

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI S.M.F.N.

Tesi di Laurea in Matematica
presentata da Margherita Canu

Gruppi finiti di isometrie

Relatore
Prof. Andrea Bruno

Il Candidato fill Il Relatore
Margherita Canu fill Prof. Andrea Bruno

ANNO ACCADEMICO 2005-2006

Classificazione: 51F15, 20-03
Parole chiave: Symmetries, Euler's Theorem

Indice

Introduzione	ii
1 I poligoni	
Il teorema di Leonardo	1
1.1 I movimenti rigidi nel piano	1
1.2 I gruppi diedrali	3
1.3 Il teorema di Leonardo	8
2 I Solidi Platonici	
Spazio e Simmetrie	10
2.1 I movimenti rigidi nello spazio	10
2.2 I solidi Platonici e teorema di Cayley	13
2.3 Formula d'Eulero e Teorema di Teeteto	19
2.4 I gruppi di simmetrie finiti nello spazio	24
2.5 ... Nell'arte	35
Bibliografia	46

Introduzione

Questa tesi si occupa dei gruppi finiti di simmetrie nel piano e nello spazio. Essi sono legati all'esistenza di figure piane e solide regolari, che per questo motivo hanno trovato nel corso dei secoli spazio nell'arte. Nel primo capitolo ho affrontato i gruppi finiti di simmetria nel piano. Le trasformazioni piane fondamentali, che danno significato e valore alla simmetria delle figure sono le *isometrie*: corrispondenze biunivoche che conservano la distanza di coppie di punti corrispondenti (e quindi anche l'angolo fra direzioni corrispondenti). Dopo una breve descrizione dei gruppi diedrali ho enunciato il Teorema di Chasles sulla classificazione delle isometrie del piano:
i movimenti del piano sono: le traslazioni, le rotazioni, le riflessioni o le glisso-riflessioni. Le traslazioni e le rotazioni non alterano l'orientazione delle figure (sono pari o destrorse), le riflessioni e le glisso-riflessioni alterano l'orientazione delle figure (sono isometrie dispari o sinistrorse). E' interessante osservare che dal teorema di classificazione delle isometrie piane si possono ottenere direttamente dei risultati non banali: ad esempio che la composizione di rotazioni non potrà mai essere una riflessione (perché la composizione di due isometrie pari è ancora pari) mentre con due riflessioni si può ottenere una rotazione o anche, come caso particolare, una traslazione. In chiusura del capitolo ho esposto e dimostrato il Teorema di Leonardo:
un gruppo finito di isometrie è un gruppo ciclico C_n o un gruppo diedrale D_n .

Analogamente al caso 2-dimensionale nel secondo capitolo ho affrontato il problema della classificazione dei gruppi finiti di simmetrie. Innanzitutto ho dimostrato che ogni siffatto gruppo ha un punto fisso; poi ho studiato l'esistenza dell'analogo dei poligoni regolari: esistono cinque solidi regolari convessi, il *tetraedro* (quattro facce triangolari), *cubo* (sei facce quadrate), *ottaedro* (otto facce triangolari), *icosaedro* (venti facce triangolari), *dodecaedro* (dodici facce pentagonali). Il gruppo delle simmetrie del tetraedro è isomorfo a A_4 . Il cubo e l'ottaedro hanno i gruppi di simmetria rotazionali entrambi isomorfi a S_4 . Il cubo e il dodecaedro hanno i gruppi rotazionali di simmetria isomorfi a A_5 . Questo non è un caso perchè ogni gruppo finito tramite il Teorema di Cayley, è un sottogruppo di S_n .

Per classificare i poliedri regolari ho anche esposto un semplice Teorema che è conosciuto come Formula d'Eulero:

se un poliedro convesso ha v vertici, e spigoli, e f facce allora: $v - e + f = 2$

La formula collega i numeri degli spigoli, dei vertici e delle facce in un poliedro semplicemente connesso garantendo la consistenza di un volume.

Tutti questi risultati sono riassunti nel Teorema di Teeteto:

ci sono esattamente cinque poliedri regolari. Il gruppo delle simmetrie del cubo è il gruppo di simmetrie dell'ottaedro regolare. Il gruppo delle simmetrie del dodecaedro regolare è il gruppo delle simmetrie dell'icosaedro. Il gruppo delle simmetrie dell'icosaedro contiene il gruppo delle simmetrie di un ottaedro regolare, il quale, contiene il gruppo delle simmetrie del tetraedro regolare.

Nel penultimo paragrafo mi sono dedicata alla classificazione prima unicamente dei gruppi finiti rotazionali e poi a tutti i gruppi finiti dello spazio esponendo e dimostrando il Teorema di Hessel.

E per finire, poichè i solidi Platonici hanno affascinato nei secoli non solo scienziati ma anche artisti e filosofi ho riportato uno studio condotto da Michele Emmer sul rapporto tra arte e matematica.

Capitolo 1

I poligoni Il teorema di Leonardo

Apri il capitolo un breve paragrafo che raccoglie alcuni fatti principali sulle isometrie piane che utilizzeremo nel seguito.

Cominceremo con lo studio dei gruppi di simmetria dei poligoni, mostrando che il gruppo diedrale D_n è il gruppo di simmetria di un poligono regolare di n lati e che il gruppo di simmetria di un qualunque poligono di n lati è sottogruppo del gruppo diedrale D_n ; analizzeremo quindi come si possono classificare i poligoni di un fissato numero di lati rispetto alla loro simmetria.

In chiusura del capitolo dimostro che gli unici gruppi finiti sono i gruppi ciclici e i gruppi diedrali.

1.1 I movimenti rigidi nel piano

Definizione 1.1.1 Si dice *isometria o movimento rigido del piano* una trasformazione del piano in sé che conserva le distanze.

L'insieme di tutte le isometrie del piano costituisce un esempio di gruppo di trasformazioni. Sia $X = \mathbb{R}^2$ il piano ordinario dove si sia fissato un sistema di riferimento cartesiano. Sono isometrie:

1. Le *traslazioni* T del piano in sé, cioè le corrispondenze biunivoche sui punti (x, y) del piano definite dalle

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

2. Le *riflessioni* di $\mathbb{R}^2$ in sé, cioè le trasformazioni del tipo

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta - y \cos \theta \end{cases}$$

E' facile vedere che applicando due volte una tale trasformazione si ottiene l'identità.

3. Le *rotazioni*, cioè le corrispondenze

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

Tutte queste trasformazioni complessivamente si possono rappresentare con le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \cos \theta + \alpha \\ y' = \varepsilon x \sin \theta - \varepsilon y \cos \theta + \beta \end{cases}$$

dove $\varepsilon = \pm 1$.

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \varepsilon \sin \theta & -\varepsilon \cos \theta \end{pmatrix}$$

è una matrice *ortogonale*. Il suo determinante vale ± 1 .

Definizione 1.1.2 *La composizione di una traslazione e di una riflessione genera una glisso-riflessione.*

- Ogni isometria piana è composizione di al più tre riflessioni.
- Particolari isometrie sono i *ribaltamenti* (prodotto di un numero dispari di simmetrie) e gli *spostamenti* (prodotto di un numero pari di simmetrie).
- Un'isometria con tre punti allineati è l'identità;
un'isometria, diversa dall'identità, con due punti uniti distinti è un ribaltamento;
- un'isometria (non identica) diretta:
se ha punti fissi è una rotazione;
se non ha punti fissi è una traslazione;
- un'isometria (non identica) inversa:
se ha punti fissi è una riflessione;
se non ha punti fissi è una glisso-riflessione.

Il risultato fondamentale sulla classificazione delle isometrie piane è il seguente Teorema.

Teorema 1.1.1 (di Chasles 1793-1880) *I movimenti del piano sono: le traslazioni, le rotazioni, le riflessioni o le glisso-riflessioni.*

Le isometrie piane formano un gruppo, *non* commutativo, che indichiamo con $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$.

Le traslazioni formano un sottogruppo normale, commutativo, di $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$.

Le isometrie dirette formano un sottogruppo, *non* commutativo, di indice due in $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$.

1.2 I gruppi diedrali

Sia data una figura nel piano. I movimenti rigidi (isometrie) che la mutano in sé corrispondono alle simmetrie della figura stessa.

Si pensi alla figura.

Ribaltando il rettangolo rispetto a ciascuna delle rette continue, il rettangolo

Figura 1.1:

viene mutato in sé. E' facile vedere che l'insieme dei movimenti che muta in sé il rettangolo è costituito da quattro elementi: l'identità e (ossia il movimento che non muove nulla), il ribaltamento r_h rispetto all'asse continuo orizzontale, il ribaltamento r_v rispetto all'asse continuo verticale, e infine la rotazione r in senso antiorario di π attorno al centro del rettangolo. L'insieme di questi movimenti

Figura 1.2:

rigidi forma un gruppo (di trasformazioni), come si verifica immediatamente. Tale gruppo prende il nome di *gruppo di Klein* e si indica anche con una lettera V , (da vier=quattro). La sua tavola di moltiplicazione è rappresentata in figura 1.2.

Se anziché partire da un rettangolo, si parte da un quadrato, saranno di più

Figura 1.3:

i movimenti che si possono fare senza mutare la figura, cioè sono maggiori le simmetrie della figura. In questo caso (figura sotto) il gruppo dei movimenti rigidi che mutano in sé il quadrato è costituito dall'identità, dalle tre rotazioni in senso antiorario ($\pi/2$, di $3\pi/2$ rispettivamente), e dai quattro ribaltamenti (rispetto alle due rette orizzontale e verticale e alla due diagonali). Si consideri ora il gruppo che indicheremo con D_3 , dei movimenti rigidi (isometrie) che mutano in se un triangolo equilatero. I possibili movimenti sono (si veda figura sotto):

r_1 =rotazione di $2\pi/3$,

r_2 =rotazione di $4\pi/3$,

r_0 =rotazione identica;

inoltre i tre ribaltamenti s_1, s_2, s_3 rispetto i tre assi di simmetria del triangolo. La tavola di moltiplicazione di questo gruppo è quella rappresentata nella tabella che segue.

Si vede facilmente che questa tavola coincide con la tavola di moltiplicazione di S_3 , non appena si ponga

$r_1=(1,2,3)$

$r_2=(1,3,2)$

Figura 1.4:

Figura 1.5:

$$s_1=(2,3)$$

$$s_2=(1,3)$$

$$s_3=(1,2)$$

cioè non appena si faccia corrispondere ad ogni movimento rigido la corrispondente permutazione dei vertici del triangolo. Quindi il gruppo dei movimenti che mutano in sé un triangolo equilatero si può identificare con il gruppo S_3 , la corrispondenza essendo data associando ad ogni movimento rigido che muta in sé il triangolo la corrispondente permutazione dei vertici. Tale gruppo rientra in una classe importante di gruppi, la classe *dei gruppi diedrali*.

Definizione 1.2.1 *Dicesi gruppo diedrale D_n il gruppo dei movimenti rigidi che mutano in sé un poligono di n lati.*

Vediamo, in generale di studiare D_n . Esso possiede n rotazioni $r_{k(2\pi/n)}$, $k = 1, \dots, n$, attorno al centro del poligono, corrispondenti agli angoli

$$2\pi/n, 4\pi/n, 6\pi/n, \dots, k^2\pi/n, \dots, 2\pi = id$$

Inoltre D_n possiede n ribaltamenti s_i ($i = 1, \dots, n$) rispetto agli n assi di simmetria del poligono: se n è dispari, questi assi di simmetria sono le bisettrici degli angoli del poligono, se $n = 2k$ è pari sono le k bisettrici e i k assi. In definitiva

Figura 1.6:

$$|D_n| = 2n$$

Dato che i movimenti rigidi di un poligono regolare si possono pensare come permutazioni dei vertici, risulta

$$D_n \subseteq S_n$$

Per $n = 3$ abbiamo visto che $D_3 = S_3$; per $n > 3$ risulta

$$D_n \subset S_n$$

dato che $|D_n| = 2n$, $|S_n| = n!$ e $2n < n!$, sono uguali solo per $n = 3$.

Indichiamo con r la rotazione di $2\pi/n$; essa ha ordine n , e genera il sottogruppo di tutte le rotazioni, nel senso che ogni rotazione è una opportuna potenza. Infatti

$$r^k = r_{k2\pi/n} \quad k = 1, \dots, n$$

Inoltre, l'ordine della rotazione r^k è n/d , con $d = \text{MCD}(n, k)$.

L'ordine di ogni ribaltamento s_i è ovviamente 2.

Il gruppo D_n per $n > 2$ è non abeliano.

