x},\mathbf{y})\in E\right\} \qquad E_{\mathbf{y}}:=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,(\mathbf{x},\mathbf{y})\in E\right\}.$$

Allora si hanno le *formule di riduzione*:

$$\int_E f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y}=\int_{\pi_{\mathbf{x}}(E)}\left(\int_{E_{\mathbf{x}}}f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_{\pi_{\mathbf{y}}(E)}\left(\int_{E_{\mathbf{y}}}f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

(1.4) Affettiamo l'insieme E prima rispetto alla coordinata x_n (che, per definizione di E, varierà in $[0,1]$), e poi rispetto alle restanti $x_1,\cdots,x_{n-1}$, ottenendo così

$$|E|_n=\int_E\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_0^1\left(\int_{E_{x_n}}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\right)\mathrm{d}x_n.$$

Ora, dire che $\mathbf{x}\in E$, equivale a dire che

$$\mathbf{x}=\lambda(\boldsymbol{\xi},0)+(1-\lambda)(\mathbf{0},1) \quad \text{per qualche } \lambda\in[0,1],\ \boldsymbol{\xi}\in B,$$

e cioè

$$\begin{cases} x_1=\lambda\xi_1, \\ x_2=\lambda\xi_2, \\ \vdots \\ x_{n-1}=\lambda\xi_{n-1}, \\ x_n=1-\lambda. \end{cases}$$

Una volta fissata x_n (i.e., una volta scelta la x_n-sezione E_{x_n}), si ha $\lambda=1-x_n$, che sostituita nelle altre variabili fornisce

$$(x_1,\cdots,x_{n-1})=(1-x_n)\boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\xi}\in B.$$

In effetti, abbiamo il diffeomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & B & \longrightarrow & E_{x_n} \\ & \boldsymbol{\xi} & \mapsto & (x_1, \cdots, x_{n-1}) = (1-x_n)\,\boldsymbol{\xi}. \end{array}$$

Chiaramente, $\det(\mathrm{Jac}(\varphi)) = (1-x_n)^{n-1}$ poiché

$$(\mathrm{Jac}(\varphi))_{ij} = (1-x_n)\,\delta_{ij}.$$

Quindi

$$\int_{E_{x_n}} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-1} = \int_B (1-x_n)^{n-1}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = (1-x_n)^{n-1}\,|B|_{n-1},$$

da cui segue

$$|E|_n = \int_E \mathrm{d}\mathbf{x} = |B|_{n-1} \int_0^1 (1-x_n)^{n-1}\,\mathrm{d}x_n = \frac{1}{n}\,|B|_{n-1}.$$

Soluzione Esercizio 1.5.

(1.5.1) Calcoliamo l'integrale in $\mathbb{R}^2$

$$I := \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Passando in coordinate polari, abbiamo

$$I = 2\pi \int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho = \pi.$$

Ma, dal Teorema di Fubini,

$$\pi = I = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y\right) =$$

 ^{2} .

Quindi (essendo $e^{-x^2} > 0\ldots$)

 $= \sqrt{\pi}.$

Da questo segue subito (da Fubini) che

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||\mathbf{x}||^2}\mathrm{d}\mathbf{x} = \pi^{\frac{n}{2}}, \qquad \forall n \geq 1.$$

(1.5.2)

(1.5.2.1) Integrando per parti, otteniamo

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t}\mathrm{d}t = \underbrace{-t^x e^{-t}\Big|_0^{\infty}}_{=0} + x\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

(1.5.2.2) Segue immediatamente da (1.5.2.1).

(1.5.2.3)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \overset{s^2=t}{=} 2\int_0^{\infty} e^{-s^2}\mathrm{d}s = \sqrt{\pi}.$$

(1.5.2.4) Si verifica facilmente per induzione su n.

(1.5.3) Sia $\omega_n := \mathrm{Area}\left(S^{n-1}\right)$, dove $S^{n-1} := \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, |x| = 1\right\}$. Sia $S_r^{n-1} := \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, |x| = r\right\}$. Allora

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\mathrm{d}x \overset{(\mathrm{F})}{=} \int_0^{\infty}\int_{S_r^{n-1}} e^{-|x|^2}\mathrm{d}S\mathrm{d}r = \int_0^{\infty} e^{-r^2}\,\mathrm{Area}\left(S_r^{(n-1)}\right)\mathrm{d}r = \omega_n \int_0^{\infty} r^{n-1}e^{-r^2}\mathrm{d}r \overset{(\mathrm{a})}{=}$$

$$= \frac{\omega_n}{2}\int_0^{\infty} t^{\frac{n}{2}-1}e^{-t}\mathrm{d}t \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\omega_n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

dove nel passaggio (F) abbiamo utilizzato il Teorema di Fubini, e nel passaggio (a) abbiamo effettuato il cambio di variabili $t = r^2$. Quindi,

$$\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \begin{cases} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \frac{2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)!!} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

(1.5.4) Sia $B_r^{(n)}(x)$ la palla in $\mathbb{R}^n$ di raggio $r > 0$ centrata in $x \in \mathbb{R}^n$. Da Fubini, otteniamo

$$\int_{B_1^{(n)}(0)} \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_0^1 \mathrm{d}r \, \mathrm{Area}\left(S_r^{(n-1)}(0)\right) = \omega_n \int_0^1 r^{n-1}\mathrm{d}r = \frac{\omega_n}{n} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \overset{(1.5.2.1)}{=} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Soluzione Esercizio 1.6.

(1.6.1) Utilizzeremo il *criterio di Weierstraß*, del quale ricordiamo l'enunciato:

Teorema 1. *Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni, $f_n : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supponiamo che esista una successione $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che*

$$|f_n(x)| \le M_n \quad \forall x \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n\ge1} M_n < \infty \qquad \text{(convergenza totale)}\,.$$

Allora $\sum_{n\ge1} f_n(\cdot)$ converge uniformemente in E.

Poniamo dunque $f_n(t) := t^2 e^{-nt}$. Dallo studio di funzione, ci si rende conto subito che $\sup_{t\in[0,\infty)} t^2e^{-nt} = \frac{4}{n^2}e^{-2} =: M_n$. Poiché $\sum_{n\ge1} M_n < \infty$, dal test di Weierstraß otteniamo che la serie proposta converge uniformemente in $[0,\infty)$. Inoltre, se $t > 0$, abbiamo (serie geometrica...)

$$\frac{1}{1-e^{-t}} = \sum_{n\ge0}\left(e^{-t}\right)^n.$$

(1.6.2) Abbiamo

$$\int_0^\infty \frac{t^2}{e^t-1}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{t^2}{e^t\left(1-e^{-t}\right)}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1}{e^t}\sum_{n\ge0} t^2e^{-nt}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \sum_{n\ge1} t^2e^{-nt}\mathrm{d}t \overset{(U)}{=}$$
$$\overset{(U)}{=} \sum_{n\ge1}\int_0^\infty t^2e^{-nt}\mathrm{d}t = 2\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^3},$$

dove nel passaggio (U) abbiamo sfruttato il fatto che la serie è uniformemente convergente per poter scambiare serie ed integrale.

Soluzione Esercizio 1.7. Dallo studio di funzione, si vede che le f_n sono monotone crescenti in $[0,1]$, e quindi $f_n(x) \le f_n(1) = \frac{1}{1+(n-1)^2}$ per ogni $x \in [0,1]$. Poiché $\sum \frac{1}{(n-1)^2}$ è convergente, la serie definente u converge uniformemente. Quindi

$$\int_0^1 u(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n\ge1} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n\ge1}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n\ge1}\left(\arctan(1-n) + \arctan(n)\right) =$$
$$= \sum_{n\ge1}\left(\arctan(n) - \arctan(n-1)\right) = \frac{\pi}{2},$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $\arctan(\cdot)$ è dispari e le proprietà delle serie telescopiche, i.e.

$$\sum_{n\ge1}\left(\arctan(n) - \arctan(n-1)\right) \overset{\text{def}}{=} \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N\left(\arctan(n) - \arctan(n-1)\right) = \lim_{N\to\infty}\arctan(N) = \frac{\pi}{2}.$$

Soluzione Esercizio 1.8. Il sistema dinamico planare associato a $\ddot{x} + x^n = 0$ è

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^n. \end{cases}$$

Definiamo la funzione

$$W(x,y) := \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{y^2}{2}.$$

W è una costante del moto Hamiltoniana: infatti,

$$\frac{\partial W}{\partial y} = y = \dot{x}, \quad -\frac{\partial W}{\partial x} = -x^n = \dot{y}.$$

Le traiettorie saranno allora tangenti alle curve di livello

$$\Gamma_E := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ W(x,y) = E\right\}. \tag{1.1}$$

Poiché $W \geq 0$, anche $E \geq 0$. Ora,

$$W(x,y) = E \Leftrightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{y^2}{2} = E \Leftrightarrow y = y_{\pm}(x) := \pm\sqrt{2\left(E - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)}.$$

Andiamo a studiare la curva

$$\phi(x) := y_+(x) = \sqrt{2\left(E - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)}.$$

Poiché ϕ è una funzione pari, è sufficiente studiarla per $x \geq 0$. Abbiamo

$$\phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[n+1]{(n+1)\,E} =: \zeta(n,E).$$

Inoltre, $\lim_{x\to 0} \phi(x) = \sqrt{2E}$ e

$$\phi'(x) = -\frac{x^n}{\sqrt{2\left(E - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)}} \leq 0, \quad \forall x \geq 0.$$

quindi ϕ è decrescente sul primo quadrante e $\phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Ne consegue che $x = 0$ è un massimo. Si vede dunque che Γ_E è una curva chiusa.
Prima di concludere, un'osservazione: poichè $\phi(0) = \sqrt{2E} \to +\infty$ per $E \to +\infty$, abbiamo che

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{E\geq 0} P_E.$$

dove P_E è la regione racchiusa dalla curva di livello Γ_E.
Passiamo ora allo studio di $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + x^n = 0$, il cui sistema planare associato è

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\alpha y - x^n. \end{cases} \tag{☣}$$

La funzione W definita in precedenza è una funzione di Ljapunov per (☣): infatti valgono

(L1) $W(x,y) > 0$, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $W(0,0) = 0$

(L2)

$$\dot{W}(x,y) = \frac{\partial W}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial W}{\partial y}\dot{y} = x^n y + y\left(-\alpha y - x^n\right) = -\alpha y^2 \leq 0,\ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Quindi $(0,0)$ è un punto di equilibrio stabile. Per provare che $(0,0)$ è asintoticamente stabile, proviamo che valgono le ipotesi del teorema di Barbašin-Krasovskij sul compatto P_E, dove P_E è la chiusura della regione delimitata dalla curva Γ_E definita nella (1.1):

(BK1) $(0,0) \in P_E$ è ovvio per costruzione.

(BK2) P_E *è positivamente invariante*: è sufficiente provare che il campo vettoriale $(\dot{x}, \dot{y})$ è sempre diretto verso l'interno su ∂P_E. Scrivendo

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \underbrace{(y, -x^n)}_{\text{tangente}} + \underbrace{(0, -\alpha y)}_{\text{verso interno}},$$

vediamo che vale (BK2).

