Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2010/2011

Tutorato PFB

Tutore : Roberto Feola

TUTORATO 2 (17 GENNAIO 2011)

GRUPPO 1 (Analisi)

<u>ESERCIZIO 1.</u>Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni continue non negative, e si supponga che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 0$$

Tenendo presente che $0 \le 1 - e^{-t} \le t$ per $t \ge 0$, si dimostri che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 [1 - e^{-f_n(x)}]\mathrm{d}x = 0.$$

<u>ESERCIZIO 2.</u> Calcolare i limiti seguenti.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{n-2}{n^2+3}\right)^{\frac{n^3-1}{n^2+1}}, \qquad \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \sqrt{1 - \sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right)$$

<u>ESERCIZIO 3.</u>Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int_A xy(x^4 - y^4)\log(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, y \ge 0, 1 \le x^2+y^2 \le 2, 0 \le x^2 - y^2 \le 1\right\}.$$

Potrebbe essere utile il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x^2 - y^2 \end{cases}$$

<u>ESERCIZIO 4.</u> Sia $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t.$$

(i) Si verifichi che

$$f(x) = \int_e^{e^x} \frac{1}{\log t}\mathrm{d}t \qquad \forall x \in (0,+\infty)$$

(ii) Si dimostri che f è continua crescente e si dica per quali $x \in \mathbb{R}_+$ si ha $f(x) \ge 0$.
(iii) Si dimostri che, se $x \ge 1$, allora

$$\frac{e^x - e}{x} \le f(x) \le e^x - e$$

mentre, se $x \in (0,1]$,

$$e\log x \le f(x) \le (1+x)\log(x).$$

(iv) Si calcolino i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} f(x), \qquad \lim_{x\to 0^+} x f(x).$$

<u>ESERCIZIO 5.</u> Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\alpha x^4$$

dove α è un parametro. Al variare di α in $\mathbb{R}$ si risponda alle seguenti domande.

(i) Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -V'(x), \end{cases}$$

dove $V'(x) = \mathrm{d}V(x)/\mathrm{d}x$, e se ne discuta la stabilità.
(ii) Determinare i valori dell'energia $E = E(\alpha)$ in corrispondenza dei quali le traiettorie sono periodiche. In particolare si verifichi che per $\alpha \geq 0$ tutte le traiettorie, che non siano punti di equilibrio, sono periodiche.
(iii) Per $\alpha \geq 0$ si scriva il periodo come integrale definito (in funzione dell'energia E), e si dimostri che per $\alpha = 0$ esso non dipende da E.

GRUPPO 2 (Geometria)

<u>ESERCIZIO 1.</u>Risolvere, al variare del parametro reale m, il sistema lineare

$$\begin{cases} my + (m-2)z = -2 \\ mx + y + 2z = 1 \\ mx + 3z = 1 \end{cases}$$

<u>ESERCIZIO 2.</u>Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & h & h \\ 1 & h^2 - h & 1 \\ h-1 & 0 & h-1 \end{pmatrix}$$

con h parametro reale.
(i) Trovare i valori di h per cui A ha rango minore di 3.
(ii) Stabilire se, posto $h = 1$, A è diagonalizzabile.

<u>ESERCIZIO 3.</u> Esiste un'affinità f del piano $\mathbf{A}^2$ con le seguenti proprietà?
Giustificare la risposta.
$f(-1, \frac{5}{2}) = (2, 1)$; $f(2, 4) = (-2, -3)$; $f(-1, -\frac{3}{2}) = (0, 0)$; $f(2, 0) = (1, -1)$.

<u>ESERCIZIO 4.</u>Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$x^2 - y^2 - 2\sqrt{3}xy + 2(1+\sqrt{3})x + 2(1-\sqrt{3})y - 8 + 2\sqrt{3} = 0$$

<u>ESERCIZIO 5.</u> Sia $\mathcal{K}$ l'insieme di tutte le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

(i) Mostrare che $\mathcal{K}$ è un campo.
(ii) Determinare esplicitamente un polinomio irriducibile $f(X)$ dell'anello dei polinomi $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ ed un isomorfismo tra l'anello quoziente $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/(f(X))$ e $\mathcal{K}$.
(iii) Il gruppo moltiplicativo $\mathcal{K}^*$ degli elementi non nulli del campo $\mathcal{K}$ forma un gruppo ciclico di ordine 8. Determinarne esplicitamente un generatore.