Proposizione 1.2.1 *Sia r la rotazione di $2\pi/n$ attorno al centro di un poligono regolare e s un qualunque ribaltamento. Allora il gruppo diedrale D_n è generato da r ed s e risulta*

$$D_n = \langle r, s \rangle = \{id, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, r, rs, r^2s, \dots, r^{n-1}s\}.$$

Dimostrazione: Dimostreremo che ogni simmetria del poligono si può scrivere nella forma

$$r^i s^k, \quad i = 0, \dots, n-1, k = 0, 1,$$

avendo indicato con s (senza perdita di generalità) il ribaltamento attorno al vertice 1 del poligono. Dalla figura sopra si vede che si può identificare r con la permutazione $(1, 2, \dots, n)$ e $s (= s^{-1})$ con la permutazione $s = s^{-1} = (2, n)(3, n-1) \cdots (k, n-k+2)(k+1, n-k+1)$

$$\begin{cases} n = 2k + 2 & \text{n pari} \\ n = 2k + 1 & \text{n dispari} \end{cases}$$

Dalla

$$sr s^{-1} = (1, n, n-1, \dots, 3, 2) = r^{-1}$$

che si ricava con la regola del calcolo della coniugata di una permutazione, si ha quindi

$$sr = r^{n-1}s$$

da cui si ricavano facilmente le seguenti relazioni che garantiscono il risultato cercato:

$$\begin{array}{ll} r^\alpha r^\beta = r^\gamma, & \gamma \equiv \alpha + \beta \pmod{n} \\ r^\alpha (r^\beta s) = r^\gamma, & \gamma \equiv \alpha + \beta \pmod{n} \\ (r^\alpha s) r^\beta = r^\delta s, & \delta \equiv \alpha + (n - \beta) \pmod{n} \\ (r^\alpha s) (r^\beta s) = r^\delta, & \delta \equiv \alpha + (n - \beta) \pmod{n} \end{array}$$

Si noti che ogni elemento di D_n , in quanto movimento rigido, è rappresentato da una matrice ortogonale.

In particolare

$$r \longleftrightarrow \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & \sin(2\pi/n) \\ -\sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}$$

$$s \longleftrightarrow \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Risulta, come si verifica facilmente, $R^n = I = S^2$ e $SR = R^{n-1}S$. Identificando pertanto r con R e s con S , il sottogruppo generato dalle matrici R, S coincide con il gruppo diedrale D_n .

Abbiamo così provato che ogni gruppo D_n si può pensare come sottogruppo del gruppo ortogonale $(O_2(\mathbb{R}), \cdot)$.

Il *gruppo ciclico* di n elementi è il gruppo $C_n = \langle a : a^n = 1 \rangle$ con un solo generatore a e una sola relazione $a^n = 1$.

C_n è quindi isomorfo al gruppo Z_n delle classi resto di numeri interi modulo n . I generatori di C_n sono tutti del tipo a^s , con $\text{MCD}(s, n)=1$; ogni sottogruppo di C_n è isomorfo a un gruppo ciclico C_k (dove k è un divisore di n) generato da un elemento del tipo a^s , con $\text{MCD}(s, n)=n/k$.

I sottogruppi di D_n sono isomorfi o ad un gruppo ciclico C_k , oppure ad gruppo diedrale D_k , dove k è sempre un divisore di n : per giustificare questo fatto osserviamo che il sottogruppo H generato da a è isomorfo a C_n ed è un sottogruppo di indice due in D_n ; allora, se G è un arbitrario sottogruppo di D_n e se $G^+ = G \cap H$ può o coincidere con G oppure essere un sottogruppo di indice due in G : nel primo caso G è isomorfo ad un gruppo ciclico C_k , nel secondo caso ad un gruppo diedrale D_k .

Quindi, i possibili tipi di forme di n -agoni corrispondenti ai possibili sottogruppi di D_n per quanto già visto avremo:

- un tipo di n -agone con gruppo di simmetria C_k , per ogni k divisore di n , $k \neq n$;
- Se n è dispari, un tipo un n -agone con gruppo di simmetria D_k , per ogni k divisore di n ;
- se n è pari, un tipo un n -agone con gruppo di simmetria D_k , per ogni k divisore di n e tale che n/k sia dispari, e invece due diversi tipi di n -agoni con gruppo di simmetria D_k , per ogni k divisore di n e tale che n/k sia pari.

1.3 Il teorema di Leonardo

I seguenti due Teoremi che ora espongo ci serviranno per la dimostrazione del Teorema di Leonardo.

Teorema 1.3.1 *Rotazioni diverse dall'identità con centri differenti non commutano.*

Teorema 1.3.2 (sulla somma di angoli) *Una rotazione di Θ° seguita da una rotazione di Φ° è una rotazione di $(\Theta + \Phi)^\circ$ a meno che $(\Theta + \Phi)^\circ = 0^\circ$, nel qual caso il prodotto è una traslazione.*

Una traslazione seguita da una rotazione di Θ° diversa dall'identità è una rotazione di Θ° .

Una rotazione diversa dall'identità di Θ° seguita da una traslazione è una rotazione di Θ° . Una traslazione seguita da una traslazione è una traslazione.

Teorema 1.3.3 (di Leonardo) *Un gruppo finito di isometrie è un gruppo ciclico C_n o un gruppo diedrale D_n .*

Dimostrazione: Supponiamo che $\mathcal{G}$ sia un gruppo finito di isometrie.

Significa che $\mathcal{G}$ non può contenere una traslazione diversa dall'identità o una glisso-riflessione, dal momento che ciascuna di queste potrebbe generare un sottogruppo infinito di $\mathcal{G}$.

Quindi $\mathcal{G}$ contiene solo rotazioni e riflessioni.

Consideriamo separatamente il caso che $\mathcal{G}$ contenga solo rotazioni e il caso che $\mathcal{G}$ contenga almeno una riflessione.

Supponiamo che $\mathcal{G}$ sia un gruppo finito di simmetrie contenente solo rotazioni. Quindi $\mathcal{G}$ sarà o il gruppo C_1 contenente solo l'identità o un gruppo contenente una rotazione diversa dall'identità $\rho_{A,\Theta}$.

Sia $\rho_{B,\Phi}$ una rotazione diversa dall'identità in $\mathcal{G}$ tale che $B \neq A$. Allora $\mathcal{G}$ deve contenere la composizione

$$\rho_{B,\Phi}^{-1} \rho_{A,\Theta}^{-1} \rho_{B,\Phi} \rho_{A,\Theta},$$

che è una traslazione diversa dall'identità (dal Teorema della somma di angoli). Poiché questo è impossibile, allora abbiamo $A = B$ e tutte le rotazioni diverse dall'identità in $\mathcal{G}$ hanno centro A .

Notiamo che $\rho_{A,-\Phi}$ sta in $\mathcal{G}$ se $\rho_{A,\Phi}$ è in $\mathcal{G}$ e che tutti gli elementi in $\mathcal{G}$ possono essere scritti nella forma $\rho_{A,\Phi}$ dove $0 \leq \Phi < 360$.

Sia $\rho = \rho_{A,\Phi}$ tale che Φ ha il minimo valore positivo.

Se $\rho_{A,\Psi}$ è in $\mathcal{G}$ con $\Psi > 0$, allora $\Psi - k\Phi$ non può essere positivo e minore di Φ per ogni k intero, per la minimalità di Φ .

Quindi $\Psi = k\Phi$ per qualche k intero e $\rho_{A,\Psi} = \rho^k$. In altre parole, gli elementi di $\mathcal{G}$ sono precisamente le potenze di ρ .

Concludiamo che il gruppo finito di isometrie che non contiene alcuna riflessione è un gruppo ciclico C_n per ogni intero n .

Sia ora $\mathcal{G}$ un gruppo finito di isometrie che contiene almeno una riflessione.

Sia ι una isometria pari, quindi ι e la sua inversa hanno la stessa parità, e poiché il prodotto di due isometrie pari è un'isometria pari, segue che il sottoinsieme di tutte le isometrie pari in $\mathcal{G}$ forma un sottogruppo finito di $\mathcal{G}$.

Questo sottogruppo deve essere il gruppo ciclico C_n generato da qualche rotazione ρ con centro A .

Quindi le isometrie pari sono le n rotazioni $\rho, \rho^2, \dots, \rho^n$ con $\rho^n = \iota$.

Supponiamo che $\mathcal{G}$ abbia m riflessioni.

Se σ fosse una riflessione in $\mathcal{G}$, allora le n isometrie dispari $\rho\sigma, \rho^2\sigma, \dots, \rho^n\sigma$ sono in $\mathcal{G}$.

Quindi $n \leq m$.

In ogni modo, le m isometrie dispari moltiplicate da σ a destra generano m distinte isometrie pari.

Perciò $m \leq n$.

Quindi $m = n$ e $\mathcal{G}$ contiene i $2n$ elementi generati dalla rotazione ρ e dalla riflessione σ .

Se $n = 1$ implica $\mathcal{G} = \langle \sigma \rangle$.

Se $n > 1$, allora $\rho\sigma$ deve essere una riflessione su un asse al centro di A .

Concludiamo che il gruppo finito di isometrie che contiene una riflessione è il gruppo diedrale D_n per qualche intero n .

Capitolo 2

I Solidi Platonici Spazio e Simmetrie

In questo capitolo analizziamo i poliedri convessi regolari.

Apriamo con un breve paragrafo che raccoglie alcuni risultati sulle isometrie nello spazio, necessari per lo studio dei solidi regolari.

Passeremo poi ad approfondire le simmetrie dei poliedri regolari e porteremo avanti questo studio da punti di vista distinti.

Il passo successivo per un'analisi della simmetria dello spazio è quello di trovare i sottogruppi delle isometrie.

I soli esempi di possibili sottogruppi finiti di isometrie dirette, se si escludono i sottogruppi ciclici e diedrali, sono i tre gruppi di rotazione dei poliedri regolari. Ammettendo anche le isometrie inverse la classificazione di tutti i gruppi finiti dello spazio è riassunta nel Teorema di Hessel.

2.1 I movimenti rigidi nello spazio

Nello spazio il numero di possibili gruppi è maggiore e la teoria è un pò più lunga e complessa.

Definizione 2.1.1 *Un'isometria o movimento rigido nello spazio è una trasformazione dello spazio in sé che preserva la distanza, per ogni coppia di punti. L'insieme di tutte l'isometrie forma un gruppo.*

Per le isometrie nello spazio, valgono considerazioni analoghe a quelle fatte sulle isometrie nel piano, anche se occorre modificare alcune definizioni, ed introdurre ulteriori isometrie. Per semplicità è utile servirsi anche della analogia fra isometrie e movimenti rigidi nello spazio.

Definizione 2.1.2 *La roto-riflessione è un'isometria, composizione di una riflessione e di una rotazione di asse ortogonale al piano di riflessione.*

Definizione 2.1.3 *La roto-traslazione, anche detta glisso-rotazione, è un'isometria, composizione di una retta e di una traslazione parallela all'asse.*

Il risultato fondamentale sulla classificazione delle isometrie nello spazio è il Teorema di Chasles.

Teorema 2.1.1 (di Chasles) *Le uniche isometrie nello spazio sono: la traslazione, la rotazione, la riflessione, la glisso-riflessione, la roto-riflessione, la roto-traslazione.*

Come conseguenze del precedente Teorema abbiamo:

- Ogni isometria dello spazio è composizione di riflessioni;
- il prodotto di un numero pari di riflessioni è pari, il prodotto di un numero dispari di riflessioni è dispari;
- un'isometria è il prodotto di al più quattro riflessioni;
- nessuna isometria è sia pari che dispari;
- le isometrie pari, o dirette, sono :
le traslazioni, le rotazioni e le roto-traslazioni;
- le isometrie dispari, o inverse, sono :
le riflessioni, le glisso-riflessioni e le roto-riflessioni;
- se f è un'isometria diretta ed ha punti fissi :
è una rotazione;
- se f è un'isometria diretta e non ha punti fissi :
è una traslazione oppure è la composizione di una rotazione di asse r e una traslazione parallela a r ;
- se f è un'isometria inversa ed ha punti fissi :
è una riflessione oppure è la composizione di una riflessione e di una rotazione di asse ortogonale al piano di riflessione;
- se f è una isometria inversa e non ha punti fissi :
è la composizione di una riflessione e di una traslazione parallela al piano di riflessione;
- un'isometria che fissa tre punti non-collineari è una riflessione o l'identità;
- un'isometria che fissa quattro punti non-planari è l'identità;

Il Teorema di Chasles, quindi, limita tutte le possibili isometrie nello spazio a solo 6 movimenti rigidi. Le isometrie dello spazio formano un gruppo, non

Figura 2.1:

commutativo, che indichiamo con $\text{Iso}(\mathbb{R}^3)$. Il sottogruppo delle isometrie dirette è un sottogruppo di indice due.

2.2 I solidi Platonici e teorema di Cayley

Definizione 2.2.1 Si dice *poliedro convesso* un poliedro tale che ogni coppia di suoi punti interni individua un segmento interamente costituito da suoi punti interni. Un poliedro non convesso si dice *poliedro concavo*.