(BK3) *Non esistono in* $P_E \setminus \{(0,0)\}$ *traiettorie costituite da soli punti* ξ *tali che* $\dot{W}(\xi) = 0$: infatti, $\dot{W}(x,y) = -\alpha y^2 = 0 \Leftrightarrow y \equiv 0$ sulla traiettoria, i.e. una traiettoria siffatta deve essere della forma $(\psi(t), 0)$. Ma $0 \equiv \dot{y} = -\alpha y - x^n = -\psi^n(t) \Rightarrow \psi(t) \equiv 0$, cioè la traiettoria è $\{(0,0)\}$.

Quindi $\{(0,0)\}$ è asintoticamente stabile e data l'arbitrarietà di $E > 0$, il suo bacino d'attrazione è tutto $\mathbb{R}^2$, i.e. tutto il piano posizione-velocità $(x, \dot{x})$.

Soluzione Esercizio 1.9.

(1.9.1)

$$\dot{H} = \langle \nabla H(x,y), (\dot{x}, \dot{y}) \rangle = x(1-y) + \left(1 - \frac{1}{y}\right) xy = 0.$$

(1.9.2) È sufficiente notare che il campo vettoriale $\begin{pmatrix} 1-y \\ xy \end{pmatrix}$ è diretto verso D su ∂D (infatti, se $y = 0$, tale campo vettoriale diviene $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$).

(1.9.3) L'unico punto di equilibrio è $p := (1, 0)$, che è stabile (ovviamente, non può essere asintoticamente stabile, data l'esistenza di un integrale primo del moto): infatti, $V(x,y) := H(x,y) - 1$ è una funzione di Lyapunov, i.e. $V(1,0) = 0$ e $\dot{V} \leq 0$.

(1.9.4) Le traiettorie saranno tangenti alle curve di livello della costante del moto (che *non* è una costante del moto Hamiltoniana!), che sono date dagli insiemi

$$\Gamma_E := H^{-1}(E) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| H(x,y) = E \right\},$$

al variare del parametro E (l'energia) in un opportuno range, da determinare. Cerchiamo ora di comprendere come sono fatte le curve Γ_E:

$$E = \frac{x^2}{2} + y - \log(y) \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2\left(E + \log(y) - y\right)} \equiv \pm f_E(y),$$

dove

$$f_E(y) := \sqrt{2\left(E - g(y)\right)}, \qquad g(y) := y - \log(y) \quad \left(g : \{y > 0\} \to \mathbb{R}\right).$$

Per avere che f_E sia ben definita, si deve richiedere almeno

$$E \geq \min_{y>0} g(y) = 1.$$

Ciò si vede subito dallo studio della funzione g (infatti, $\lim_{y \downarrow 0} g(y) = +\infty = \lim_{y \to \infty}$ e $g'(y) = 1 - y^{-1}$). Chiaramente, $\Gamma_1 = \{p\}$. Consideriamo allora $E > 1$. La funzione f_E sarà definita su tutti gli $y > 0$ per i quali $E \geq g(y)$, i.e. per $y \in g^{-1}(1, E)$. Dallo studio di g, si deduce immediatamente che $g^{-1}(E) = (y_-(E), y_+(E))$, con $0 < y_-(E) < 1 < y_+(E)$ (cfr. Figura 1), soddisfacenti

$$\lim_{E \to \infty} y_-(E) = 0, \qquad \lim_{E \to \infty} y_+(E) = \infty, \qquad y_-(1) = y_+(1) = 1.$$

Quindi, il dominio di f_E è $I_E := [y_-(E), y_+(E)]$. Poiché

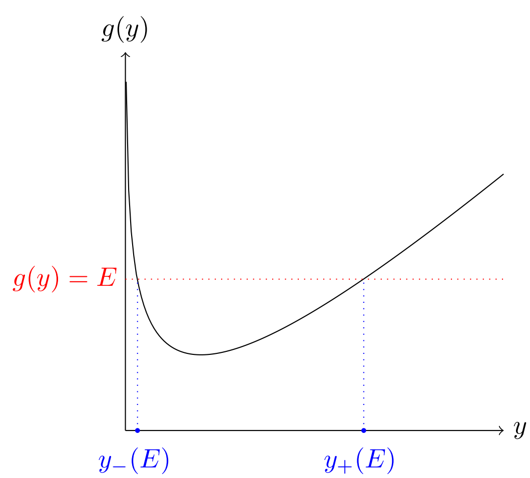

Figura 1: Grafico di g.

$$\Gamma_E = \left\{ (y, f_E(y)) \middle| y \in I_E \right\} \cup \left\{ (y, -f_E(y)) \middle| y \in I_E \right\}$$

possiamo (per simmetria) limitarci a studiare la funzione f_E, e ricavare da questa il grafico di $-f_E$. Per costruzione,

$$f_E(y_\pm(E)) = 0,$$

e

$$f_E'(y) = -\frac{g'(y)}{\sqrt{2\,(E-g(y))}} = \frac{y^{-1}-1}{\sqrt{2\,(E-g(y))}}.$$

Quindi, l'unico punto critico è in $y=1$, che risulta essere un massimo, e vale $f_E(1)=\sqrt{2(E-1)}$. Ne segue che ogni curva di livello è una curva chiusa, e in particolare che tutte le soluzioni sono definite per tutti i tempi e periodiche. In Figura 2 sono riportate le curve di livello di H.

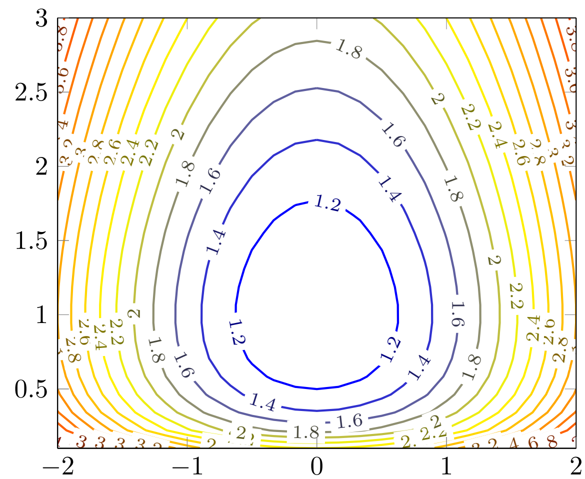

Figura 2: Curve di livello di H.

Soluzione Esercizio 1.10. Poniamo $\kappa := \max\{-a, b\}$. Allora, prese $f, g \in X$ e $t \in I$, abbiamo

$$|(Tf)(t)-(Tg)(t)| = \left|\int_0^t \left((Tf)(\tau)-(Tg)(\tau)+|f(\tau)|-|g(\tau)|\right)\mathrm{d}\tau\right| \le \kappa\left(||Tf-Tg||+||f-g||\right)$$

Passando al supremum su $t\in I$ e, se $0<\kappa<1$, abbiamo

$$||Tf-Tg|| \le \frac{\kappa}{1-\kappa}\,||f-g||\,,$$

e $\frac{\kappa}{1-\kappa}<1$ se $\kappa<\frac{1}{2}$. In conclusione, se $\max\{-a,b\}<\frac{1}{2}$, allora T è una contrazione. Sia allora $\kappa<\frac{1}{2}$, e cerchiamo l'unico punto fisso di f in X, cioè l'unica $f\in X$ tale che $Tf=f$, i.e.

$$\begin{cases} \dot f = f + |f| + 1, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Se $f\ge 0$, la soluzione sarà $f_1(t)=\frac{e^{2t}-1}{2}$, mentre se $f\le 0$ sarà $f_2(t)=t$. Il punto fisso sarà quindi dato da

$$f(t) := \begin{cases} \frac{e^{2t}-1}{2} & \text{se } t\ge 0, \\ t & \text{se t} \le 0. \end{cases}$$

Soluzione Esercizio 1.11. Adotteremo le notazioni utilizzate in *Lezioni di Analisi Matematica 2*, di Luigi Chierchia.

Teorema 2. *Sia $F : (y,x) \in \mathbb{R}^{n+m} \mapsto F(y,x) \in \mathbb{R}^n$ una funzione continua insieme alla sua matrice jacobiana $\frac{\partial F}{\partial y}$ in un intorno di (y_0, x_0). Assumiamo che*

$$F(y_0, x_0) = 0, \qquad \det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(y_0, x_0)\right) \neq 0.$$

Allora esiste una ed una sola funzione g continua in un intorno di x_0, che soddisfi

$$g(x_0) = y_0, \qquad F(g(x), x) \equiv 0,$$

per ogni x in tale intorno. Inoltre, se $F \in \mathscr{C}^k$ in un opportuno intorno di (y_0, x_0), allora $g \in \mathscr{C}^k$ in un opportuno intorno di x_0 e

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(g(x), x)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x_j}(g(x), x).$$

Poniamo $\mathbf{x}_0 := (1,1)$. Se $(x,y) = \mathbf{x}_0$ nel sistema, avremo

$$\begin{cases} u = 3v, \\ v^2 = 1, \end{cases}$$

che ha come soluzioni $\mathbf{y}_0^{(\pm)} :=: \left(u_0^{(\pm)}, v_0^{(\pm)}\right) := (\pm 3, \pm 1)$. Poniamo allora $\mathbf{y} := (u,v)$, $\mathbf{x} := (x,y)$ e

$$F(\mathbf{y}, \mathbf{x}) := \begin{pmatrix} xyu - 4yu + 9xv \\ 2xy - 3y^2 + v^2 \end{pmatrix}.$$

Si verifica subito che $F(\mathbf{y}_0^{(\pm)}, \mathbf{x}_0) = 0$ e che

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}_0^{(\pm)}, \mathbf{x}_0)\right) = \det\left(\begin{pmatrix} xy - 4y & 9x \\ 0 & 2v \end{pmatrix}\right)\Bigg|_{(u,v,x,y) = \left(\mathbf{y}_0^{(\pm)}, \mathbf{x}_0\right)} = \mp 6 \neq 0.$$

Sono quindi soddisfatte le ipotesi del Teorema delle Funzioni Implicite, e quindi esisteranno due funzioni $g_\pm = (u_\pm, v_\pm) : U_\pm \ni \mathbf{x}_0 \to \mathbb{R}^2$ tali che

$$g_\pm(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0^{(\pm)}, \qquad F(g_\pm(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \equiv 0 \ \ \forall x \in U_\pm.$$

Poiché

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(g_\pm(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} y(x-4) & 9x \\ 0 & 2v_\pm(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(g_\pm(\mathbf{x}), \mathbf{x})\right)^{-1} = \frac{1}{2y(x-4)v_\pm(\mathbf{x})} \begin{pmatrix} 2v_\pm(\mathbf{x}) & -9x \\ 0 & y(x-4) \end{pmatrix}$$

Quindi, si può verificare con un facile conto che

$$\frac{\partial g_\pm}{\partial \mathbf{x}}(x,y) = -\frac{1}{2y(x-4)v_\pm(\mathbf{x})} \begin{pmatrix} 2u_\pm v_{pm} + 9\left(v_\pm^2 - xy\right) & 2u_\pm v_\pm (x-4) - 18x(x-3y) \\ 2y^2(x-4) & 2y(x-4)(x-3y) \end{pmatrix},$$

dove per brevità abbiamo scritto $u_\pm$, $v_\pm$ al posto di $u_\pm(\mathbf{x})$ e $v_\pm(\mathbf{x})$.