Osservazione 2.2.1 Un altro modo per definire la convessità di un poligono consiste nel chiedere che siano vere le seguenti due condizioni: ogni spigolo è comune a due facce e il piano di ciascuna faccia lascia tutte le rimanenti facce in uno dei due semispazi che individua.

Per poliedro semplicemente connesso (talvolta si usa il termine semplificato di poliedro semplice) si intende un poliedro tale che due suoi punti interni sono collegabili con archi che si possono trasformare con modifiche continue l'uno nell'altro; in parole povere si tratta di un poliedro che non presenta né -buchi né -manici.

In particolare ogni poliedro convesso è semplicemente connesso. Per ogni poliedro semplicemente connesso, eliminando una sua faccia qualsiasi si ottiene una superficie semplicemente connessa. Le proprietà più essenziali dei poliedri sono quelle che riguardano le relazioni di adiacenza e incidenza per facce, spigoli e vertici. Esse sono invarianti per le trasformazioni lineari dello spazio tridimensionale.

Il gruppo delle simmetrie dei solidi Platonici è importante nella determinazione dei gruppi finiti delle isometrie.

Definizione 2.2.2 Si dice *poliedro regolare* un poliedro convesso le cui facce sono poligoni regolari e tutte uguali.

Le proprietà più importanti non riguardano tanto i singoli poliedri, quanto le loro classi di isometria. Per certe considerazioni sono sufficienti le proprietà invarianti per trasformazioni affini.

Un poliedro si dice avere *facce uniformi* se queste costituiscono una sola classe di transitività; in altre parole, date due facce F e G , esiste una isometria del poliedro che mappa la faccia F nella faccia G .

Un poliedro si dice avere *spigoli uniformi* se queste costituiscono una sola classe di transitività; in altre parole, dati due spigoli E e D , esiste una isometria del poliedro che mappa lo spigolo E nello spigolo D .

Un poliedro si dice avere *vertici uniformi* se questi costituiscono una sola classe di transitività; in altre parole, dati due vertici V e W , esiste una isometria del poliedro che mappa il vertice V nel vertice W .

Si dimostra che un poliedro è regolare se e solo se risponde ai seguenti requisiti:

- Ha vertici uniformi.
- Ha spigoli uniformi.
- Ha facce uniformi.

Si dimostra che vi sono solo 9 poliedri regolari (a meno di isometrie) e che di questi 5 sono convessi. Di solito vengono chiamati solidi regolari solamente i cinque poliedri regolari convessi.

Figura 2.2:

I cinque solidi regolari convessi sono:

- il **tetraedro** (quattro facce triangolari);
- il **cubo** (sei facce quadrate);
- l'**ottaedro** (otto facce triangolari);
- l'**icosaedro** (venti facce triangolari);
- il **dodecaedro** (dodici facce pentagonali).

Nello studio delle proprietà di un poliedro gioca un ruolo fondamentale il gruppo costituito dalla isometrie tridimensionali che lo trasformano in sé stesso. Le simmetrie di un poliedro inducono delle permutazioni nell'insieme dei suoi vertici, nell'insieme dei suoi spigoli e nell'insieme delle sue facce. Queste permutazioni individuano delle classi di transitività entro questi insiemi, classi che costituiscono importanti partizioni per questi insiemi. In altre parole esse consentono di distinguere diversi tipi di vertici, di spigoli e di facce. Quanto minore è il numero di queste classi, tanto maggiore è la simmetria del poliedro.

Figura 2.3:

Un *tetraedro* ha venti simmetrie rotazionali le quali formano un gruppo G non-abeliano. Numeriamo i vertici 1, 2, 3, 4 come nella figura. Ognuna di queste simmetrie induce una permutazione dei vertici. Questo mostra che G è isomorfo ad A_4 (gruppo alterno delle permutazioni pari di S_n).

Un *cubo* ha ventiquattro simmetrie rotazionali. Queste devono essere contate, come nel tetraedro, per trovare tutti gli assi di simmetria insieme con il numero delle distinte rotazioni su ogni asse. I diversi tipi di assi sono rappresentati da L, M, N. Vedi figura. Ci sono tre assi, ad esempio L genera un totale di nove rotazioni, sei assi del tipo M generano una sola rotazione ciascuna, e le quattro principali diagonali come N ruotano il cubo di $2\pi/3$ e $4\pi/3$. Questo descrive le ventitre simmetrie diverse dall'identità.

Nel numerare i vertici del cubo possiamo generare un isomorfismo dal gruppo del cubo al sottogruppo di S_8 . Ciascuna simmetria rotazionale permuta le principali quattro diagonali del cubo. Useremo questo fatto per mostrare che questo gruppo è isomorfo a S_4 . Numeriamo gli angoli del cubo, sia N_k la diagonale che passa da k a k' , $1 \leq k \leq 4$. Ogni simmetria rotazionale scambia tra loro gli angoli e quindi si genera una permutazione dei numeri 1, 2, 3, 4. Ad esempio, osservando la figura seguente, r manda N_1 in N_2 , N_2 in N_3 , N_3 in N_4 e N_4 in N_1 generando il 4-ciclo (1234), e s induce (143). Sotto t , le diagonali N_1 e N_2 sono intercambiabili, mentre N_3 e N_4 vanno in loro stessi, così t genera la trasposizione (12).

Sia G il gruppo di simmetria e $\phi : G \longrightarrow S_4$.

Allora il prodotto di due rotazione induce chiaramente il prodotto della permutazione adatta. Ora rimane da vedere che ϕ è una biezione.

La biezione ϕ la si dimostra lavorando su ogni singola rotazione del cubo sulle quattro diagonali, processo piuttosto lungo. Invece, ricordiamo che una suriezione tra due insiemi finiti che hanno lo stesso numero di elementi è una

Figura 2.4:

biezione, questo implica ϕ suriettiva. Sia (1234) che (12) sono in $\phi(G)$, e $\phi(G)$ è un sottogruppo di S_4 perché ϕ manda la moltiplicazione di G a quello di S_4 . Quindi (1234) e (12) insieme generano tutto S_4 , $\phi(G) = S_4$ completando l'argomento.

Unendo i centri di ogni coppia di facce adiacenti del cubo possiamo generare un ottaedro regolare inscritto nel cubo. Lo stesso procedimento eseguito su un ottaedro porterà ad un cubo inscritto nell'ottaedro.

Definizione 2.2.3 *Il duale di un poliedro è il poliedro avente per spigoli i segmenti congiungenti centri di facce adiacenti.*

E' evidente dalla definizione che non tutti i poliedri ammettono un poliedro duale: è necessario infatti che sia definito il centro delle facce del solido considerato. Inoltre non è detto che la spezzata che congiunge i centri di facce adiacenti delimiti una figura piana.

Se il poliedro duale esiste, il numero dei suoi vertici sarà ovviamente uguale al numero delle facce del poliedro di partenza (un vertice per ogni faccia), ed è facile osservare che il numero delle sue facce corrisponderà al numero di vertici del poliedro di partenza.

I cinque solidi platonici ammettono tutti un poliedro duale, che a sua volta è un solido platonico. In particolare il tetraedro è duale di se stesso, mentre sono reciprocamente duali cubo e ottaedro, dodecaedro e icosaedro.

Notiamo così che l'ottaedro e il cubo sono solidi duali.

Ogni simmetria del cubo è una simmetria dell'ottaedro duale inscritto e viceversa. Possiamo dire quindi che il gruppo delle simmetrie rotazionali del cubo

Figura 2.5:

e dell'ottaedro sono isomorfe.

Ci sono altri due tipi di solidi regolari: il dodecaedro e l'icosaedro. Anch'essi sono duali a un altro solido regolare. Vediamo, come in figura, un cubo in un

Figura 2.6:

dodecaedro. Ogni vertice del cubo è un vertice del dodecaedro e ogni spigolo del cubo è un diagonale di una delle facce pentagonali. Osserviamo un singolo pentagono, una diagonale è precisamente uno spigolo del cubo. Quindi sulle altre quattro diagonali rimanenti del nostro pentagono possiamo far corrispondere altri quattro cubi inscritti. Questi cinque cubi sono permutati da ogni simmetria rotazionale del dodecaedro. Perciò il gruppo delle simmetrie rotazionali del dodecaedro è isomorfo a A_5 (gruppo delle permutazioni pari di S_n).

Ora elenchiamo alcuni fatti senza entrare troppo nei dettagli:

1. Il dodecaedro possiede 60 simmetrie rotazionali;
2. L'ordine di A_5 è 60;

3. Il numero dei cubi inscrivibili in un dodecaedro sono al massimo cinque cosicché ogni rotazione del dodecaedro produce un elemento di S_5 ;

Riassumiamo: *Il gruppo delle simmetrie del tetraedro è isomorfo a A_4 . Il cubo e l'ottaedro hanno i gruppi di simmetria rotazionali entrambi isomorfi a S_4 . L'icosaedro e il dodecaedro hanno i gruppi rotazionali di simmetria isomorfi a A_5 .*

Tutti questi gruppi contengono solo rotazioni.

Finora abbiamo rappresentato i gruppi di simmetria dei solidi regolari come gruppi di permutazioni. Adesso mostreremo che ogni gruppo è isomorfo ad un sottogruppo di un gruppo di permutazioni.

Teorema 2.2.1 (di Cayley) *Ogni gruppo G è isomorfo a un sottogruppo di S_G .*

Dimostrazione: Ogni elemento g in G genera una permutazione $L_g : G \rightarrow G$ definita da $L_g(x) = gx$.

(L_g è iniettiva perché se $L_g(x) = L_g(y)$ allora $gx = gy$, $g^{-1}gx = g^{-1}gy$ e $x = y$. E' anche suriettiva se esiste $z \in G$, tale che $L_g(g^{-1}z) = gg^{-1}z = z$.)

L_g è la *traslazione sinistra* per g .

Notiamo che se $G = \mathbb{R}$ allora L_g sarebbe effettivamente una traslazione di una distanza g .

Sia G' l'insieme $\{L_g \mid g \in G\}$ di S_G .

La moltiplicazione in S_G è la composizione delle funzioni e

$$L_g(L_h(x)) = L_g(hx) = ghx = L_{gh}(x)$$

per ogni $x \in G$. Quindi, il prodotto di due elementi di G' sta in G' .

L'identità ε di S_G appartiene a G' perché esso eguaglia L_e .

L'inverso di L_g in S_G è $L_{g^{-1}}$, anch'esso appartenente a G' .

Questo mostra che G' è un sottogruppo di S_G .

La corrispondenza tra G e G' definita da $g \mapsto L_g$ è certamente suriettiva, e manda il prodotto di G in quello di G' perché $gh \mapsto L_{gh} = L_g L_h$.

Essa è iniettiva quindi se $L_g = L_h$, allora $g = L_g(e) = h$.

Perciò, abbiamo costruito un isomorfismo tra G e il sottogruppo G' di S_G .

Teorema 2.2.2 *Se G è un gruppo finito di ordine n , allora G è isomorfo a un sottogruppo di S_n .*

Dimostrazione: Se gli elementi di G sono numerati $1, 2, 3, \dots, n$ allo stesso modo, ogni permutazione di G induce una permutazione di $1, 2, \dots, n$. Questo genera un isomorfismo da S_G a S_n e il sottogruppo G' di S_G è, dunque, isomorfo a un sottogruppo G'' di S_n . Come G è isomorfo a G' , e come la composizione di due isomorfismi è un isomorfismo, G è isomorfo a G'' .

2.3 Formula d'Eulero e Teorema di Teeteto

Questo semplice ed elegante Teorema che ora espongo è conosciuto come Formula d'Eulero, anche se Cartesio aveva già affermato l'equazione 100 anni prima, consegnando il risultato nel 1752 ad Eulero. La relazione di Eulero si collega a molti fatti e interessa, oltre alla geometria, la combinatoria e l'algebra topologica.

La formula collega il numero degli spigoli, dei vertici e delle facce in un poliedro semplicemente connesso garantendo la consistenza di un volume.

Teorema 2.3.1 *Se un poliedro convesso ha v vertici, e spigoli, e f facce allora*

$$v - e + f = 2$$

Dimostrazione : Per provare questa formula immaginiamo che tutti gli spigoli del poliedro convesso siano dighe, esattamente che una faccia contenga dell'acqua, e tutte le altre facce siano secche. Se rompiamo le dighe tutte le altre facce vengano inondate. Ora, dopo questo straripamento abbiamo $f - 1$ facce bagnate e anche $f - 1$ dighe distrutte. Nota che noi possiamo camminare solo sulle rimanenti facce secche, dal vertice P agli altri vertici lungo la traiettoria. Concludiamo che c'è una corrispondenza inettiva tra le rimanenti dighe e i vertici escluso P. Quindi rimangono esattamente $v - 1$ dighe non rotte. Così $e = (f - 1) + (v - 1)$.