Soluzione Esercizio 1.12. Cominciamo con l'enunciare (e dimostrare...) un teorema di passaggio al limite sotto segno d'integrale nella teoria dell'integrazione di Riemann:

Teorema 3. *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ tale che $|E| < \infty$, dove $|E| := \int_E \mathrm{d}x$, e sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni $f_n : E \to \mathbb{R}$ tale che $||f_n - f||_{\infty, E} \to 0$ (cioè convergente verso f uniformemente). Allora*

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n(x) \mathrm{d}x = \int_E f(x) \mathrm{d}x.$$

Dimostrazione.

$$\left| \int_E f_n(x) \mathrm{d}x - \int_E f(x) \mathrm{d}x \right| \leq \int_E |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x \leq ||f_n - f||_{\infty, E} \, |E| \to 0.$$

□

Ora, la serie $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n-1)!!}{(2n!!)} x^{2n}$ converge uniformemente in $[-\delta, \delta]$ per ogni $0 < \delta < 1$. Infatti

$$\sum_{n \geq 1} \underbrace{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}_{\leq 1} \sup_{x \in [-\delta, \delta]} x^{2n} \leq \sum_{n \geq 1} \left(\delta^2\right)^n < \infty.$$

Si conclude quindi per il criterio di Weierstraß (cfr. Esercizio 1.6). Quindi, preso $x \in (-1,1)$, abbiamo

$$\begin{aligned}\arcsin(x) &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^x \sum_{n\geq 0} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t = \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.\end{aligned}$$

Soluzione Esercizio 1.13. (1.13.1) Ovvio.

(1.13.2) Già fornita nell'esercizio 1.11.

(1.13.3) Poniamo $F(x,y) := x^4 + y^4 + x^2 - y^2$. $F(0,1) = 0$, come già visto nel punto (1.11.1), e $F_y(0,1) = 2 \neq 0$. Si può quindi applicare il Teorema delle Funzioni Implicite, che garantisce l'esistenza di un'unica funzione $y : U \to \mathbb{R}$ di classe $\mathscr{C}^1$ (poiché F è $\mathscr{C}^1$) definita in un intorno U di 0 e tale che $y(0) = 1$ e $F(x, y(x)) \equiv 0\, \forall x \in U$. Poi

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))} = -\frac{x(2x^2+1)}{y(x)\,(y^2(x)-1)}.$$

(1.13.4) Ricordiamo l'enunciato del Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange, per funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

Teorema 4. *Siano $\phi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $E_0 := \phi^{-1}(0)$, e sia $f \in \mathscr{C}^1(E_0, \mathbb{R})$.*

$$\exists x_0 \in E_0, \lambda_0 \in \mathbb{R} \mid \nabla f(x_0) = \lambda_0 \nabla\phi(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad (x_0,\lambda_0) \text{ è un punto critico per } L : (x,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto f(x) - \lambda\phi(x).$$

(1.13.5) Mettiamo a sistema la $\nabla L(x,\lambda) = 0$ con la condizione di vincolo $F(x,y) = 0$:

$$0 = 2\lambda x(2x^2+1) \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ oppure } \lambda = 0$$ (),

$$1 = 2\lambda y(2y^2-1) \quad \Rightarrow \quad \lambda \neq 0$$ (),

$$x^4 + y^4 + x^2 - y^2 = 0$$ $\xRightarrow{\qquad}$ (), () $$y^2(y^2-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \in \{-1, 0, 1\}.$$

Chiaramente, $y = 0$ è incompatibile con la (), mentre $y \in \{\pm 1\}$ è lecito per opportune scelte di λ. Quindi il massimo di f su A è da ricercare nell'insieme $\{(0, \pm 1)\}$. Essendo $f(0,\pm 1) = \pm 1$, $\max_A f = 1$.

Soluzione Esercizio 1.14.

(1.14.1) Non è difficile convincersi che $\#\mathfrak{A} \cap [0, 10^n) = 9^n - 1$[‡], quindi $\#\left(\mathfrak{A} \cap [10^{n-1}, 10^n)\right) = 8 \cdot 9^{n-1}$. Allora

$$\sum_{a\in\mathfrak{A}} \frac{1}{a} = \sum_{n\geq 1} \sum_{a \in \mathfrak{A}\cap[10^{n-1},10^n)} \frac{1}{a} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{10^{n-1}} \#(\mathfrak{A} \cap [10^{n-1}, 10^n)) \leq 8 \sum_{n\geq 1} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} = 80 < +\infty.$$

[‡]Si può adottare, ad esempio, il seguente argomento combinatorio: se $a = \sum_{i=0}^N a_i 10^i$, vi sono $9 = \#([0,9] \cap \mathbb{N})$ possibili scelte per ogni a_i , e quindi a può essere scelto in $9^n - 1$ modi diversi (il -1 è per rimuovere lo 0, che è contato come una delle 9^n scelte lecite).

(1.14.2)

(1.14.2.1) Altrimenti, avremmo $\frac{a_n}{1+a_n} \to 0$, cioè $a_n \to 0$. Quindi, esisterebbe un $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \leq 1$ per ogni $n \geq N$. Quindi
$$\frac{a_n}{1+a_n} \geq \frac{a_n}{2},$$
che è una contraddizione.

(1.14.2.2) Senza perdita di generalità, $a_n > 0$ per ogni n. Allora $\frac{a_n}{1+n^2 a_n} \leq \frac{a_n}{n^2 a_n} = \frac{1}{n^2}$. Il criterio del confronto implica quindi la convergenza della serie.

(1.14.2.3) Se $a_n = \frac{1}{n}$, allora $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+na_n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n} = +\infty$. D'altra parte, si consideri la successione
$$a_n := \begin{cases} 1 & \text{se } n \in \mathfrak{A}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$
dove $\mathfrak{A}$ è l'insieme definito nel punto (1.12.1). Chiaramente, $\sum a_n = +\infty$. Ma
$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+na_n} = \sum_{n\in\mathfrak{A}} \frac{1}{1+n} < \sum_{n\in\mathfrak{A}} \frac{1}{n} < \infty.$$

(1.14.2.4) Se $a_n = \frac{1}{n}$, allora $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+a_n^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^2+1} = +\infty$. Ora, se $\mathfrak{A}$ è come prima, si consideri la successione
$$a_n := \begin{cases} n & \text{se } n \in \mathfrak{A}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
È evidente che $\sum_{n\geq 1} a_n = +\infty$. Ma
$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+a_n^2} = \sum_{n\in\mathfrak{A}} \frac{n}{1+n^2} \sim \sum_{n\in\mathfrak{A}} \frac{1}{n} < +\infty.$$

Soluzione Esercizio 1.15. Per assurdo, supponiamo che f non sia continua su X, i.e. che $\exists x_0 \in X$ tale che $f(x) \not\to f(x_0) \quad x \to x_0$. Per il Teorema Ponte, questo è equivalente a dire che $\exists \{x_n\} \subset X$ tale che $x_n \to x$ ma $f(x_n) \not\to f(x_0)$. Quindi $\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}, \bar{\epsilon} > 0 : |f(x_{n_k}) - f(x_0)| \geq \bar{\epsilon} \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Consideriamo allora la successione $\{z_k\} \equiv \{(x_{n_k}, f(x_{n_k}))\} \subset G$. Essendo G compatto, $\{z_k\}$ ammetterà una sottosuccessione $\left\{(x_{n_{k_j}}, f(x_{n_{k_j}}))\right\}$ convergente verso un punto $(\overline{x}, \overline{y}) \in G$. Per definizione di G, si dovrà necessariamente avere $\overline{y} = f(\overline{x})$. Poiché $x_{n_{k_j}} \to x_0$, allora $\overline{x} = x_0$, e quindi $f(x_{n_{k_j}}) \to f(x_0)$, assurdo poiché $\left|f(x_{n_{k_j}}) - f(x_0)\right| \geq \bar{\epsilon} \quad \forall j$.

Soluzione Esercizio 1.16.

(1.16.1) Se $\theta \in \mathbb{Q}$, allora a_n è definitivamente nulla. In particolare, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Sia ora $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Proviamo che il limite è ancora 0. Abbiamo
$$|a_n| = \prod_{j=1}^{n} |\sin(j\pi\theta)| = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \log\left(|\sin(j\pi\theta)|\right)\right).$$
Notiamo per prima cosa che tale scrittura ha senso: infatti, dal momento che θ è irrazionale, $|\sin(j\pi\theta)|$ è sempre strettamente positivo (convincersene). Assumendo quanto suggerito [(1)], esisterà una successione $\{j_k\} \subset \mathbb{N}$ tale che $\{j_k\theta\} \to 0$ per $k \to \infty$. Poiché dalle formule di addizione si ha
$$|\sin(j\pi\theta)| = |\sin(\pi([j\theta] + \{j\theta\}))| = |\sin(\pi\{j\theta\})|,$$
otteniamo in particolare che, se $\mathcal{A} := \left\{ j_k \middle| k \in \mathbb{N} \right\}$,
$$\sum_{j=1}^{n} \log\left(|\sin(j\pi\theta)|\right) = \sum_{j\in[1,n]\cap\mathcal{A}} \log\left(|\sin(j\pi\theta)|\right) + \sum_{j\in[1,n]\cap\complement\mathcal{A}} \underbrace{\log\left(|\sin(j\pi\theta)|\right)}_{\leq 0} \leq \sum_{j\in[1,n]\cap\mathcal{A}} \underbrace{\log\left(|\sin(j\pi\theta)|\right)}_{\to -\infty}.$$

[(1)] Per comodità, proponiamo una bozza di dimostrazione del suggerimento che fa uso della teoria delle *frazioni continue*, invece che del principio della piccionaia (sarà compito degli studenti più motivati aggiungere tutti i dettagli). È ben noto (cfr. *An introduction to the theory of numbers*, di Hardy e Wright) che se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, allora esiste una successione $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\} \subset \mathbb{Q}$ "ottimale" (in un senso che non staremo qui a precisare), $q_n \in \mathbb{N}$ strettamente crescente, tale che $\frac{p_n}{q_n} \to x$. Si può dimostrare che tale successione ottimale soddisferà l'uguaglianza $q_n x = p_n + (-1)^n \frac{\delta_n}{q_n}$, con $\delta_n \in (0,1)$. In particolare, $q_{2n} x = p_{2n} + \frac{\delta_{2n}}{q_{2n}}$. Quindi, poiché $p_{2n} \in \mathbb{Z}$, si ha $\{q_{2n} x\} = \frac{\delta_{2n}}{q_{2n}} \to 0$. Si può scegliere allora $j_k := q_{2k}$.

Cioè
$$\sum_{j\geq 1}\log\left(|\sin(j\pi\theta)|\right)=-\infty.$$
Quindi, passando al limite, si ha
$$0\leq |a_n|=\exp\left(\sum_{j=1}^{n}\log\left(|\sin(j\pi\theta)|\right)\right)\leq \exp\left(\sum_{j\in[1,n]\cap\mathcal{A}}\log\left(|\sin(j\pi\theta)|\right)\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$
Abbiamo quindi provato che $a_n\to 0 \quad \forall\theta\in\mathbb{R}$.

(1.16.2) Notiamo che
$$2\pi n!e=2\pi n!\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}+\sum_{j\geq n+1}\frac{1}{j!}\right)=2\pi\underbrace{\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!}}_{\in\mathbb{N}}+2\pi\sum_{j\geq n+1}\frac{n!}{j!}.$$
Possiamo stimare la seconda serie come
$$\sum_{j\geq n+1}\frac{n!}{j!}=\frac{n!}{(n+1)!}+\frac{n!}{(n+2)!}+\cdots=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\leq$$
$$\leq\frac{1}{n+1}+\sum_{j\geq n+2}\frac{1}{j^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0,$$
poiché $\sum_{j\geq n+2}\frac{1}{j^2}$ è la coda di una serie convergente e tende quindi a zero per $n\to+\infty$. Quindi
$$\sin(2\pi n!e)=\sin\left(2\pi\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!}+\sum_{j\geq n+1}\frac{n!}{j!}\right)\right)=$$
$$=\underbrace{\sin\left(2\pi\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!}\right)}_{\equiv 0,\ \forall n\in\mathbb{N}}\cos\left(2\pi\sum_{j\geq n+1}\frac{n!}{j!}\right)+\sin\left(2\pi\sum_{j\geq n+1}\frac{n!}{j!}\right)\underbrace{\cos\left(2\pi\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!}\right)}_{\equiv 1,\ \forall n\in\mathbb{N}}=$$
$$=\sin\left(2\pi\sum_{j\geq n+1}\frac{n!}{j!}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$
Cioè, $\lim_{n\to\infty}\sin(2\pi n!e)=0$[(2)].

Soluzione Esercizio 1.17. Assumiamo per assurdo che $\exists x_0\in B_1(0)^c\,:\,f(x_0)\neq 0$. Poichè f è continua, esisterà allora tutto un intorno $I(x_0)\subset B_1(0)^c$ nel quale f è non nulla. In particolare, esiste una palla chiusa $\overline{B}\ni x_0$ nella quale f non si annulla mai. Poniamo $m:=\min\left\{|x|\,:\,x\in\overline{B}\right\}>1,\quad m_f:=\min\left\{|f(x)|\,:\,x\in\overline{B}\right\}$ si avrà allora
$$\int_{\mathbb{R}}|x|^n|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{B_1(0)}|x|^n|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{B_1(0)^c}|x|^n|f(x)|\,\mathrm{d}x\leq 1\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$
Ma
$$\int_{B_1(0)^c}|x|^n|f(x)|\,\mathrm{d}x\geq\int_{\overline{B}}|x|^n|f(x)|\,\mathrm{d}x\geq m_f\int_{\overline{B}}|x|^n\,\mathrm{d}x\geq m_f\cdot m^n\cdot\int_{\overline{B}}\mathrm{d}x=m_f\cdot m^n\cdot|\overline{B}|\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty,$$
che è palesemente assurdo (come al solito, $|A|$ indica la misura di Peano-Jordan dell'insieme A).

Soluzione Esercizio 1.18.

(1.18.1) Diremo che $A\subset\mathcal{C}$ è chiuso se $\forall\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset A$ t.c. $||f_n-f||\to 0$, allora $f\in A$.

(1.18.2) Diremo che $A\subset\mathcal{C}$ è convesso se $\forall f,g\in A$, $\forall t\in[0,1]$, allora $(1-t)f+tg\in A$.

(2) Provate a valutare tale limite con un programma come *Mathematica*® di Wolfram. Perché tale calcolo fallisce?

(1.18.3) Proviamo che M è chiuso: sia $\{f_n\} \subset M$ tale che $||f_n - f|| \to 0$, cioè $\forall \varepsilon > 0, \exists N \; : \; ||f_n - f|| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$, i.e. $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, e quindi $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [0,1]$, e quindi

$$-\varepsilon + f_n(x) < f(x) < \varepsilon + f_n(x)$$

Abbiamo quindi

$$1 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x \leq 1,$$

cioè $Tf = 1$, i.e. $f \in M$.
Proviamo ora che M è convesso: siano $f, g \in M$, e sia $t \in [0,1]$. Allora

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} (tf(x) + (1-t)g(x))\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{2}}^1 (tf(x) + (1-t)g(x))\,\mathrm{d}x &= t\left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x\right) + \\ &+ \int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{2}}^1 g(x)\mathrm{d}x - \\ &- t\left(\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{2}}^1 g(x)\mathrm{d}x\right) = \\ &= t + 1 - t = 1,\end{aligned}$$

i.e. $tf + (1-t)g \in M \quad \forall t \in [0,1]$, e quindi M è convesso.

(1.18.4) Se $||f|| \leq 1$, allora $|f(x)| \leq 1 \quad \forall x \in [0,1]$. Quindi

$$Tf \leq \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x < 1.$$

Infatti, se $f \not\equiv 1, -1$, allora $|f(x)| < 1 \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, per qualche $x_0 \in [0,1]$ e $r \in (0,1)$ tali che $(x_0 - r, x_0 + r) \subset [0,1]$ e quindi

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^{x_0-r} |f(x)|\,\mathrm{d}x}_{\leq x_0 - r} + \underbrace{\int_{x_0-r}^{x_0+r} |f(x)|\,\mathrm{d}x}_{<2r} + \underbrace{\int_{x_0+r}^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x}_{\leq 1 - x_0 - r} < x_0 - r + 2r + 1 - x_0 - r = 1.$$

I casi $f \equiv 1, -1$ sono da escludere poiché in tal caso $f \notin M$. Si deve quindi necessariamente avere $||f|| > 1 \quad \forall f \in M$.

(1.18.5) È sufficiente considerare le funzioni (cfr. Figura 3)

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} 1 + \varepsilon & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) \\ (1 - 2x)\frac{(1+\varepsilon)^2}{2\varepsilon} & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right] \\ -(1+\varepsilon) & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, 1\right]. \end{cases}$$

Si verifica infatti immediatamente che $||f_\epsilon|| = 1 + \varepsilon$ e che $Tf = 1$.

(1.18.6) Per assurdo, sia $f_0 \in M$ tale che $||f_0|| = \inf_{f\in M} ||f||$. Per il punto (iv) si ha $||f_0|| > 1$, i.e. $||f_0|| = 1 + \bar{\epsilon}$ per qualche $\bar{\epsilon} > 0$. Ma sappiamo dal punto (v) che $\exists f_1 \in M$ tale che $||f_1|| = 1 + \frac{\bar{\epsilon}}{2} < ||f_0||$, assurdo.

Soluzione Esercizio 1.19.

(1.19)

$$\int_0^1 \alpha(x)\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0} \int_{\alpha^{-1}(\{n\})} \alpha(x)\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0} n \,\mathrm{meas}\left(\alpha^{-1}\left(\{n\}\right)\right) = \sum_{n\geq 0} n\,\mathrm{meas}\left(\left\{x \in [0,1] \middle| \alpha(x) = n\right\}\right).$$

(1.19) Notiamo che si ha

$$\alpha(x) = \sum_{n\geq 0} \chi_{\alpha^{-1}((n,\infty))}(x),$$

poiché

$$\sum_{n\geq 0} \chi_{\alpha^{-1}((n,\infty))}(x) = \sum_{n=0}^{\alpha(x)-1} 1 = \alpha(x).$$

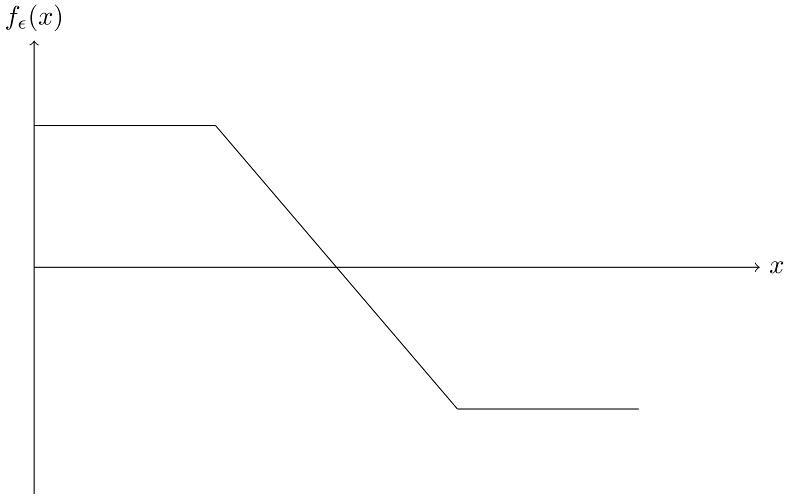

Figura 3: Grafico di f_ϵ, per $\epsilon = \frac{1}{4}$.

Quindi

$$\int_0^1 \alpha(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n\geq 0} \chi_{\alpha^{-1}((n,\infty))}(x)\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0}\int_0^1 \chi_{\alpha^{-1}((n,\infty))}(x)\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0} \mathrm{meas}\left(\alpha^{-1}\left((n,\infty)\right)\right) =$$
$$= \sum_{n\geq 0} \mathrm{meas}\left(\left\{x\in[0,1]\middle|\alpha(x)>n\right\}\right).$$

Soluzione Esercizio 1.20. Procederemo in più passi:

(1.20.1) $f(-x) = -f(x)$: infatti, sia

$$u_{x_0}(x) := \begin{cases} x_0 & \text{se } x\in\left[0,\frac{1}{2}\right) \\ -x_0 & \text{se } x\in\left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}.$$

Ovviamente, $u_{x_0}\in\mathcal{U}\quad\forall x_0\in\mathbb{R}$, e quindi

$$0 = \int_0^1 f(u_{x_0}(x))\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x_0)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(-x_0)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(f(x_0)+f(-x_0)\right).$$

Quindi $f(-x_0) = -f(x_0)$. In particolare, segue che $f(0)=0$.