Esempi :

- per il cubo:
 $f = 6, v = 8, e = 12$, da cui $f - e + v = 6 - 12 + 8 = 2$.
- per il tetraedro:
 $f = 4, v = 4, e = 6$, da cui $f - e + v = 4 - 6 + 4 = 2$.
- per il prisma a base pentagonale:
 $f = 7, v = 10, e = 15$, da cui $f - e + v = 7 - 15 + 10 = 2$.
- per il dodecaedro:
 $f = 12, e = 20, s = 30$, da cui $f - e + v = 12 - 30 + 20 = 2$.

Figura 2.7:

La tabella indica per ogni solido platonico il numero di facce (f), di spigoli (e), di vertici (v), il numero di lati di ogni faccia (p), il numero di spigoli che hanno in comune ciascun vertice (q).

Si osserva che nella formula di Eulero le facce e i vertici compaiono simmetricamente: questo corrisponde al fatto che passando da un poliedro al suo duale facce e vertici si scambiano di ruolo, mentre tra gli spigoli dei due poliedro si ha una corrispondenza biunivoca naturale.

Teorema 2.3.1 (di Teeteto) *Ci sono esattamente cinque poliedri regolari. Il gruppo delle simmetrie del cubo è il gruppo di simmetrie dell'ottaedro regolare.*

Il gruppo delle simmetrie del dodecaedro regolare è il gruppo delle simmetrie dell'icosaedro.

Il gruppo delle simmetrie dell'icosaedro contiene il gruppo delle simmetrie di un ottaedro regolare, il quale, contiene il gruppo delle simmetrie del tetraedro regolare.

Dimostrazione: Dimostriamo che esistono al più cinque poliedri regolari.

Sia $p \geq 3$ e $q \geq 3$. Supponiamo di avere un poliedro regolare con v vertici, e spigoli, e f facce. Perciò ciascuno spigolo è in comune a due facce e contiene anche due vertici, allora pf e qv generano il doppio numero di spigoli. Così, $qv = 2e = pf$, e, dalla formula d'Eulero,

$$2 = v - e + f = v - \frac{(qv)}{2} + \frac{(qv)}{p} = [2p + 2q - pq]\left(\frac{v}{2p}\right) = [4 - (p-2)(q-2)]\left(\frac{v}{2p}\right)$$

Abbiamo

$$v = \frac{4p}{2p + 2q - pq},$$

$$e = \frac{qv}{2},$$

$$f = \frac{qv}{p},$$

$$(p-2)(q-2) < 4.$$

Queste prime tre equazioni che chiamiamo v , e , f sono determinate una volta che conosciamo p e q . Segue che dati p e q possiamo determinare al più un solido regolare. Quindi p e q sono interi maggiori di 2, allora la disuguaglianza è facilmente risolta. Ci sono esattamente cinque soluzioni per p e q .

Così abbiamo mostrato che ci sono al più cinque poliedri regolari.

Ora dimostriamo l'esistenza dei poliedri che soddisfano le condizioni richieste da queste soluzioni p e q .

La via più facile per risolvere questo problema è trasformare il poliedro in coordinate geometriche .

$$(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)$$

Sono i punti che corrispondono ai quattro vertici di un tetraedro regolare con gli spigoli lunghi $\sqrt{2}$.

$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$$

Sono gli otto vertici di un cubo.

E' interessante notare che i vertici del tetraedro sono tra i vertici del cubo e che tutte le simmetrie del cubo sono anche le simmetrie del tetraedro. Infatti, il gruppo delle simmetrie del cubo contiene il gruppo delle simmetrie del tetraedro. Il poliedro formato dall'unione dei centri delle facce adiacenti del cubo ha i sei vertici

$$(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$$

Figura 2.8:

ed è facile notare che è l'ottaedro regolare. Così si ottiene un ottaedro regolare e ogni simmetria dell'ottaedro coincide con quella del cubo. Osservando la tabella, si nota che se l'icosaedro o il dodecaedro regolare esistesse allora esisterebbe anche l'altro, questo perchè uno è il duale dell'altro. In altre parole se questi solidi dovessero esistere allora avrebbero lo stesso gruppo di simmetria. Come abbiamo già studiato nel paragrafo precedente.

Sia g un numero positivo tale che $g^2 = g + 1$. Diciamo che i punti

$$(\pm 1, 0, \pm g), (0, \pm g, \pm 1), (\pm g, \pm 1, 0)$$

sono i venti vertici di un icosaedro regolare con lo spigolo lungo 2. Affinché

Figura 2.9:

questo insieme di venti vertici sia simmetrico a ciascuno dei tre piani contenenti due delle coordinate degli assi, abbiamo bisogno di trovare la lunghezza dei sei spigoli indicati in figura. I vertici del duale dell'icosaedro ha le coordinate che, quando moltiplicate per $3/g$, per evitare la frazione, si ottengono i seguenti punti

$$(0, \pm 1, \pm g^2), (\pm g^2, 0, \pm 1), (\pm 1, \pm g^2, 0), (\pm g, \pm g, \pm g)$$

come i venti vertici del dodecaedro regolare.

($g^2 = g + 1$).

Non c'è d'aiuto ma bisogna notare che i vertici $(\pm g, \pm g, \pm g)$ di un cubo sono fra

Figura 2.10:

quelli del dodecaedro regolare e che tutte le simmetrie del cubo sono le simmetrie del dodecaedro e, quindi, dell'isocaedro regolare che è il duale del dodecaedro.

Ricapitolando: ci sono cinque poliedri regolari.

I vertici di un tetraedro regolare sono fra quelli del cubo, e così il gruppo delle simmetrie del cubo contiene il gruppo delle isometrie del tetraedro regolare. Quindi il cubo e l'ottaedro regolare sono duali a tutti gli altri, il cubo e l'ottaedro regolare hanno lo stesso gruppo di simmetrie. I vertici di un cubo sono fra quelli del dodecaedro regolare, e così il gruppo delle simmetrie del dodecaedro regolare contiene il gruppo delle simmetrie del cubo. Quindi il dodecaedro regolare e l'isocaedro regolare sono duali, allora il dodecaedro e l'icosaedro regolari hanno lo stesso gruppo di simmetrie.

La dualità dei poliedri può essere definita più rigorosamente come polarità rispetto alla sfera circoscritta.

Ogni poliedro Platonico è inscritto in una sfera e circoscritto ad un'altra; il centro comune si dice *centro* del poliedro. Ogni vertice V , di un solido Platonico, può essere portato su un differente vertice V' attraverso una simmetria della sfera che è una rotazione dell'asse della sfera perpendicolare al piano contenente

V , V' , e il centro della sfera. Tutti i solidi Platonici hanno un piano di simmetria, perciò tutto il gruppo delle simmetrie di ciascun gruppo Platonico contiene le isometrie dispari.

Introduciamo i sottogruppi delle isometrie pari dei solidi Platonici.

- Il gruppo di tutte le isometrie pari che fissa un tetraedro regolare si chiama **gruppo tetraedrale** e si denota con la T ;
- il gruppo di tutte le isometrie pari che fissa un ottaedro regolare (o il cubo) è chiamato **gruppo ottaedrale** e si denota con la O ;
- il gruppo di tutte le isometrie pari che fissa un icosaedro regolare (o il dodecaedro) è chiamato **gruppo icosaedrale** ed è denotato con la I ;

Dal teorema di Teeteto possiamo supporre che I contiene O e che O contiene T . Nota che T , O , I non sono gruppi di simmetrie dei solidi Platonici quindi questi gruppi non contengono isometrie dispari.

Teorema 2.3.2 *I gruppi T , O e I hanno rispettivamente ordine 12, 24 e 60. Il gruppo I contiene O , e il gruppo O contiene il gruppo T .*

Dimostrazione: Con q e v della tabella ora calcoliamo l'ordine di questi tre gruppi.

Siano V_1 e V_2 i vertici adiacenti di un solido Platonico. Una volta che le immagini di V_1 e V_2 sono state determinate allora le immagini di tutti i vertici sono determinate, perché l'identità è la sola isometria pari che fissa ciascuno dei due vertici adiacenti. Dalla rotazione o dall'identità, il vertice V_1 , può essere fatto coincidere con qualche vertice v del solido. V_2 deve allora essere mandato su uno dei q vertici che sono adiacenti a quello attraverso una rotazione o l'identità. Quindi l'immagine di V_1 e V_2 determinano le immagini di tutti i vertici, notiamo che i gruppi di tutte le isometrie pari che fissano il solido hanno ordini qv .

2.4 I gruppi di simmetrie finiti nello spazio

La classificazione dei gruppi finiti delle isometrie nello spazio è stata compiuta dallo scienziato J.F.C. Hessel (1796-1872) nel 1830. Da questo lavoro non aveva ricevuto alcun riconoscimento tra i suoi contemporanei e aveva rimandato la pubblicazione al 1897. Lo stesso studio lo aveva condotto indipendentemente, in modo più elegante ma più tardi A. Bravais (1811- 1863).

Questo paragrafo è dedicato a trovare tutti i gruppi finiti di isometrie dello spazio.

Cominciamo a prendere in considerazione tutti i gruppi finiti che contengono solo isometrie pari.

Poiché ciascuna traslazione diversa dall'identità e roto-traslazione hanno ordine infinito, allora un gruppo può contenere solo rotazioni.

Definizione 2.4.1 *Ogni gruppo contenente solo rotazioni si dice gruppo rotazionale.*

Tutte le rotazioni con assi incidenti sul punto C formano un gruppo rotazionale. Questo segue dal fatto che, il prodotto di due di queste rotazioni e l'inversa di una delle due rotazioni è pari e fissa C, e dal fatto che le uniche isometrie pari con un punto fisso C sono l'identità e le rotazioni con gli assi per C.

Un gruppo G finito di isometrie è a volte detto *gruppo puntuale* perchè, come vedremo, esisterà un punto C fissato da ogni elemento di G . Così gli assi di tutte le rotazioni in G si incontrano su C.

Teorema 2.4.1 *Se le rotazioni α e β hanno gli assi sghembi allora $\alpha\beta$ è una roto-traslazione.*

Dimostrazione: Proviamo l'esistenza del punto C. Sia G il gruppo rotazionale contenente le rotazioni α e β con m e n assi paralleli distinti, e giungeremo ad una contraddizione. (Sappiamo che $\beta\alpha$ è una rotazione o una traslazione dalla teoria già vista sulle isometrie del piano.) Sia Π il piano contenente m e n . Allora ci sono due piani Γ e Δ tali che $\alpha = \sigma_{\Pi}\sigma_{\Gamma}$ e $\beta = \sigma_{\Delta}\sigma_{\Pi}$. Vedi figura.

Poiché Γ, Δ, Π non hanno alcun punto in comune, allora $\sigma_{\Pi}\sigma_{\Delta}\sigma_{\Gamma}$ è una glisso-

Figura 2.11:

riflessione. Infatti $(\sigma_{\Pi}\sigma_{\Delta}\sigma_{\Gamma})^2$ è una traslazione diversa dall'identità e quindi non è in G . Se α e β fossero entrambi in G , allora $\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta\alpha$ dovrebbe stare in G . La contraddizione segue dall'equazione $\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta\alpha = (\sigma_{\Pi}\sigma_{\Delta}\sigma_{\Gamma})^2$.

Per assurdo assumiamo che il gruppo rotazionale contenga le rotazioni α e β , rispettivamente, con assi di rotazione m e n . Supponiamo che la rotazione $\beta\alpha$ fissa P , il quale è attraversato da entrambi gli assi.

$Q = \alpha(P)$, l'asse m di α è sulla perpendicolare della bisettrice di $\overline{PQ}$. Vedi figura. Poiché $\beta(Q) = P$, allora l'asse n di β è sulla perpendicolare bisettrice di $\overline{PQ}$. Quindi siamo arrivati alla contraddizione che m e n sono coplanari. Questo argomento mostra che il prodotto delle rotazioni α e β con gli assi di rotazione m e n non può essere una rotazione. Senza alcuna difficoltà si passa a vedere che $\beta\alpha$ non può essere neanche una traslazione. Poiché una rotazione fissa i suoi assi, allora $\beta\alpha$ non può essere una traslazione a meno che $m \parallel \beta(m)$ e $\alpha^{-1}(n) \parallel n$, il quale richiede che m e n siano perpendicolari e che α e β siano

entrambi rotazioni di mezzo giro. Quindi, anche in questo caso $\alpha\beta$ è una roto-traslazione dove la rotazione è di mezzo giro attorno alla perpendicolare comune a m e n .

Teorema 2.4.1 *Gli assi di rotazione nel gruppo rotazionale sono incidenti.*

Dimostrazione: Abbiamo mostrato che due assi di rotazione nel gruppo rotazionale non possono essere né paralleli né sghembi. Questo mostra che tutti gli assi sono incidenti. Quello che abbiamo mostrato è che due assi si intersecano. Ora dimostriamo che tre gli assi sono incidenti per essere certi che tutti sono incidenti. Se α, β, γ sono tre rotazioni con assi che si intersecano a due a due, ma non coincidenti, allora $\alpha\beta\gamma$ è una roto-traslazione.

Figura 2.12:

Teorema 2.4.2 *Se α e ρ sono nel gruppo G di isometrie, dove ρ è una rotazione di ordine n con asse l , allora G contiene una rotazione di ordine n con asse $\alpha(l)$.*

Dimostrazione: Poiché $\alpha\sigma_\Delta\sigma_\Gamma\alpha^{-1} = \alpha\sigma_\Delta\alpha^{-1}\alpha\sigma_\Gamma\alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(\Delta)}\sigma_{\alpha(\Gamma)}$ per ogni piano Γ e Δ e qualche isometria α , allora segue che il coniugato $\alpha\rho\alpha^{-1}$ di una rotazione ρ di ordine n con asse l è una rotazione di ordine n con asse $\alpha(l)$. In particolare, se α e ρ sono in G implica $\alpha\rho\alpha^{-1}$ sono in G , allora le immagini di un asse di rotazione di ordine n sono gli assi di rotazione di ordine n nel gruppo.

Teorema 2.4.3 *Ogni gruppo rotazionale ha un punto fisso. Un gruppo finito di isometrie ha un punto fisso.*

Dimostrazione: Poiché gli assi di un gruppo rotazionale H sono coincidenti, esiste un punto fisso per tutte le rotazioni in H . Se ci fossero rotazioni in H con distinti assi, allora questo punto è unicamente determinato come punto di incontro di tutti gli assi. Se tutte le rotazioni hanno lo stesso asse l , allora ogni punto su l è fissato da tutte le rotazioni in H . Se H contiene solo l'identità allora ogni punto è fisso.

Il gruppo G fissa il punto C se ogni isometria in G fissa C .

Quindi un gruppo rotazionale fissa un punto.

Sia G un gruppo finito contenente un'isometria dispari β . La metà degli elementi in G sono isometrie pari e metà degli elementi in G sono isometrie dispari. Poiché G è finito, le isometrie pari formano un sottogruppo rotazionale H . Le isometrie dispari sono la composizione degli elementi di H seguiti da β . Poiché una glisso-riflessione ha un ordine infinito, allora un'isometria dispari β deve essere una riflessione o una roto-riflessione. Dato che una riflessione fissa tutti i punti sul piano e una roto-riflessione ha un unico punto fisso, se $H = \{\iota\}$, allora $G = \{\iota, \beta\}$ e G ha un punto fisso.

Supponiamo poi che H contenga rotazioni e che abbiano tutte lo stesso asse l . Se $\beta = \sigma_\Pi$, allora Π deve intersecare l nello stesso punto C altrimenti l e $\sigma_\Pi(l)$ dovrebbero essere parallele all'asse di rotazione nel gruppo finito H , che è assurdo. Se β fosse una roto-riflessione, allora β fissa l , il solo asse di rotazione, e così il punto fisso C di β deve giacere su l . In ogni caso, poiché C è fissato da β e da ogni elemento in H , allora C è fissato da ciascun elemento in G . Finalmente, supponiamo che H abbia le rotazioni con assi distinti incidenti in C . Poiché β scambia gli assi di rotazione, allora β deve fissare il punto di incontro di questi assi. Di nuovo, poiché β e gli elementi in H fissano C , allora tutti gli elementi in G fissano C .

I gruppi finiti delle isometrie del piano discendono dai gruppi rotazionali finiti. Una rotazione diversa dall'identità del piano intorno al punto P in un dato piano può essere interpretata come la restrizione della rotazione (sullo spazio) con asse perpendicolare al dato piano per P . Con lo stesso ragionamento sia C_n il gruppo ciclico generato dalla rotazione di ordine n e definiamo C_1 il gruppo contenente solo l'identità. Una riflessione piana con asse l in un dato piano può essere interpretata come la restrizione su un dato piano di mezzo giro (sullo spazio) intorno l'asse l . La rotazione di 180° intorno l in un dato piano ha lo stesso effetto sul piano Π attraverso l come la riflessione piana in l su Π . Sia ora D_n il gruppo generato dalla rotazione ρ di ordine n e un mezzo giro σ quando gli assi di ρ e σ sono perpendicolari.

Poiché l'identità non è una rotazione, si può notare che il gruppo diedrale composto di due elementi delle isometrie del piano non coincide con D_1 sullo spazio. Tale indicazione potrebbe essere superflua, ad ogni modo poiché il gruppo potrebbe contenere l'identità e un mezzo-giro allora potrebbe essere un gruppo C_2 . Per classificare i gruppi se l e m sono distinte noi identifichiamo entrambi i gruppi $\{\iota, \sigma_l\}$ e $\{\iota, \sigma_m\}$ affinché ci sia una isometria che porti l in m . Per essere formali un geometra identifica i gruppi G e H se gli elementi di uno sono i coniugati degli elementi dell'altro da qualche fissata isometria. In questo

caso G e H sono detti *gruppi coniugati*.

I gruppi C_n e D_n sono gruppi rotazionali e quindi contengono solo isometrie pari. Notiamo che una glisso-riflessione piana è anche la restrizione sul piano di una isometria pari sullo spazio, chiamata roto-traslazione dove la rotazione è di 180° .

Nel 1948 Pasteur, biologo e fisico, si stava dedicando alla cristallografia, e in particolare all'acido tartarico. Gli venne l'idea di prendere un campione di miscela racemica (concetto allora sconosciuto) chiamato acido paratartarico, metterla sotto la lente e orientare a mano tutti i cristalli in un'unica direzione. Quello che allora vide fu che una parte dei cristalli presentava un'asimmetria sulla destra, un'altra parte una sulla sinistra, rispetto ad un campione di riferimento di acido tartarico destrorotatorio. Mise i primi cristalli separati nel polarimetro e verificò che ruotavano come sempre il piano di polarizzazione della luce verso destra. Mise i secondi nel polarimetro e con immensa sorpresa scoprì che la ruotavano a sinistra. Pasteur aveva scoperto l'enantiomero L dell'acido tartarico.

I prismi e antiprismi usualmente con una o due basi potrebbero fornire un poliedro avente alcuni gruppi di simmetria. La sostanziale differenza tra prisma e antiprisma basati su n -agoni sta nei seguenti fatti. Per gli n dispari, gli antiprismi hanno un punto di simmetria mentre i prismi no; per gli n pari, gli antiprismi non hanno punti di simmetria mentre i prismi sì. Poiché le figure per questi poliedri sono sempre troppo complicate per immaginarle, vengono sostituite da cilindri che le circoscrivono e in corrispondenza dei vertici messi dei nodi. Il prisma triangolare e l'antiprisma triangolare sono rappresentati in figura.

Figura 2.13:

Mentre i modelli aventi gruppi di simmetria C_n e D_n sono rappresentati nella seguente figura per $n = 4$ e $n = 3$.

I gruppi rotazionali dei solidi Platonici hanno ordini 12, 24, 60, ma nessuno

Figura 2.14:

di questi gruppi ha una rotazione di ordine più grande di 5. Quindi nessuno di questi gruppi è rappresentato dalle due categorie sopra.

La classificazione di tutti i gruppi finiti rotazionali è esposta dal seguente Teorema.

Teorema 2.4.4 *Un gruppo rotazionale sullo spazio è uno di questi : C_1 , C_2 , C_3 ,..... D_2 , D_3 , D_4 , T , O , I .*

Dimostrazione: Considero tre casi:

1. il gruppo G contiene solo l'identità e una mezza-rotazione;
2. tutte le rotazioni in G di ordine maggiore di 2 hanno lo stesso asse;
3. il gruppo G contiene rotazioni di ordine maggiore di 2 con assi distinti.

Il prodotto di due mezza-rotazioni $\sigma_m \sigma_n$ è un mezzo giro se e solo se m e n sono perpendicolari. Quindi, un gruppo rotazionale contenente solo l'identità e mezza-rotazioni deve avere esattamente 0, 1 o 3 mezza-rotazioni.

Dunque un gruppo rotazionale contenente solo l'identità e mezza-rotazioni è un gruppo ciclico C_1 o C_2 o anche il gruppo diedrale D_2 .

Il gruppo diedrale D_2 consiste nella identità e in tre mezza-rotazioni su tre assi intercambiabili.

Il caso 1 non prevede alcun nuovo gruppo di rotazione finito.

Supponiamo che il gruppo rotazionale finito G contenga rotazioni di ordine maggiore di 2 e che tutte queste rotazioni hanno lo stesso asse l .

Poiché ogni rotazione in G deve fissare l , la sola possibilità per le rotazioni con assi differenti da l sono le mezza-rotazioni intorno l'asse perpendicolare a l . Queste perpendicolari si devono intersecare quindi il gruppo è finito.

In ogni modo se tutte le rotazioni di ordine maggiore a 2 in un gruppo di rotazioni finito hanno lo stesso asse, il gruppo è C_n o D_n . Il caso 2 non prevede alcun nuovo gruppo rotazionale finito.

Poiché esiste un punto C tale che ogni rotazione in un gruppo rotazionale finito fissa C , le rotazioni in G sono determinate dalle loro restrizioni sulla sfera unitaria con centro C .

Ciascuna rotazione in G ha un asse che contiene il diametro della sfera e effettua una *rotazione* sulla sfera sui punti d'intersezione degli assi e la sfera.

Questi punti sono chiamati *poli* della rotazione.

Utilizzando l'aiuto della sfera consideriamo il terzo caso, quando G contiene almeno due rotazioni di ordine maggiore di 2 e assi distinti.

Poiché esiste un numero finito di poli, supponiamo che i punti P e Q siano i poli più vicini delle rotazioni di ordine maggiore di 2.

Siano α e β in G generate dalle rotazioni in G con assi $\overleftrightarrow{CP}$ e $\overleftrightarrow{CQ}$, rispettivamente.

Supponiamo che α e β abbiano ordini p e q , rispettivamente.

Figura 2.15:

$p \geq 3$ e $q \geq 3$.

Allora $\beta\alpha$ è una rotazione in G , detta di ordine r . Vedi figura.

Un polo R di $\alpha\beta$ può essere scelto in modo tale che: la misura dell'angolo diedrale dal piano contenente C, P, R al piano contenente C, P, Q misura $360^\circ/2p$; la misura dell'angolo diedrale dal piano contenente C, P, Q al piano contenente C, P, R misura $360^\circ/2r$.

Questi angoli diedrali hanno la stessa misura degli angoli del triangolo sferico con i vertici P, Q, R quindi la somma delle misure è maggiore di 180° .

Quindi,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$$

poiché $(1/p) + (1/q)$ è al più $2/3$, allora $r \geq 3$.

Perciò $r = 2$.

Se $r = 2$ e $q \geq 2$ allora R è più vicino a P che a Q .

$r = 2$, allora $(1/p) + (1/q) \geq 1/2$ o, equivalentemente, $(p-2)(q-2) \geq 4$.

Abbiamo cinque soluzioni:

- $p = 3, q = 3$;
- $p = 3, q = 4$;
- $p = 3, q = 5$;
- $p = 4, q = 3$;
- $p = 5, q = 3$.

Ora, sia P il centro di un p -agone regolare sferico con i vertici le immagini di O sotto le rotazioni di asse $\overline{CP}$.

Le rotazioni su Q muovono questo p -agone a un insieme di q verso i p -agoni che circondano Q , è P e Q sono i poli più vicini delle rotazioni di ordine maggiore di 2. Inoltre, le rotazioni della stessa natura generano un insieme di p -agoni formanti tutti insieme una sfera. In altre parole le immagini di Q formano i vertici dei solidi Platonici inscritti nella sfera. Allo stesso modo le immagini di P formano i vertici del solido Platonico duale inscritto nella sfera. Non ci sono più spazi per le rotazioni di ordine maggiore di 2.

Le cinque soluzioni sopra rappresentano i solidi Platonici.

Possono esserci più mezzi-giri in G ?

Se i poli P e Q sono i più vicini per le rotazioni maggiori di ordine maggiore di 2, l'unica possibilità sarebbe quella di spostare il polo di mezzo giro e questo richiederebbe un polo intermedio tra P e Q sulla sfera. In ogni modo, questo mezzo-giro composto con α darebbe una rotazione di ordine 4 intorno $\overline{CR}$. Allora R potrebbe essere un polo di una rotazione di ordine maggiore di 2, e più vicino a P che a Q , questa è una contraddizione. Non ci possono essere più mezzi-giri.

Il caso 3 prevede solo i gruppi T, O, I in aggiunta ai gruppi ciclici C_n e i gruppi diedrali D_n .