(1.20.2) $f(x+y) = f(x)+f(y)$: infatti, se consideriamo

$$u_{x_1,x_2}(x) := \begin{cases} x_1+x_2 & \text{se } x\in\left[0,\frac{1}{3}\right), \\ -x_1 & \text{se } x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right), \\ -x_2 & \text{se } x\in\left[\frac{2}{3},1\right], \end{cases}$$

allora chiaramente $u_{x_1,x_2}\in\mathcal{U}\quad\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$, e quindi

$$0 = \int_0^1 f(u_{x_1,x_2}(x))\mathrm{d}x = \frac{1}{3}f(x_1+x_2) + \frac{1}{3}f(-x_1) + \frac{1}{3}f(-x_2).$$

Ma, nel punto (1.18.1), abbiamo provato che $f(-x) = -f(x)$, e quindi

$$f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2).$$

(1.20.3) $f(\alpha x) = \alpha f(x)\quad\forall\alpha,x\in\mathbb{R}$: notiamo che è sufficiente provare ciò per $\alpha\in(0,1)$ ($\alpha=0$ è il punto (i)). Infatti, per $\alpha\in\mathbb{R}^+$ generico, possiamo sempre scrivere $\alpha = [\alpha]+\{\alpha\}$, $\{\alpha\}\in[0,1)$ (come al solito, $[x]$ e $\{x\}$ denotano la parte intera e la parte frazionaria di x, rispettivamente). Quindi

$$f(\alpha x) = f([\alpha]\,x + \{\alpha\}\,x) \overset{\text{(ii)}}{=} f([\alpha]\,x) + f(\{\alpha\}\,x) = [\alpha]\,f(x) + \{\alpha\}\,f(x) = \alpha f(x),$$

dove abbiamo usato l'ipotesi che la linearità valga per $\alpha \in (0,1)$, e il fatto che per $n \in \mathbb{N}^+$ si ha

$$f(nx) = f\left(\underbrace{x + \cdots + x}_{n \text{ volte}}\right) \overset{\text{(ii)}}{=} nf(x).$$

Il caso $\alpha \in \mathbb{R}^-$ si ottiene grazie alla relazione $f(-x) = -f(x)$, ottenuta al punto (i). Quindi, per $\alpha \in (0,1)$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, consideriamo

$$u_{x_0}^{\alpha}(x) := \begin{cases} x_0 & \text{se } x \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right), \\ 0 & \text{se } x \in \left[\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}\right). \\ -\alpha x_0 & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Anche in questo caso è immediato verificare che $u_{x_0}^{\alpha} \in \mathcal{U}$, e quindi

$$0 = \int_0^1 f(u_{x_0}^{\alpha}(x))\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\alpha}{2}} f(x_0)\mathrm{d}x + \underbrace{\int_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{1}{2}} f(0)\mathrm{d}x}_{\overset{\text{(i)}}{=}0} + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(-\alpha x_0)\mathrm{d}x = \frac{\alpha}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(-\alpha x_0).$$

Perciò

$$f(\alpha x_0) = \alpha f(x_0).$$

Quindi f è lineare.

Soluzione Esercizio 1.21. È banale verificare che $||\cdot||$ sia effettivamente una norma. Vediamo invece che φ non è continuo, cioè che

$$\exists \bar{\epsilon} > 0, \overline{p} \in X \text{ t.c. } \forall \delta > 0\, \exists p \in \overline{B_\delta(p)}\ :\ |p(2) - \overline{p}(2)| \geq \bar{\epsilon},$$

dove $B_\delta(\overline{p})$ è la palla di centro $\overline{p}$ e raggio δ, con la metrica indotta dalla norma $||\cdot||$. Infatti, si scelgano $\bar{\epsilon} = 1$ e $\overline{p} \equiv 0$, il polinomio identicamente nullo. Per ogni $\delta > 0$, si definisca quindi il polinomio

$$p_\delta(t) := \delta \sum_{i=0}^{N(\delta)} \frac{t^i}{2^i}, \quad N(\delta) := \left[\delta^{-1}\right].$$

Abbiamo allora

$$||p_\delta|| \leq \delta, \quad |p_\delta(2)| = \delta\left(N(\delta) + 1\right) \geq 1.$$

Cioè la tesi.

Soluzione Esercizio 1.22. Si ha ovviamente $I_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Sia $m_n := \max\{x_1, \ldots, x_n\}$. Per il Teorema di Fubini, abbiamo

$$I_{n+1} = \int_0^1 \mathrm{d}x_{n+1}\left(\int_{\substack{[0,1]^n \\ m_n \geq x_{n+1}}} m_n \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n + x_{n+1}\int_{\substack{[0,1]^n \\ m_n \leq x_{n+1}}} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n\right).$$

Chiaramente

$$\int_{\substack{[0,1]^n \\ m_n \leq x_{n+1}}} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \mathrm{meas}_n\left(\left\{(x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n \middle| x_i \leq x_{n+1} \quad \forall i\right\}\right) = x_{n+1}^n.$$

Sia

$$A_i := \left\{(x_1, \cdots, x_n) \in [0,1]^n \middle| x_i \geq x_{n+1},\ x_j \leq x_{n+1}\ \forall j \in ([1,n] \cap \mathbb{N}) \setminus \{i\}\right\}.$$

Notiamo che

$$\int_{A_i} x_i \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \int_{[0,x_{n+1}]^{n-1}} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_{i+1} \cdots \mathrm{d}x_{n-1} \int_{x_{n+1}}^1 x_i \mathrm{d}x_i = \frac{1}{2}\left(x_{n+1}^{n-1} - x_{n+1}^{n+1}\right).$$

Abbiamo allora la stima

$$\int_{\substack{[0,1]^n \\ m_n \geq x_{n+1}}} m_n \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} x_i \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \frac{n}{2}\left(x_{n+1}^{n-1} - x_{n+1}^{n+1}\right),$$

e quindi

$$I_{n+1} \geq \frac{n}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x_{n+1}\left(x_{n+1}^{n-1} + x_{n+1}^{n+1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{n}{n+2}.$$

Cioè

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{n}{n+2}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}1} \leq I_{n+1} \leq 1.$$

Dal Teorema del confronto per successioni, segue quindi che

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 1.$$

Soluzione Esercizio 1.23. Per prima cosa, notiamo che $f_n \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$, in quanto composizione di funzioni continue. Quindi, dimostriamo per induzione che

$$f_{2n+1}(x) \sim x \text{ per } x \to 0+\,. \tag{☢}$$

La base induttiva è ovvia. Supponiamo quindi che l'ipotesi sia vera fino ad $n-1$. Allora

$$\frac{f_{2n+1}(x)}{x} = x^{x^{f_{2n-1}(x)}-1} \sim x^{x^x-1} \sim x^{x\log(x)} = e^{x\log^2(x)} \xrightarrow[x\to0+]{} 1,$$

che quindi prova la (☢). Concludiamo allora facilmente notando che

$$f_{2n+2}(x) = x^{f_{2n+1}(x)} \sim x^x \xrightarrow[x\to0+]{} 1.$$

Soluzione Esercizio 1.24. Ci sono due casi possibili: $\{a_n\}$ illimitata oppure $\{a_n\}$ limitata (i.e. convergente). Se $\{a_n\}$ è illimitata, allora $a_n\to\infty$, e quindi $\exists N\in\mathbb{N}$ tale che $a_n \geq 1\,\forall n\geq N$. Se $n \geq N+1$, avremo

$$\frac{a_n}{\prod_{j=1}^n(1+a_j)} = \frac{a_n}{\left(\prod_{j=1}^{N-1}(1+a_j)\right)\left(\prod_{j=N}^{n-1}(1+a_j)\right)(1+a_n)} \leq c_N\frac{1}{2^{n-N}},$$

poiché $\frac{a_n}{1+a_n}<1$; abbiamo poi posto $c_N := \left(\prod_{j=1}^{N-1}(1+a_j)\right)^{-1}$. Allora

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq1}\frac{a_n}{\prod_{j=1}^n(1+a_j)} &= \sum_{n=1}^N\frac{a_n}{\prod_{j=1}^n(1+a_j)} + \sum_{n\geq N+1}\frac{a_n}{\prod_{j=1}^n(1+a_j)} < \sum_{n=1}^N\frac{a_n}{\prod_{j=1}^n(1+a_j)} + c_N\sum_{n\geq N+1}2^{N-n} = \\ &= \sum_{n=1}^N\frac{a_n}{\prod_{j=1}^n(1+a_j)} + c_N\sum_{j\geq1}2^{-j} < +\infty.\end{aligned}$$

Supponiamo ora che $\{a_n\}$ sia limitata. Allora, $a_n\to\ell>0$. Di conseguenza, esisterà un $N\in\mathbb{N}$ tale che $|a_n-\ell|<\frac{\ell}{2}$ se $n>N$, i.e. $\frac{\ell}{2}<a_n<\frac{3}{2}\ell$. Allora, se $n>N$ si ha la stima

$$\frac{a_n}{\prod_{j=1}^n(1+a_j)} < \frac{3}{2}c_N\frac{\ell}{\prod_{j=N}^n\left(1+\frac{\ell}{2}\right)} < \frac{3}{2}c_N\frac{1}{\left(1+\frac{\ell}{2}\right)^{n-N+1}}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq1}\frac{a_n}{\prod_{j=1}^n(1+a_j)} &= \sum_{n=1}^N\frac{a_n}{\prod_{j=1}^n(1+a_j)} + \sum_{n\geq N+1}\sum_{n\geq1}\frac{a_n}{\prod_{j=1}^n(1+a_j)} < \sum_{n=1}^N\frac{a_n}{\prod_{j=1}^n(1+a_j)} + \frac{3}{2}\ell c_N\sum_{n\geq N+1}\frac{1}{\left(1+\frac{\ell}{2}\right)^{n-N+1}} = \\ &= \sum_{n=1}^N\frac{a_n}{\prod_{j=1}^n(1+a_j)} + \frac{3}{2}\ell c_N\sum_{j\geq0}\left(1+\frac{\ell}{2}\right)^{-j} < +\infty.\end{aligned}$$

Soluzione Esercizio 1.25. Poiché $x^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ per ogni $x>0$, in particolare esisterà un $N\in\mathbb{N}$ tale che $x_0^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{2}$ per ogni $n\geq N$. Quindi

$$+\infty > \sum_{n\geq N} a_n x_0^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{2}\sum_{n\geq N} a_n,$$

i.e., $\sum_{n\geq1}a_n<+\infty$. Allora, comunque scelto $x>0$, esisterà un $N=N(x)\in\mathbb{N}$ tale che $x^{\frac{1}{n}}\leq 2$ per ogni $n\geq N$. Perciò

$$\sum_{n\geq N} a_n x^{\frac{1}{n}} \leq 2\sum_{n\geq N}a_n < \infty.$$

Parte 2: Algebra e Geometria.

Soluzione Esercizio 2.1.

(2.1.1) Basterà dimostrare che i due vettori sono linearmente indipendenti. Infatti, se per assurdo esistessero $a, b \neq 0$ tali che

$$a \cos t + b \sin t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

allora per $t = 0$ si otterrebbe $a = 0$, mentre per $t = \frac{\pi}{2}$ si avrebbe $b = 0$. Assurdo.

(2.1.2) Si applichino la definizione e le proprietà degli integrali.

(2.1.3) La matrice richiesta è $\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$.

Soluzione Esercizio 2.2.

(2.2.1) Per vedere se i polinomi $t+1$, $t+t^2$, $2-t-t^3$, t^3 sono una base di V sarà sufficiente verificare che sono linearmente indipendenti (infatti, $\langle t+1, t+t^2, 2-t-t^3, t^3 \rangle \subseteq \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ e $\dim(\langle t+1,\ t+t^2,\ 2-t-t^3,\ t^3 \rangle) = \dim(\mathbb{R}_{\leq 3}[x])$).

$$a(t+1) + b(t+t^2) + c(2-t-t^3) + dt^3 = 0$$

$at + a + bt + bt^2 + 2c - ct - ct^3 + dt^3 = 0$
$a + 2c + t(a+b-c) + t^2 b + t^3(d-c) = 0$

$$\begin{cases} a + 2c = 0 \\ a + b - c = 0 \\ b = 0 \\ d - c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Applichiamo il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt utilizzando il prodotto scalare standard. Poniamo $v_1 := t+1$, $v_2 := t+t^2$, $v_3 := 2-t-t^3$, $v_4 := t^3$ e $w_1 = t+1$
$w_2 = v_2 - \frac{<v_2,w_1>}{<w_1,w_1>} w_1 = t + t^2 - \frac{1}{2}(t+1) = \frac{1}{2}t + t^2 - \frac{1}{2}$
$w_3 = v_3 - \frac{<v_3,w_1>}{<w_1,w_1>} w_1 - \frac{<v_3,w_2>}{<w_2,w_2>} w_2 = 2 - t - t^3 - \frac{1}{2}(1+t) + (\frac{1}{2}t + t^2 - \frac{1}{2}) = 1 - t + t^2 - t^3$
$w_4 = v_4 - \frac{<v_4,w_1>}{<w_1,w_1>} w_1 - \frac{<v_4,w_2>}{<w_2,w_2>} w_2 - \frac{<v_4,w_3>}{<w_3,w_3>} w_3 = \frac{3}{4}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}$
Infine normalizziamo i vettori e otteniamo:
$\underline{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{t}{\sqrt{2}}$
$\underline{w}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}t}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}t^2}{\sqrt{3}}$
$\underline{w}_3 = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2}$
$\underline{w}_4 = \frac{3t^3}{2\sqrt{3}} + \frac{t^2}{2\sqrt{3}} - \frac{t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$

(2.2.2) Per calcolare le equazioni cartesiane e parametriche di $U^\perp$ procediamo nel seguente modo: Ricordiamo che un vettore v appartiene a $U^\perp$ se $< v, t^3 - 1 >= 0$ e se $< v, t+2 >= 0$, quindi preso un generico vettore di V:

$$\begin{cases} < t^3 - 1, x + yt + zt^2 + wt^3 >= 0 \\ < t + 2, x + yt + zt^2 + wt^3 >= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w = x \\ y = -2x \end{cases}$$

Il sistema di equazioni appena trovato rappresenta le equazioni cartesiane di $U^\perp$; dal quale deduciamo le sue equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = u \\ w = u \\ y = -2u \end{cases}$$

Per scrivere una base ortonormale per U e $U^\perp$ utilizziamo il procedimento di Gram-Schmidt:

$w_1 = t^3 - 1$
$w_2 = v_2 - \frac{<v_2,w_1>}{<w_1,w_1>} w_1 = t + 2 + (t^3 - 1) = t^3 + t + 1$
Dividiamo ciascun vettore per la propria norma per ottenere vettori ortonormali
$w_1 = \frac{t^3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$
$w_2 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{7}} - \frac{3\sqrt{2}t^3}{\sqrt{7}}$
Invece per $U^\perp$ abbiamo che :
$U^\perp = < 1 - 2t + t^3, t^2 >$
Poniamo $v_1 = 1 - 2t + t^3$ mentre $v_2 = t^2$ e notiamo che sono ortogonali quindi sarà sufficiente normalizzarli:
$w_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} t + \frac{t^3}{\sqrt{6}}$
$w_2 = t^2$

Soluzione Esercizio 2.3. In primo luogo troviamo la retta ortogonale al piano generato da v_1 e v_2. Osserviamo che

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \langle v_1, v_2 \rangle^\perp \subset \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} (1,0,1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ (1,2,0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2y \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow v \in \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

A questo punto sarà sufficiente considerare l'intersezione tra il piano $\pi := \langle v_1, v_2 \rangle$ di equazione $2x - 2z - y = 0$ e la retta $\mathcal{R}$ passante per v_3 e per $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ di equazioni $\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$.

Dunque $P_\pi(v_3) = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{31}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

Soluzione Esercizio 2.4.

(2.4.1) $P_{A_k}(\lambda) = (3 - k - \lambda)^2 (2 - \lambda) = 0$ dunque gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3 - k$.

(2.4.2) Verifichiamo per quali valori di k molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di λ_2 coincidono. La molteplicità algebrica di λ_2 è 2. Calcoliamo la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore λ_2. Si ha

$$V_{\lambda_2} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ k & -1-k & k \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overline{0} \right\}$$

Si vede che per $k = 0$ $\dim(V_{\lambda_2}) = 2$ mentre per $k \neq 0$ $\dim(V_{\lambda_2}) = 1$. Quindi la matrice è diagonalizzabile solo per $k = 0$.

Soluzione Esercizio 2.5.

(2.5.1) Sia $\tilde{f} : \{v_1, v_2, v_3\} \to \{v_1, 2v_2, 3v_3\}$, poiché v_1,v_2 e v_3 costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$ si ha che esiste un'unica f che estende $\tilde{f}$ a tutto $\mathbb{R}^3$.

(2.5.2) Poiché le immagini dei vettori della base $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente indipendenti si ha che f è suriettiva. Per quanto riguarda l'iniettività è sufficiente osservare che per ogni $v \in \mathbb{R}^3$ esistono coefficienti $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $v = av_1 + bv_2 + cv_3$. Da ciò segue che $f(v) = av_1 + 2bv_2 + 3cv_3$ dunque l'iniettività è immediata.

(2.5.3) Si noti che presi v_1, v_2, v_3 autovettori di f allora $f(v_i) = iv_i$ quindi $v_i = f^{-1}(f(v_i)) = if^{-1}(v_i)$ per $i = 1, 2, 3$. Da cui segue che v_1,v_2 e v_3 sono autovettori per f^{-1} con autovalori $1, \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$.

Soluzione Esercizio 2.6.

(2.6.1) La matrice associata alla conica è:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad A_{00} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Per "trasformare" $\mathcal{C}$ nella sua corrispondente forma canonica $\mathcal{D}$ abbiamo a disposizione una successione finita di isometrie.

Essendo A_{00} simmetrica, per il teorema spettrale, è possibile trovare una matrice ortogonale M tale ${}^tMA_{00}M$ sia diagonale.

Procediamo alla diagonalizzazione di A_{00}.
Il polinomio caratteristico di A_{00} è $P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 6)$. Pertanto A_{00} ha autovalori: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 6$.

Due autovettori corrispondenti sono:
$\overrightarrow{v_1} = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ e $\overrightarrow{v_2} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$. Essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $\|\overrightarrow{v_1}\| = 1 = \|\overrightarrow{v_2}\|$, tali vettori costituiscono una base diagonalizzante A_{00} e ortonormale per il prodotto scalare standard.

La matrice M cercata è dunque la matrice del cambiamento di base dalla base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ alla base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ (essa è infatti ortogonale, poiché è la matrice del cambiamento di base tra due basi ortonormali):

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

e se (x, y) e (x', y') sono le coordinate rispettivamente nella base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ e nella base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ si ha:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

In questo modo è definita un'isometria f di equazioni:

$$\begin{cases} x' = -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y \end{cases} .$$

L'isometria f trasforma $\mathcal{C}$ nella conica $f(\mathcal{C})$ di equazione:

$$(x')^2 + 6(y')^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}x' - \frac{8}{\sqrt{5}}y' - 3 = 0$$

Allo scopo di eliminare i termini di primo grado di tale equazione, consideriamo la generica traslazione t di vettore (α, β):

$$\begin{cases} x'' = x' + \alpha \\ y'' = y' + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x'' - \alpha \\ y' = y'' - \beta \end{cases} .$$

La conica trasformata $t(f(\mathcal{C}))$ ha equazione:

$$0 = (x'' - \alpha)^2 + 6(y'' - \beta)^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}(x'' - \alpha) - \frac{8}{\sqrt{5}}(y'' - \beta) - 3 =$$

$$(x'')^2 + 6(y'')^2 + (-2\alpha + + \frac{6}{\sqrt{5}})x'' + (-12\beta - \frac{8}{\sqrt{5}})y'' + \alpha^2 + 6\beta^2 - 3 - \frac{6}{\sqrt{5}}\alpha + \frac{6}{\sqrt{5}}\beta$$

Dobbiamo allora scegliere (α, β) in modo tale che:

$$\begin{cases} (-2\alpha + \frac{6}{\sqrt{5}}) = 0 \\ (-12\beta - \frac{8}{\sqrt{5}}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \beta = -\frac{2}{3\sqrt{5}} \end{cases}$$

Posto $\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}$ e $\beta = -\frac{2}{3\sqrt{5}}$, t è una traslazione di vettore $(\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}})$ e $t(f(\mathcal{C}))$ ha equazione:

$$(x'')^2 + 6(y'')^2 - \frac{16}{3} = 0$$

Dividendo per il termine noto troviamo la forma canonica congruente a $\mathcal{C}$:

$$(x'')^2 \frac{5}{16} + (y'')^2 \frac{15}{8} = 1$$

(2.6.2) • **Centro di simmetria**

Le coordinate (x_0, y_0) del centro di simmetria P_0 sono le soluzioni del seguente sistema:
$\begin{cases} -2 + 2x + 2y = 0 \\ -1 + 2x + 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$
Pertanto il centro di simmetria è il punto $(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$.

• **Assi di simmetria**

Gli assi di simmetria di $\mathcal{C}$ sono le rette s e t passanti per il centro di simmetria e aventi direzione data dai due autovettori associati agli autovalori di A_{00}.
Abbiamo visto nel punto (a) che $v_1 = (-2, 1)$ e $v_2 = (1, 2)$ sono due autovettori relativi rispettivamente a $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 6$.

Le rette s e t hanno allora equazioni:
$s: \begin{vmatrix} x - \frac{4}{3} & y + \frac{1}{3} \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 2y - \frac{2}{3} = 0$
$t: \begin{vmatrix} x - \frac{4}{3} & y + \frac{1}{3} \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - y - \frac{5}{3} = 0$
Notiamo che essendo i vettori di direzione ortogonali, le rette s e t sono perpendicolari.

• **Vertici**

I quattro vertici di $\mathcal{C}$, P_1, P_2, P_3 e P_4, sono le intersezioni di $\mathcal{C}$ con gli assi di simmetria:
$\begin{cases} x + 2y - \frac{2}{3} = 0 \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} x = -2y + \frac{2}{3} \\ 2(-2y + \frac{2}{3})^2 + 4(-2y + \frac{2}{3})y + 5y^2 - 4(-2y + \frac{2}{3}) - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} x = -2y + \frac{2}{3} \\ 45y^2 + 30y - 43 = 0 \end{cases} \Rightarrow P_1 = (\frac{4}{3} - \frac{8\sqrt{15}}{15}, -\frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{15}}{15})$, $P_2 = (\frac{4}{3} + \frac{8\sqrt{15}}{15}, -\frac{1}{3} - \frac{4\sqrt{15}}{15})$
$\begin{cases} 2x - y - \frac{5}{3} = 0 \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x - \frac{5}{3} \\ 2x^2 + 4x(2x - \frac{5}{3}) + 5(2x - \frac{5}{3})^2 - 4x - 2(2x - \frac{5}{3}) - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x - \frac{5}{3} \\ 135x^2 - 216x + 64 = 0 \end{cases} \Rightarrow P_3 = (\frac{4}{5} - \frac{4\sqrt{21}}{45}, -\frac{1}{15} - \frac{8\sqrt{21}}{45})$, $P_4 = (\frac{4}{5} + \frac{4\sqrt{21}}{45}, -\frac{4}{15} + \frac{8\sqrt{21}}{45})$

Soluzione Esercizio 2.7.