I modelli *wire* aventi tutti gruppi di simmetrie T, O , o I possono essere trovati

Figura 2.16:

aggiungendo elementi alle facce del tetraedro, dell'ottaedro e dell'icosaedro. Questi elementi rompono tutte le riflessioni o le simmetrie inverse ma mantengono tutte le simmetrie di rotazione. Ciascuno di questi poliedri ha le facce che sono triangoli equilateri, ognuna faccia triangolare è sostituita da una avente il gruppo di simmetria C_3 come in figura.

Ora che abbiamo tutti i gruppi finiti di isometrie pari, possiamo cominciare a studiare tutti i gruppi finiti di isometrie.

Da adesso in poi sia G un gruppo finito di isometrie contenente un isometria dispari.

Supponiamo che G fissa un punto. Distingueremo due casi a seconda che ci sia σ_C in G . La metà degli elementi in G sono pari e l'altra metà dispari.

Gli elementi pari formano un gruppo finito di rotazione H .

Abbiamo appena determinato tutte le possibilità di H . Se G contiene σ_C , allora le isometrie dispari in G sono i prodotti degli elementi di H con σ_C . Invece, se H fosse un gruppo rotazionale con gli elementi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h$ fissanti C , allora

queste insieme con le isometrie dispari $\sigma_C \alpha_1, \sigma_C \alpha_2, \dots, \sigma_C \alpha_H$ formano l'insieme di $2h$ isometrie denotate da $\overline{H}$. H è un gruppo.

Poiché gli assi di ogni rotazione passano per C , allora σ_C commuta con ogni α_i . Così

$$\alpha_i(\sigma_C \alpha_j) = \sigma_C(\alpha_i \alpha_j),$$

$$(\sigma_C \alpha_i) \alpha_j = \sigma_C(\alpha_i \alpha_j),$$

$$(\sigma_C \alpha_i)(\sigma_C \alpha_j) = \alpha_i \alpha_j,$$

e $\overline{H}$ ha proprietà di chiusura. Anche, $(\sigma_C \alpha_i)^{-1} = \alpha_i^{-1} \sigma_C^{-1} = \sigma_C \alpha_i^{-1}$ e $\overline{H}$ contiene l'elemento inverso.

Dunque, per ogni gruppo rotazionale H abbiamo un nuovo gruppo $\overline{H}$. Oltre ai gruppi rotazionali, possiamo aggiungere alla nostra lista di gruppi finiti di isometrie:

$$\overline{C_1}, \overline{C_2}, \overline{C_3}, \dots$$

$$\overline{D_1}, \overline{D_3}, \overline{D_4}, \dots$$

$$\overline{T}, \overline{O}, \overline{I}.$$

I modelli per $\overline{C_n}$ e $\overline{D_n}$ sono illustrati in figura. Per ottenere questi cominciamo a

Figura 2.17:

considerare gli antiprismi se n è dispari e i prismi se n è pari e allora richiediamo un punto di simmetria. Per D_n le frecce possono essere rimosse dal momento che hanno ovunque tutte le simmetrie. Poiché l'ottaedro (cubo) e l'icosaedro (dodecaedro) hanno un punto di simmetria, allora $\overline{O}$ è il gruppo di tutte le simmetrie del ottaedro e $\overline{I}$ è il gruppo di tutte le simmetrie del icosaedro. Il tetraedro non ha nessun punto di simmetria. I modelli *wire* basati sul cubo hanno tutte le simmetrie del gruppo $\overline{T}$. Sappiamo che ci devono essere altri gruppi di isometrie

Figura 2.18:

perché non abbiamo ancora incontrato il gruppo delle simmetrie del tetraedro. Ritornando alla ricerca di tutte le isometrie finite dei gruppi, supponiamo G sia un gruppo di isometrie contenente il sottogruppo H delle isometrie pari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h$ e contenente le isometrie dispari $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_h$. Se qualche β_i fosse un'inversione, allora G sarebbe in un $\overline{H}$. Sia allora nessun β_i un'inversione. Esiste un punto C che è fissato da G . Con $\gamma_i = \sigma_C \beta_i$, le isometrie dispari in G sono $\sigma_C \gamma_1, \sigma_C \gamma_2, \dots, \sigma_C \gamma_h$. Le isometrie $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_h$ sono isometrie pari distinte. Assumendo $\alpha_i = \gamma_j$, abbiamo $\alpha_i = \sigma_C \beta_j$ e così $\sigma_C = \alpha_i \beta_j^{-1}$, assurdo perché σ_C non è in G . Infatti ci sono esattamente $2h$ elementi nell'insieme K costituito dalle isometrie pari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h$ e $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_h$. Il fatto sorprendente è che K risulta essere sempre un gruppo. Poiché un'isometria che fissa un punto C commuta con σ_C , allora σ_C commuta con ogni elemento in G . In ogni modo, l'insieme K ha la proprietà di chiusura e l'elemento inverso quindi ci sono i sottoscritti r, s, t, u tali che

$$\begin{aligned}
\gamma_j \alpha_i &= \sigma_C \beta_j \alpha_i = \sigma_C \beta_r = \gamma_r, \\
\alpha_i \gamma_j &= \alpha_i \sigma_C \beta_j = \sigma_C \alpha_i \beta_j = \sigma_C \beta_s = \gamma_s, \\
\gamma_j \gamma_i &= \sigma_C \beta_j \sigma_C \beta_i = \beta_j \beta_i = \gamma_t \\
\gamma_i^{-1} &= (\sigma_C \beta_i)^{-1} = \beta^{-1} \sigma_C = \beta_u \sigma_C = \sigma_C \beta_u = \gamma_u.
\end{aligned}$$

Sia K un gruppo rotazionale quindi ha tutti gli elementi in K che sono pari.
Al contrario supponiamo che H ha ordine h con gli elementi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h$,
ed esista un gruppo rotazionale K di ordine $2h$ avente H come sottogruppo e
contenente le rotazioni supplementari $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_h$ non in H .
Sia K il gruppo rotazionale che fissa C . Allora σ_C commuta con gli elementi in
 K .

Sia KH l'insieme di $2h$ elementi divisi in h elementi in H e in h isometrie dispari e $\sigma_C\gamma_1, \sigma_C\gamma_2, \dots, \sigma_C\gamma_h$. Diverso dall'insieme vuoto KH ha la proprietà di chiusura e contiene l'elemento inverso quindi ci sono i sottoscritti r, s, t, u tali che

$$\begin{aligned}(\sigma_C\gamma_j)(\alpha_i) &= \sigma_C(\gamma_j\alpha_i) = \sigma_C\gamma_r, \\ \alpha_i(\sigma_C\gamma_j) &= \sigma_C(\alpha_i\gamma_j) = \sigma_C\gamma_s, \\ (\sigma_C\gamma_j)(\sigma_C\gamma_i) &= \gamma_j\gamma_i = \alpha_t, \\ (\sigma_C\gamma_i)^{-1} &= \gamma^{-1}\sigma_C = \sigma_C\gamma_i^{-1} = \sigma_C\gamma_u.\end{aligned}$$

σ_C non possiede l'inverso in KH perché $\sigma_C\gamma_i = \sigma_D$ implica $\gamma_I = \sigma_C\sigma_D$, è una contraddizione (pari se $C = D$).

Quindi, KH è un gruppo finito di isometrie contenente le isometrie dispari ma non l'inverso.

Tutti questi risultati sono riassunti nel Teorema di Hessel.

Teorema 2.4.5 (di Hessel) *Un gruppo finito di isometrie nello spazio è:*

$$\begin{array}{llll} C_n, & \overline{C}_n, & C_{2n}C_n, & (n = 1, 2, \dots) \\ D_n, & \overline{D}_n, & D_nC_n, & D_{2n}D_n, \quad (n = 1, 2, \dots) \end{array}$$

$$T, O, I, \quad \overline{T}, \overline{O}, \overline{I} \quad OT.$$

Dimostrazione: I gruppi finiti delle isometrie contenenti le isometrie dispari sono ottenibili dai gruppi delle rotazioni in uno di questi due modi.

Cominciamo con un gruppo rotazionale di ordine h che fissa C , si ottiene un gruppo in entrambi i casi.

Il primo metodo è semplicemente quello di mettere σ_C in H , per ottenere il nuovo gruppo $\overline{H}$. In $\overline{H}$, le isometrie dispari sono il prodotto degli elementi di H con σ_C .

Il secondo metodo è quello di trovare (se possibile) un gruppo rotazionale K contenente H e con esattamente $2h$ elementi.

Il nuovo gruppo KH sarà formato dagli elementi di H e dalle isometrie dispari ottenute moltiplicando gli h elementi di K che non sono in H attraverso σ_C , dove C è un punto fissato di K .

Il secondo metodo serve per trovare tutti i rimanenti gruppi finiti di isometrie.

Per il gruppo H cominciamo a considerare C_n . Di gruppi finiti rotazionali

Figura 2.19:

di ordine $2n$, il gruppo C_n è il sottogruppo di C_{2n} e di D_n . Da questo si ottengono nuovi gruppi $C_{2n}C_n, D_nC_n$. Il solo gruppo finito rotazionale di ordine $4n$, del quale D_n è il sottogruppo è D_{2n} . Perciò i nuovi gruppi sono $D_{2n}D_n$. Le rimanenti possibilità per H sono ora limitate a T, O , e I . Ricordiamo che questi gruppi rotazionali hanno ordine 12, 24 e 60, rispettivamente. Non ci sono gruppi rotazionali aventi metà degli elementi i 60 elementi in I e non ci sono

gruppi rotazionali aventi metà degli elementi i 12 in T . In ogni modo, esiste un gruppo rotazionale, chiamato O che ha metà degli elementi i 12 in T . Quindi, abbiamo aggiunto il gruppo OT per finire la lista dei gruppi finiti di isometrie. Il gruppo OT è il gruppo di tutte le simmetrie del tetraedro.

Per i modelli cilindrici, una rotazione intorno l'asse verticale di un angolo di $(180/n)^\circ$ è un'isometria pari in D_{2n} , che non stà in D_n . I ruoli del prisma e dell'anti-prisma sono intercambiabili dalla formulazione dei modelli. Quindi, nella seguente figura sono illustrati i modelli per $C_{2n}C_n$ e $D_{2n}D_n$.

Le isometrie dispari qui includono le roto-riflessioni intorno l'asse verticale. I mezzi-giri intorno l'asse orizzontale sono rotazioni in D_n che non stanno in C_n . Uno di questi composto con σ_C dà una riflessione in un piano contenente l'asse verticale. Le isometrie dispari in D_nC_n sono n riflessioni nei piani contenenti l'asse verticale. Vedi figura.

I gruppi D_n sono i gruppi diedrali generati da una rotazione e una riflessione

Figura 2.20:

analogamente allo studio dei gruppi diedrali nelle isometrie del piano.

2.5 ... Nell'arte

“Quando Dio prese ad ordinare l’universo, da principio il fuoco e la terra e l’aria [...] erano tuttavia in quello stato come conviene che sia ogni cosa dalla quale Dio è assente,[...] Dio le compose nel modo più bello e più buono che potesse, mentre prima non era così, questo da noi sia detto d’ogni cosa per sempre [...]. Che fuoco e terra e acqua e aria siano corpi è chiaro a ognuno [...]. Ora bisogna dire quali siano i quattro bellissimi corpi dissimili tra loro, dei quali alcuni sono capaci, dissolvendosi, di generarsi reciprocamente. E se lo scopriamo abbiamo la verità intorno all’origine della terra e del fuoco, e dei corpi che secondo proporzione stanno in mezzo. Perché non accorderemo a nessuno che vi siano corpi visibili più belli di questi, che formano ciascuno un genere a sé. Convien dunque di comporre queste quattro specie di corpi insigni per bellezza e allora diremo di aver compreso sufficientemente la loro natura”. Di quali *bellissimi corpi* sta parlando Platone nel dialogo *Timeo*?

E’ abbastanza facile accorgersi che aumentando via via il numero dei lati dei

Figura 2.21:

poligoni regolari si ottiene una sequenza infinita: triangoli equilateri, quadrati, pentagoni, esagoni e così via. L’analogo nello spazio a tre dimensioni dei poligoni regolari sono i solidi regolari; il loro numero, lungi dall’essere infinito, è invece molto piccolo, precisamente cinque. Se non si conosce chi per primo notò la sequenza infinita dei poligoni regolari, della *scoperta* dell’esiguo numero di solidi regolari si hanno notizie abbastanza precise. Della questione erano perfettamente consapevoli i matematici greci. Platone(427-348 a.C.) mise in relazione i cinque solidi regolari con gli elementi dello spazio fisico, così come allora era concepito. Nella Scuola di Atene dipinta da Raffaello nelle Stanze Vaticane, Platone discute con Aristotele tenendo sotto braccio un volume di cui si legge con chiarezza il titolo: *Timeo*. Il dialogo contiene la più antica descrizione conosciuta dei cinque solidi regolari. Tuttavia è lecito pensare che dei solidi regolari si fossero già occupati i Pitagorici. Una delle fonti per attribuire la scoperta ai Pitagorici è Proclo (410-485 d.C.); nel suo *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide*, meglio conosciuto come *Riassunto*, osserva che “Pitagora trasformò questo studio in una forma di insegnamento liberale, investigando dall’alto i suoi principi, e, indagando i teoremi astrattamente e intellettualmente, egli scoprì il fatto degli irrazionali e la costruzione delle figure cosmiche [i poliedri regolari]”.