(2.7.1) Osserviamo che se $x \in \ker(f)$ allora $b(x, y) = b(f(x), f(y)) = (0, f(y)) = 0$ per ogni $y \in V$. Dunque $x \in \ker(b)$, cioè $\ker(f) \subset \ker(b)$. In particolare, se b è non degenere allora $\ker b = 0$ e dunque anche $ker f = 0$ cioè f è iniettiva.

(2.7.2) Si ha che

$$rg(f) = \dim(V) - \dim(\ker f) \geq \dim(V) - \dim(\ker\ b) = rg(b)$$

Soluzione Esercizio 2.8.

(2.8.1) La matrice associata alla conica è:

$$A_t = \begin{pmatrix} -3 & -1-t & 0 \\ -1-t & t^2 & t \\ 0 & t & t^2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A_{t00} = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix}$$

Per prima cosa determiano i valori di t per cui Γ_t è a centro:

$\det(A_{00t}) = t^4 - t^2 = t^2(t^2-1) = t^2(t+1)(t-1) \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 0, \pm 1$.
Determiniamo quindi per $t \neq 0, \pm 1$ le coordinate del centro $C_t = (x_t, y_t)$, soluzioni del seguente sistema:

$\begin{cases} -1 - t + t^2x + ty = 0 \\ tx + t^2y = 0 \end{cases} \overset{t\neq 0}{\Rightarrow} \begin{cases} -1 - t - t^3y + ty = 0 \\ x = -ty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-t^3+t)y = 1+t \\ x = -ty \end{cases} \overset{t\neq 0,\pm 1}{\Rightarrow}$
$\overset{t\neq 0,\pm 1}{\Rightarrow} \begin{cases} y = \frac{1+t}{(-t^3+t)} = -\frac{1}{t(t-1)} \\ x = -ty = \frac{1}{t-1} \end{cases} \Rightarrow C_t = (\frac{1}{t-1}, -\frac{1}{t(t-1)})$

Ne segue che le coordinate di C_t risolvono le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t-1} \\ y = -\frac{1}{t(t-1)} \end{cases}$$

Eliminando il parametro t, ricaviamo da quest'ultime l'equazione cartesiana, osservando che $x \neq 0 \, \forall t \in \mathbb{R}$ e che, essendo $t \neq 0, \pm 1$, $x \neq -1, -\frac{1}{2}$; in particolare dalla seconda equazione ricaviamo:

$x = \frac{1}{t-1} \Rightarrow (t-1)x = 1 \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} t = \frac{1+x}{x}$

Sostituendo dunque l'espressione di t in funzione di x nella prima equazione, si ottiene:

$y = -\frac{1}{t(t-1)} = -\frac{x^2}{1+x} \Rightarrow (1+x)y = -x^2 \Rightarrow x^2 + xy + y = 0$.

Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione $x^2 + xy + y = 0$.
Verifichiamo che effettivamente $C_t \in \mathcal{C} \, \forall t \in \mathbb{R}$:

$\left(\frac{1}{t-1}\right)^2 + \left(\frac{1}{t-1}\right)\left(-\frac{1}{t(t-1)}\right) - \frac{1}{t(t-1)} = \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{t(t-1)^2} - \frac{1}{t(t-1)} = \frac{t-1-t+1}{t(t-1)^2} = 0.$

Pertanto $\mathcal{C} : x^2 + xy + y = 0$ è la conica cercata.

(2.8.2) La matrice associata alla conica $\mathcal{C}$ è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = -\frac{1}{4}$;

$\det(A_{00}) = -\frac{1}{4}$.

Ne segue che $\mathcal{C}$ è un'iperbole non degenere.

Determiniamo centro e assi di simmetria.

- **Centro di simmetria**
  Le coordinate (x_0, y_0) del centro di simmetria P_0 sono le soluzioni del seguente sistema:

  $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

  Pertanto il centro di simmetria è il punto $P_0 = (-1, 2)$.

- **Assi di simmetria**
  Gli assi di simmetria di $\mathcal{C}$ sono le rette s e t passanti per il centro di simmetria e aventi direzione data dai due autovettori associati agli autovalori di A_{00}.

  $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{2}),\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$

  Gli autospazi corrispondenti sono $V_{\lambda_1} = \langle (1+\sqrt{2}, 1) \rangle$ e $V_{\lambda_2} = \langle (1-\sqrt{2}, 1) \rangle$; pertanto $v_1 = (1+\sqrt{2}, 1)$ e $v_2 = (1-\sqrt{2}, 1)$ sono due autovettori relativi rispettivamente a λ_1 e λ_2.
  Le rette s e t hanno allora equazioni:

$$s : \begin{vmatrix} x+1 & y-2 \\ 1+\sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - (1+\sqrt{2})y + 3 + 2\sqrt{2} = 0$$
$$t : \begin{vmatrix} x+1 & y-2 \\ 1-\sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - (1-\sqrt{2})y + 3 - 2\sqrt{2} = 0$$

(2.8.3) Determiniamo l'isometria f attraverso il metodo di riduzione a forma canonica.

- **Passo 1: Eliminazione del termine misto** $2a_{12}xy$

$$A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Essendo A_{00} simmetrica, è possibile trovare una matrice $M \in GL_2(\mathbb{R})$ tale ${}^tMA_{00}M$ sia diagonale.

Diagonalizziamo A_{00} con il metodo induttivo:

Sia F la forma bilineare associata a A_{00}.
$\overrightarrow{e_1} = (1,0)$ è un vettore non isotropo essendo $F(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) = 1$. Pertanto $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1}$ costituirà il primo vettore della base nostra diagonalizzante:

Allora $\mathbb{R}^2 = \langle \overrightarrow{v_1} \rangle \oplus \overrightarrow{v_1}^\perp$, dove

$\overrightarrow{v_1}^\perp = \left\{ \overrightarrow{w} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 | F(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w}) = 0 \right\}$.

$F(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + \frac{1}{2}y = 0$

Pertanto $\overrightarrow{v_1}^\perp = \left\{ \overrightarrow{w} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + \frac{1}{2}y = 0 \right\}$.

$\overrightarrow{v_2} = (-1,2) \in \overrightarrow{v_1}^\perp$ e $F(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}) = 1$. Essendo $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ entrambi non isotropi e ortogonali tra loro, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ è una base diagonalizzante per F e quindi per A_{00}.

La matrice M cercata è dunque la matrice del cambiamento di base dalla base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ alla base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e se (x,y) e (x',y') sono le coordinate rispettivamente nella base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ e nella base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ si ha:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

In questo modo è definita un'affinità f_1 di equazioni:

$$\begin{cases} x = x' - y' \\ y = 2y' \end{cases}$$

Per trovare l'equazione della conica $\mathcal{C}_1 = f_1(\mathcal{C})$ affinemente equivalente a $\mathcal{C}$ tramite l'affinità f_1 sostituiamo nell'equazione di $\mathcal{C} : x^2 + xy + y = 0$, al posto della x e della y, le nuove espressioni in funzione di x' e y' date da f_1:

$(x' - y')^2 + (x' - y')2y' + 2y' = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1 : (x')^2 - (y')^2 + 2y' = 0$

- **Passo 2: Eliminazione dei termini di primo grado**

A partire dall'equazione di $\mathcal{C}_1$, applichiamo il metodo del raccoglimento dei quadrati:

$(x')^2-(y')^2+2y'=0 \Rightarrow (x')^2-(y')^2+2y'-1+1=0 \Rightarrow (x')^2-(y'-1)^2+1=0$

Quindi se applichiamo a $\mathcal{C}_1$ la traslazione f_2:

$$\begin{cases} x''=x' \\ y''=y'-1 \end{cases}$$

si ottiene la conica $\mathcal{C}_2=f_2(\mathcal{C}_1)$ affinemente equivalente a $\mathcal{C}_1$ di equazione:

$$\mathcal{C}_2:(x'')^2-(y'')^2+1=0$$

Per ottenere l'equazione della forma canonica $\mathcal{C}':X^2-Y^2=1$ affinemente equivalente a $\mathcal{C}$ rimane un'ultima trasformazione (f_3) da applicare, quella definita dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x''=Y \\ y''=X \end{cases}$$

Ricapitolando, nei vari passi abbiamo applicato a $\mathcal{C}$ le affinità f_1, f_2 e f_3, definite dalle seguenti equazioni:

$$f_1:\begin{cases} x=x'-y' \\ y=2y' \end{cases} \qquad f_2:\begin{cases} x''=x' \\ y''=y'-1 \end{cases} \qquad f_3:\begin{cases} x''=Y \\ y''=X \end{cases}$$

Si ha:

$\mathcal{C}'=f_3(\mathcal{C}_2)=f_3(f_2(\mathcal{C}_1))=f_3(f_2(f_1(\mathcal{C}))) \Rightarrow \mathcal{C}'=f_3\circ f_2\circ f_1((\mathcal{C}))$.

Sia $f=f_3\circ f_2\circ f_1$, allora $\mathcal{C}'=f(\mathcal{C})$; determiniamo le equazioni di f componendo f_1, f_2 e f_3:

$$\begin{cases} x=x'-y' \\ y=2y' \end{cases} \overset{f_2}{\Rightarrow} \begin{cases} x=x''-y''-1 \\ y=2y''+2 \end{cases} \overset{f_3}{\Rightarrow} \begin{cases} x=Y-X-1 \\ y=2X+2 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

da cui f ha equazioni:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2.8.4) Per trovare il sistema di riferimento richiesto sarà sufficiente determinare le immagini della base canonica e dell'origine attraverso f. Quindi si avrà:

$$\tilde{e_1}=(1,-1) \quad \tilde{e_2}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) \quad \tilde{O}=(0,-1)$$

Soluzione Esercizio 2.9. Poiché i vettori di U e di W sono linearmente dipenenti si avrà $\dim U$, $\dim W\le 3$; inoltre, si può facilmente provare che $U=\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$ e $W=\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$. Quindi $\dim U=\dim W=2$.

$U\cap V=\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$ dunque $\dim U\cap W=1$.

Infine, per la formula di Grassman, $\dim\,(U+W)=3$ indi per cui una base di $U+W$ è data da qualsiasi terna di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione Esercizio 2.10.

(2.10.1) È immediato verificare che la retta $\mathcal{R}$ altri non è che $\langle e_3\rangle$. Si ha quindi che il piano $\mathcal{P}$ è il sottospazio vettoriale $\mathcal{P}=\langle v_1,v_3\rangle$, dove $v_1:=e_3$, $v_2:=\overrightarrow{OA}$. Se $\mathcal{H}$ è un altro piano contenente la retta $\mathcal{R}$ e il punto A. Sicuramente, si dovrà avere $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{H}$. Ma $\dim\mathcal{P}=2=\dim\mathcal{H} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{P}=\mathcal{H}$. Abbiamo allora ottenuto che

$$\mathcal{P}=\{\alpha v_1+\beta v_2 \;:\; \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=\left\{\begin{pmatrix} 3\beta \\ 4\beta \\ \alpha \end{pmatrix} \;:\; \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$$

Cioè, se $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$, allora $\exists \alpha, \beta$ tali che:

$$\begin{cases} X = 3\beta = \frac{3}{4}Y \\ Y = 4\beta \\ Z = \alpha \end{cases}$$

Abbiamo così ottenuto che l'equazione cartesiana del piano è

$$\mathcal{P}: \quad X - \frac{3}{4}Y = 0$$

(2.10.2) Per verificare che i punti O, A, B sono i vertici di un quadrato, proviamo prima di tutto che i vettori $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ sono ortogonali, oppure $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AB}$ oppure $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}$. Poiché da un calcolo diretto si ricava immediatamente che

$$\left\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \right\rangle = 0$$

abbiamo fatto. Inoltre, i vettori $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ hanno la stessa lunghezza; quindi i punti O, A, B costituiscono tre dei vertici di un quadrato $\mathcal{Q}$. Per vedere che $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$, è sufficiente notare che i vettori $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ sono contenuti in $\mathcal{P}$. Il punto C che completa il quadrato altri non è che il punto $C\,(3, 4, 5)$, come si verifica immediatamente

(2.10.3) Il centro del quadrato è il punto $D\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$. Si può facilmente verificare che l'intersezione del piano $\mathcal{P}$ con la sfera

$$\mathcal{S}: \qquad \left(X - \frac{3}{2}\right)^2 + (Y-2)^2 + \left(Z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

non è altri che la circonferenza di centro D e raggio $\frac{5}{2}$, *i.e.* la circonferenza circoscritta al quadrato $\mathcal{Q}$

Soluzione Esercizio 2.11.

(2.11.1) In primo luogo osserviamo che $\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \}$ è una base di $\mathbb{R}^3$; quindi, per determinare una base dell'immagine sarà sufficiente guardare lo spazio generato dalle immagini di questi vettori.
Per ogni valore di k si ha che la dimensione dell'immagine è minore o uguale di 2. Se $k \neq 0$ allora una base dell'immagine è $\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2-2k \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -7-k \\ 8 \end{pmatrix} \}$; se $k = 0$ una base è data da $\{ \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \}$.
Per il teorema di nullità più rango, la dimensione del nucleo è uguale ad 1 ed è generato da:

(a) $k \neq -5/3$ e $k \neq 0 \qquad Ker(F) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

(b) $k = -5/3$ e $k = 0 \qquad Ker(F) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

(2.11.2) Sia A la matrice associata all'applicazione F rispetto alla base $\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \}$. Il polinomio caratteristico di A, $P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + 12\lambda + 80)$, ha tre radici reali distinte; dunque l'operatore lineare F è diagonalizzabile.
La base $\mathcal{B}$ costituita dagli autovettori associati agli autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 6 + 2\sqrt{29}$ e $\lambda_3 = 6 - 2\sqrt{29}$, *i.e.*

$$\mathcal{B} := \{ v_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} -16 \\ 7-\sqrt{29} \\ 2-2\sqrt{29} \end{pmatrix}, v_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} -16 \\ 7+\sqrt{29} \\ 2+2\sqrt{29} \end{pmatrix} \}$$

è tale per cui la matrice associata ad F rispetto a $\mathcal{B}$ è diagonale.

Soluzione Esercizio 2.12.

(2.12.1) Presi comunque $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(A+B) = (A+B)X = AX+BX = \varphi(A)+\varphi(B)$ e $\varphi(\lambda A) = (\lambda A)X = \lambda(AX) = \lambda\varphi(A)$ dimostrano la linearità di φ.
Inoltre,

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2.12.2) $\det(M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\varphi)) = 1$ allora, per il teorema di nullità più rango, φ è un automorfismo e $M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\varphi^{-1}) = (M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\varphi))^{-1}$.

Soluzione Esercizio 2.13. I polinomi $f(T)$, $g(T)$ e $h(T)$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}_{\leq 3}[T]$ dunque preso $W := \langle f(T), g(T), h(T)\rangle$ si ha che W è il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}_{\leq 3}[T]$ contenente $f(T)$, $g(T)$ e $h(T)$; inoltre, se U è un sottospazio di $\mathbb{R}_{\leq 3}[T]$ contente $f(T)$, $g(T)$ e $h(T)$ sicuramente $U \supseteq W$ allora $\dim U \geq \dim W$, da cui $U = W$ oppure $U = \mathbb{R}_{\leq 3}[T]$.
Per completare la base di W ad una base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[T]$ in due modi distinti è sufficiente scegliere $q_1(T), q_2(T) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[T]$, $q_1(T) \neq q_2(T) \neq 0$ tali che

$$W \oplus \langle q_1(T)\rangle = \mathbb{R}_{\leq 3}[T] = W \oplus \langle q_2(T)\rangle .$$

Ad esempio prendiamo $q_1(T) := 1 + T^3$ e $q_2(T) := 1 + T^2$.

Soluzione Esercizio 2.14. Si ha che $I = (MCD(f, g)) = (X^3 - X)$ e $J = (mcm(f, g)) = (X^2(X^4 - 1)(X^3 - 1))$ e poichè entrambi i generatori non sono irriducibili $\frac{\mathbb{Q}[X]}{I}$ e $\frac{\mathbb{Q}[X]}{J}$ non sono campi.

Soluzione Esercizio 2.15. E' ben noto che il centro di un p-gruppo è non banale (Equazione delle classi). Si ha $|Z(G)| = p$ oppure $|Z(G)| = p^2$.
Supponiamo che $|Z(G)| = p$, allora sia $x \in G \setminus Z(G)$ e $x \neq 0$ allora $Z(G) \subset C(x) \subset G$ quindi poichè la prima inclusione è stretta si deve avere che $|C(x)| = p^2$ cioè $C(x) = G$, ma ciò è assurdo poichè $x \notin Z(G)$. Dunque $Z(G) = G$.

Soluzione Esercizio 2.16. Per quanto riguarda il punto (i) e (ii) è sufficiente applicare la definizione.
Dimostriamo l'asserto facendo vedere che $\frac{A}{B}$ è un campo. Sia $\phi : A \to \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ tale che $\phi(a + ib\sqrt{2}) := [a]_2$. Si ha che $B = Ker(\phi)$ dunque per il teorema di omomorfismo $\frac{A}{B} \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$.

Soluzione Esercizio 2.17.

(2.17.1) Si ha che $a + 1 = (a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1 = a + 2a + 1$ da cui $2a = 0$;

(2.17.2) $ab(a + b) = a^2b + ab^2 = 2ab = 0$;

(2.17.3) Facciamo vedere che preso comunque un ideale primo P e $a, b \notin P$ si ha che $a + P = b + P$ in questo modo il quoziente $\frac{A}{P}$ consterà di soli due elementi cioè sarà isomorfo a $\mathbb{F}_2$ che è un campo e quindi P è massimale. Siano $a \neq b$ allora dal punto (ii) $ab(a + b) = 0$ quindi $ab(a + b) \in P$, ma $ab \notin P$ e quindi per la primalità di P si ha che $a + b \in P$ da cui $a + P = b + P$.

Soluzione Esercizio 2.18.

(2.18.1) Per calcolare il grado dell'ampliamento sarà sufficiente esibire il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$. E' facile vedere che α è radice del polinomio $f(X) = X^4 - 4X^2 + 1$,inoltre tale polinomio è irriducibile su $\mathbb{Q}$; infatti il polinomio non ha radici su $\mathbb{Q}$ e non si può spezzare come prodotto di due polinomi monici di grado 2. Dunque il grado dell'ampliamento è 4;

(2.18.2) Una base di tale ampliamento è data da $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$;

(2.18.3) Tale inclusione è data dal fatto che $\alpha^2 - 2 = \sqrt{3}$;

(2.18.4) Utilizzando il teorema di moltiplicatività del grado si ha che $4 = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})][\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})]$
.

Soluzione Esercizio 2.19.

(2.19.1) $\ker(\phi) = ((X - 2)(X + 3))$, $Im(\phi) = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$;

(2.19.2) Non è integro perchè $(X - 2)$ e $(X + 3)$ non appartengono a $\ker(\phi)$ quindi $(X - 2) + Ker(\phi) \neq \ker(\phi) \neq (X + 3) + \ker(\phi)$ ma $(X - 2)(X + 3) + \ker(\phi) = \ker(\phi)$;

(2.19.3) $\frac{\mathbb{Q}[\mathbb{X}]}{Ker(\phi)} \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

Soluzione Esercizio 2.20.

(2.20.1) Supponiamo per assurdo che esista un elemento di norma 2, sia esso $x = a + b\sqrt{-7}$. Si ha:

$$2 = N(x) = a^2 + 7b^2.$$

Se $a = 0$ allora $7b^2 = 2$, ma ciò è assurdo.
Se $b = 0$ allora $a^2 = 2$ e ciò è ancora un assurdo. Infine se $a, b \geq 1$ si ha che $2 = N(x) \geq 8$, assurdo.

(2.20.2)
- 2 è irriducibile: supponiamo $2 = (a + \sqrt{-7}b)(c + \sqrt{-7}d)$ allora $4 = N(2) = N((a+\sqrt{-7}b)(c+\sqrt{-7}d)) = N(a+\sqrt{-7}b)N(c+\sqrt{-7}d)$ quindi se entrambi non fossero invertibili si avrebbe che $2 = N(a + \sqrt{-7}b) = N(c + \sqrt{-7}d)$ ASSURDO
- $1+\sqrt{-7}$ è irriducibile: supponiamo che $1+\sqrt{-7} = (a+\sqrt{-7}b)(c+\sqrt{-7}d)$ $8 = N(1+\sqrt{-7}) = N((a+\sqrt{-7}b)(c+\sqrt{-7}d)) = N(a+\sqrt{-7}b)N(c+\sqrt{-7}d)$.Se entrambi fossero non invertibili si avrebbe che almeno uno dei due ha norma 2 contraddicendo il punto (i).
- Si procede come nel caso di $1 + \sqrt{-7}$.

Inoltre $2, 1 + \sqrt{-7}$ e $1 - \sqrt{-7}$ non sono primi in quanto: $2|8 = (1 + \sqrt{-7})(1 - \sqrt{-7})$ ma $2 \nmid (1 + \sqrt{-7})$ e $2 \nmid (1 - \sqrt{-7})$, $(1 \pm \sqrt{-7})|8 = 4 \cdot 2$ ma $(1 \pm \sqrt{-7}) \nmid 2$ e $(1 \pm \sqrt{-7}) \nmid 4$ per motivi di norma.

(2.20.3) Per quanto visto sopra l'elemento cercato è 8.