Lo storico della matematica Carl Boyer [in *Storia della matematica*] precisa che secondo lo scoliasta Suida, Teeteto, l’amico di Platone nato verso il 414 e morto nel 369 a.C., fu il primo a scrivere intorno ai poliedri regolari e sembra verosimile che li abbia studiati più a fondo di ogni altro matematico dell’epoca. Ritrovamenti archeologici sembrano far risalire ancora più indietro nel tempo la scoperta dei solidi regolari o almeno di alcuni di essi. In ogni caso è nel dialogo di Platone che si trova la prima descrizione giunta sino a noi dei cinque solidi regolari, noti per questo motivo anche con il nome di *solidi platonici*. Platone affronta nel *Timeo* il problema della creazione del mondo; mette in evidenza che gli elementi costitutivi dell’universo sono stati da Dio composti *nel modo più buono e più bello che potesse*; ognuno di essi ha la forma solida che Platone

descrive. La costruzione dei cinque solidi (si capirà subito perché parla solo di quattro) è basata sul *più bello dei molti triangoli, quello che ripetuto forma un terzo triangolo, che è equilatero*. Si tratta di un triangolo rettangolo scaleno con un cateto uguale a metà dell'ipotenusa. E' curioso notare come tra i novanta poligoni di cui Birkhoff ha *calcolato* la misura estetica con la sua formula $M = O/C^1$, il triangolo rettangolo ha il minimo di bellezza, cioè zero, è insomma *-brutto-*.

Ecco come Platone descrive la costruzione dei cinque poliedri: " Se quattro triangoli equilateri si compongono insieme, essi formano per ogni tre angoli piani un angolo solido, che viene subito dopo il più ottuso degli angoli piani. E di quattro angoli siffatti si compone la prima specie solida che può dividere l'intera sfera in parti uguali e simili". Si tratta del tetraedro, che è *elemento e germe del fuoco* .

" La seconda specie, poi, si forma degli stessi triangoli, riuniti insieme in otto triangoli equilateri [...] e diciamo la seconda per generazione dell'aria...". E' l'ottaedro.

" La terza specie è poi formata dai centoventi triangoli solidi congiunti insieme e di dodici angoli solidi, è quella dell'acqua, l'icosaedro ".

" Ma il triangolo isoscele generò la natura della quarta specie in modo da formare un tetragono equilatero [...] e la figura del corpo risultante divenne cubica [...] attribuendo questa forma alla Terra". E' il cubo.

Infine l'ultimo:" Restava una quinta combinazione e Dio se ne giovò per decorare l'universo ", il dodecaedro.

L'ultimo solido ha un ruolo speciale: Boyer formula l'ipotesi che sia stato proprio il culto pitagorico per la figura geometrica del dodecaedro a indurre Platone a considerare quest'ultimo solido regolare come simbolo dell'universo. Se cinque sono (e sempre resteranno!) i poliedri regolari nello spazio a tre dimensioni, i matematici hanno cercato di spezzare questo numero chiuso attenuando le richieste di regolarità, cercando cioè di generalizzare la definizione per ottenere nuove forme. Fu Archimede (287-212 a.C.) che per primo descrisse una nuova famiglia di poliedri, composta da tredici solidi chiamati semiregolari o archimedei². Un primo tentativo per *superare* il numero cinque.

Fu Pappo, circa nel 320 a.C., a fornire un resoconto del trattato perduto di Archimede³. Nella storia dei poliedri non si registrano nuovi risultati per lungo tempo; si ha un salto che va dall'opera di Pappo sino alla riscoperta della matematica greca ed in particolare degli *Elementi* di Euclide (323-285 a.C.) alla fine del Medioevo. Gli artisti, gli architetti, gli artigiani riscoprono dopo un lungo oblio i *bellissimi corpi* e i poliedri da essi derivati. Da allora diventa difficile distinguere la storia artistica e quella scientifica dei poliedri. Un qualsiasi libro di pratica e di teoria della prospettiva rinascimentale è in gran parte una sequenza di disegni dei solidi dello spazio visti sotto diverse angolature. Tra il 1482 e il 1492 Piero della Francesca scrisse il suo celebre trattato *De Quinque Corporibus Regularibus* in cui tra l'altro "faceva notare la divina proporzione

¹Per esprimere la misura estetica di un oggetto si tratta, semplificando al massimo, di determinare la funzione determina (estetica) M che misura la sensazione del piacere estetico come rapporto tra l'ordine O dell'oggetto (cioè la simmetria, la rotazione, la semplicità o l'equilibrio) e la sua complessità.

²Una definizione di solidi semiregolari è la seguente : poliedri con facce regolari e non congruenti; è consentito cioè che le facce siano poligoni regolari di due o tre tipi diversi, mentre gli angoloidi sono irregolari ma congruenti, cioè uguali tra loro.

³Pappo, *Collectio*, libro 5.

secondo la quale si intersecano le diagonali di un pentagono regolare”. Il matematico Luca Pacioli (1445-1514), oltre a scrivere trattati di matematica, come la *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità* pubblicata a Venezia nel 1494, si occupò della gestione finanziaria della città lagunare. Tre capitoli della *Summa* sono dedicati a problemi finanziari. Fu allievo di Piero della Francesca e il trattato di Piero sui solidi regolari incorporò nel suo famoso libro *De Divina Proportione* pubblicato nel 1509. Per questo fu accusato di plagio dal Vasari, il quale nelle *Vite* ha osservato che una delle cose peggiori che possa accadere a un uomo è di lavorare e studiare a beneficio di altri. Arriva a scrivere che, lasciando le cose “a poco meno che finite o a buon termine, son usurpate dalla presunzione di coloro che cercano di ricoprire la loro pelle d’asino con le onorate spoglie del leone [...] sebbene colui che doveva con tutte le sue forze ingegnarsi ad accrescergli gloria e nome per aver appreso da lui tutto quello che sapeva, come empio e maligno cercò d’annullare il nome di Piero suo precettore, e usurpare quell’onore che a lui solo doveva per se stesso, pubblicando sotto nome proprio, cioè di fra Luca del Borgo, tutte le fatiche di quel buon vecchio”. La questione del plagio da parte di Luca Pacioli delle opere matematiche di Piero ha dato luogo a una vasta letteratura. È opportuno far osservare che il concetto di citazione scientifica è abbastanza recente.

Il volume *De Divina Proportione* deve molta della sua fama al fatto che le sessanta tavole dei solidi regolari, semiregolari e stellati furono “facte e formate per quella ineffabile mano sinistra a tutte discipline mathematici accomodatissima del prencipe oggi fra i mortali, pro prima fiorentino, Leonardo da Vinci”. Del suo allievo Luca Pacioli, Piero della Francesca dipinse un ritratto, rappresentandolo come San Pietro, nella *Madonna con l’uovo*, mentre un altro ritratto fu portato a termine negli anni 1498-1500, forse da Jacopo de Barbaris.

Questo secondo dipinto è particolarmente interessante perché nell’angolo in alto a sinistra è raffigurato un modello, forse di vetro, di un solido semiregolare: il rombocubottaedro, che corrisponde alla tavola xxxv intitolata *Vintisex basium planus solidus* del *De Divina Proportione*. Un altro solido, un dodecaedro ovvero un *Duodecedron planus solidus*, si trova nell’angolo destro in basso. La mano sinistra di Pacioli indica una pagina degli *Elementi* di Euclide. Ancor più famosa è l’incisione di Albrecht Dürer *Melencolia I* in cui sono contenuti numerosi simboli alchemici e cabalistici. Vi compare un quadrato magico in cui è inclusa la data dell’incisione, il 1514.

Il solido che appare nell’opera di Dürer ha posto problemi a chi ha cercato di capire di quale solido si trattasse e con quale prospettiva fosse disegnato. In molti si sono divertiti a ricostruirlo, utilizzando anche la grafica di un computer. Il poliedro è un romboedro troncato, più o meno regolare; la questione delicata è il calcolo dei suoi angoli. Trattando dell’incisione Klibansky, Panafsky e Saxl osservano che il poliedro sta a significare la geometria descrittiva, dato che, come in molte altre rappresentazioni contemporanee, il solido è sia un problema che un simbolo di ottica definita geometricamente, più in particolare, di prospettiva. In una nota a piè di pagina aggiungono che “la costruzione di poliedri assolutamente regolari o semiregolari ha costituito il problema essenziale della geometria pratica del Rinascimento”. Dopo questa formulazione, senz’altro condivisibile, gli autori, occupandosi della particolare forma del poliedro, affermano che tutto sommato il problema può essere lasciato ai matematici, dato che i tre autori lo ritenevano di secondaria importanza. Si sa, la matematica è altra cosa dalla cultura; serve a risolvere questioni tecniche. Atteggiamento notevolmente

diverso da quello di Dürer stesso, che si recò in Italia tra l'altro per incontrare il matematico Luca Pacioli e con lui discutere di problemi geometrici. Tra i più interessati, durante il Rinascimento, alle forme geometriche fu sicuramente Paolo Uccello, che venne *accusato* dal Vasari di essere più un matematico che un artista.

Scrivendo il Vasari: "Onde Donatello scultore suo amicissimo li disse molte volte, mostrandogli Paulo mazzocchi a punte e quadri tirati in prospettiva per diverse vedute [...] et altre bizarie, in che spendeva e consumava il tempo. 'Eh, Paulo, questa tua prospettiva ti fa lasciare il certo per l'incerto; queste son cose che non servono se non a questi che fanno le tarsie!'"⁴.

Il mazzocchio era un copricapo usato nella Firenze del tempo. Per le sue difficoltà di resa prospettica l'oggetto geometrico *Mazzocchio* ha rappresentato una sorta di prova di eccellenza nel dimostrare abilità nella prospettiva. Dato il suo interesse per la geometria non è strano che Paolo Uccello abbia un ruolo molto importante nella storia dei poliedri. Si ritiene sia stato Johannes Kepler (1571-1630) il primo a notare che i solidi regolari si presentino in forma duale tra loro. Nel suo trattato *Harmonices Mundi* del 1619 Keplero così descrive un solido che chiama *stellarum duodecim planarum pentagonicarum*: "Habet hoc coniugium et stellam solidum, cujus genesis est ex continuatione quinquorū planorū Dodecaedri, ad concursum omnium in puncto unico" ("Questo matrimonio comprende anche il solido stellato, la cui generazione ha luogo dalla continuazione dei cinque piani del dodecaedro finché si incontrano in un solo punto"). Il solido di cui parla Keplero è il dodecaedro stellato, la cui scoperta gli è attribuita; si chiama stellato perché su ogni faccia del dodecaedro è costruita una piramide regolare; Keplero pubblicava sempre nel 1619 le prime rappresentazioni prospettiche di due dodecaedri regolari stellati.

Tuttavia una delle due forme ottenute da Keplero compare, realizzata a mo-

Figura 2.22:

saico, sul pavimento della basilica di San Marco a Venezia; è attribuita dal Muraro a Paolo Uccello che la realizzò mentre si trovava a Venezia negli anni 1425-1430, cioè molti anni prima della scoperta matematica *ufficiale*. Fenomeno molto raro dovuto al fatto che i veri matematici dell'epoca si possono considerare gli artisti.

Muraro, nel suo articolo, fa cenno a diverse forme geometriche che si possono osservare sul pavimento e sul soffitto di San Marco e considera questa esperienza fondamentale per l'arte di Uccello. Il solido in questione viene indicato con il nome di *rombo con elementi geometrici*, mentre in altro volume è chiamato *Litostrato*. Della presenza del solido stellato si è accorto Lucio Saffaro, un'artista con vasti interessi matematici che da molti anni lavora sui poliedri. Saffaro ha osservato che i lievi difetti che si riscontrano nella rappresentazione del poliedro si possono ascrivere al tentativo di dare maggiore profondità spaziale all'immagine e possono essere facilmente giustificati. Si può anche supporre che le correzioni siano state apportate dai maestri mosaicisti, nel momento dell'esecuzione, all'insaputa di Paolo Uccello che potrebbe aver fornito loro solo il modello geometrico del poliedro. Quando nel 1970 si accorse del poliedro, a Saffaro parve incredibile che nessun matematico lo avesse considerato prima. In

⁴nelle tarsie, i solidi platonici e mazzocchi hanno un ruolo importante.

seguito si è accorto che il poliedro veniva menzionato con evidente stupore alla pagina 88 di un'opera dello storico tedesco S. Günther, pubblicata nel 1876. L'immagine del dodecaedro stellato di Paolo Uccello è divenuta famosa nel 1986 perché è stata scelta come simbolo della Biennale di Venezia dedicata al tema *Arte e Scienza*. Più recentemente Saffaro ha notato che sul pavimento di una cappella della chiesa di San Pantalon, sempre a Venezia, vi sono due tarsie marmoree uguali che rappresentano il secondo dodecaedro stellato di Keplero. Ne è a tutt'oggi ignoto l'autore; potrebbe trattarsi ancora di Paolo Uccello. Nel suo trattato *Harmonices Mundi*, Keplero si occupò a fondo di poliedri provando tra l'altro che i solidi semiregolari erano solo tredici e costruendo, oltre ai due poliedri stellati, anche la famosa *Stella Octangula*, che, come ha notato il matematico Coxeter, aveva già fatto la sua comparsa nel *De Divina Proportione*, ove Luca Pacioli la chiama *Octaedron elevatum*. La *Stella Octangula* si ottiene dalla combinazione di due tetraedri⁵; viene così descritta insieme agli altri solidi stellati, da Keplero: "XXVI Propositio: Addi possunt congruentijis perfectissimis regularibus, duae etiam aliae congruentiae, stellarum duodecim planarum Pentagonicarum: et duae semisolidae, Stellarum Octangulae, et decangulae".

Figura 2.23:

Il motivo per il quale Keplero era molto interessato ai poliedri consisteva nel fatto che ne cercava possibili legami con l'astronomia. Nella prefazione al *Mysterium Cosmographicum* del 1596 Keplero scrive: "In questo piccolo libro, caro lettore, mi sono proposto di dimostrare che il Creatore Ottimo Massimo, nella creazione di questo nostro mondo mobile e della disposizione dei cieli, ha guardato a quei cinque corpi regolari che hanno goduto di così gran fama dai tempi di Pitagora e Platone fino ai nostri giorni, e che alla loro natura ha uniformato il numero e la proporzione dei cieli, e i rapporti dei moti celesti". Il matematico Coxeter, uno dei più famosi esperti dei poliedri, per descrivere il modello di sistema solare che Keplero elaborò utilizzando i solidi platonici suggerisce di leggere la descrizione che ne dà lo scrittore Arthur Koestler in *The Watershed*. Il modello, anche se del tutto sbagliato, "è il risultato di calcoli, è ben dettagliato e provocante. Ma la cosa più importante è che il modello è visivamente stimolante perché fornisce un vocabolario iconografico per discutere di idee che potrebbero essere troppo astratte per una facile comunicazione. Il modello ha catturato l'immaginazione di moltissime persone oltre a quelle che hanno una competenza specifica in astronomia". Un modello che, pur sbagliato, valeva più di tante parole, proprio perché era basato sul fascino di modelli geometrici descritti più di duemila anni prima come i *più belli possibili*. Scrive Koestler che Keplero "nell'orbita, o sfera, di Saturno iscrisse un cubo, e dentro al cubo un'altra sfera, quella di Giove. Inscritta in questa il tetraedro, e in quest'ultimo la sfera di Marte. Tra le sfere di Marte e della Terra, inserì il dodecaedro, fra la Terra e Venere, l'icosaedro, tra Venere e Mercurio l'ottaedro. Eureka! [...] Questo è il fascino fondamentale di Keplero, sia come individuo che come caso storico. Per Keplero la fede forviante nei cinque corpi perfetti non fu

⁵L'ottaedro è autoduale, cioè è duale di se stesso; per questo è chiamato da Keplero, che attribuisce un sesso ad ogni solido, ermafrodita.

un capriccio passeggero ma lo accompagnò, anche se in versione modificata, fino alla fine della sua vita, mostrando tutti i sintomi di una delusione paranoide; malgrado tutto, questa fede ha funzionato da matrice vitale, da sprone, per i suoi immortali risultati”.

Figura 2.24:

Come ha sottolineato Coxeter, Keplero era un astronomo esperto per sapere che le orbite dei pianeti in realtà non sono cerchi ma ellissi, così che per ogni pianeta esiste una distanza minima e una distanza massima dal Sole. Se si considera l'orbita di Saturno, come l'equatore di una grande sfera e in modo simile l'orbita di Giove come l'equatore di una sfera interna più piccola, ciò che Keplero fece fu di immaginare una sfera, nello spazio, fatta come una conchiglia, con un raggio esterno corrispondente alla distanza massima del pianeta dal Sole e un raggio interno corrispondente alla distanza minima. Pensava cioè a una sfera cava. Egli misurò la distanza minima di Saturno e la divise per la distanza massima di Giove per ottenere il rapporto tra il raggio esterno e quello interno di un cubo. In questo modo Keplero fu in grado di associare ai sei pianeti noti all'epoca, i cinque solidi platonici. “E' interessante osservare”, concluse Coxeter, “che, malgrado tutto questo sia ”“nonsense”, se Keplero non avesse coltivato queste curiose fantasie avrebbe potuto non portare mai a termine le grandi cose che ha fatto”.

René Descartes molto probabilmente trovò nel 1619 un risultato dal quale si ottiene immediatamente la formula

$$V - E + F = 2$$

ove si indica con V il numero dei vertici, con E il numero degli spigoli e con F il numero delle facce di un poliedro semplice. Tuttavia i suoi calcoli andarono perduti. Di un suo trattato inedito *De solidorum elementis*, fu ritrovata nel 1859 una copia che Leibenz fece nel 1676. Certo è che Descartes non si accorse dell'importanza della scoperta. Fu il matematico Eulero (1707-1783), un secolo più tardi, a riscoprire la formula che venne poi dimostrata non solo per i poliedri semplici ma anche per solidi e superfici molto più generali. Da allora l'interesse matematico e scientifico per i poliedri non è mai venuto meno. Si può anzi affermare che la *profezia* di Platone di porre i cinque solidi regolari alla base della struttura fisica dell'universo, pur essendo *nonsense*, continua ad eccitare l'immaginazione di tanti. La ragione consiste nel fatto che i poliedri continuano a riservarci delle sorprese, tant'è che è facilissimo fornire degli esempi, difficilissimo dare un quadro completo di tutti i settori scientifici in cui essi compaiono. Non vi è alcun dubbio che non sono pochi i casi in cui si è cercato ad ogni costo di *trovare* i solidi platonici nelle forme della natura, salvo poi a scoprirli dove non vi si attendeva. Nel classico studio *On Growth and Form*, D'Arcy Wentworth Thompson cerca di analizzare i processi biologici partendo dai loro aspetti matematici e fisici. Osserva Thompson, nella nota introduttiva scritta per l'edizione ampliata del 1941, che non è il biologo con un'infarinatura di matematica, ma è il matematico esperto e di vasta cultura che deve occuparsi di questi problemi.”Non ritengo di avere una profonda conoscenza matematica”, afferma Thompson, “ma ho cercato di fare il maggior uso possibile degli

strumenti che possedevo; ho trattato casi semplici e i metodi matematici che ho utilizzato sono del tipo più semplice e facile”.

Una delle sezioni del saggio è dedicata alle strutture degli scheletri dei Radiolari, organismi microscopici che fanno parte del plancton marino. Thompson analizzò i disegni realizzati del naturalista tedesco Ernst Haeckel che, pur non partecipando alla spedizione scientifica intorno al mondo della nave oceanografica H.S.M. Challenger, curò il volume XVIII sul materiale raccolto. I disegni di Haeckel, in origine in bianco e nero, furono colorati e raccolti in volume, senza il testo scientifico, con il titolo *Kunstformen der Natur*; il volume divenne rapidamente un classico per chi credeva alla bellezza delle forme naturali ed ebbe una notevole influenza sugli artisti del primo novecento. Nei radiolari vi sono casi in cui lo scheletro consiste o di spicole raggiate o di piastre o sbarrette disposte tangenzialmente al corpo più o meno sferico dell'organismo, la cui forma diviene pertanto quella di un solido poliedrico. La grande regolarità, la simmetria numerica e l'apparente semplicità di queste strutture ne fanno una classe di particolare interesse. Analizzando le illustrazioni realizzate da Haeckel, Thompson osserva che “in una di queste vediamo un ottaedro regolare, in un'altra un dodecaedro regolare, o pentagonale, e in una terza un icosaedro regolare. In tutti i casi le figure appaiono perfettamente simmetriche, benché le facce, né quelle del tetraedro o dell'ottaedro né quelle pentagonali del dodecaedro, siano facce necessariamente piane [...]. Se aggiungiamo a queste figure il tetraedro regolare che abbiamo studiato e il cubo che è rappresentato, almeno nel profilo, dallo scheletro delle Spugne esattinellidi, abbiamo la serie completa dei cinque poliedri regolari della geometria, ovvero dei “solidi platonici” degli antichi matematici”.

Thompson nota che la cosa appare ancora più notevole, dato che in questo caso si osserva l'intera serie dei poliedri regolari, mentre tra l'immensa varietà delle figure cristalline dei minerali non figurano né il dodecaedro né l'icosaedro. Il motivo per il quale queste figure non appaiono in cristallografia è dovuto al fatto che i loro indici (o numeri che esprimono le relazioni delle facce con i tre assi primari) sarebbero dei numeri irrazionali, mentre è una legge fondamentale della cristallografia, alla base di tutta la teoria della suddivisione dello spazio, che gli indici di qualsiasi faccia di un cristallo siano numeri interi piccoli. Thompson ne conclude che, se possiamo giudicare con sicurezza dalle figure di Haeckel che aveva a disposizione solo microscopi ottici, “il pentagono-dodecaedro dei Radiolari (Circorhema) è perfettamente regolare e possiamo essere certi pertanto che non si è formato in base ai principi della suddivisione dello spazio, simili a quelli che si manifestano nei fenomeni cristallini”. Non pochi pensavano che le immagini di Haeckel fossero state un poco *abbellite*; alcuni dei Protozoi descritti non sono stati mai più osservati. Si poteva addirittura pensare che il cercare le forme platoniche negli oceani fosse una semplice bizzarria; salvo poi dover prendere atto che certe strutture dei Radiolari, osservate al microscopio elettronico sono incredibilmente *platoniche*. La regolarità e il gran numero di forme diverse che possono assumere gli scheletri silicei dei Radiolari sono una manifestazione impressionante a favore della tesi cara a Haeckel, della presenza di forme *artistiche* nella natura.

Quanto poi alla questione se le forme cristalline possano o meno avere forma di icosaedro e simmetrie pentagonali, ai tempi di Thompson e sino al 1984 la risposta era molto semplice: non è possibile. Anzi, come ricordava Thompson, la risposta negativa alla domanda era ed è una delle basi della cristallografia

classica. Nel 1984 avviene un fatto nuovo che sconvolge alcune convinzioni profondamente radicate; il fatto sconvolgente è il ritrovamento di una delle forme platoniche là dove nessuno pensava potesse essere ritrovata: il 1984 è l'anno della scoperta dei quasi cristalli.

Il fisico-matematico Roger Penrose ha recentemente scritto: "Gli oggetti matematici non sono dei concetti; sono le idealizzazioni mentali dei matematici, alle volte stimulate da taluni aspetti del mondo intorno a noi, ma sempre idealizzazioni mentali. Possono essere quindi altra cosa da semplici costruzioni arbitrarie della mente umana? Allo stesso tempo capita di frequente che vi siano legami profondi con la realtà, legami che vanno al di là delle possibili elaborazioni mentali di un qualsiasi matematico. Si ha l'impressione che il pensiero umano sia guidato verso una verità esterna ed eterna, una verità che esiste di per sé, e che si rivela solo parzialmente a qualcuno di noi". Uno degli esempi più interessanti di come la matematica sia *irragionevolmente* legata alla realtà fisica riguarda proprio alcuni risultati ottenuti da Roger Penrose. Nel novembre del 1984 viene pubblicato un lavoro intitolato *Metalllic Phase with Long-Range Orientational Order and no Translational Symmetry*, autori un gruppo di fisici, D. Schechtman, I. Blech, D. Gratias e J.W. Cahn. La pubblicazione di questo lavoro ha dato origine a un vastissimo dibattito tra i matematici, i fisici, i cristallografi, i chimici. Il motivo è che quel lavoro metteva in crisi una delle basi della cristallografia. Se un materiale omogeneo si trova nello stato cristallino non può presentarsi, come già osservato, in forma icosaedrica. Sebbene l'impacchettamento icosaedrico sia il modo energeticamente più favorevole di mettere insieme un numero grande di sfere, tuttavia nessun cristallo può aver la simmetria dell'icosaedro perché una struttura di soli icosaedri non può riempire tutto lo spazio; il motivo è che tra le simmetrie dell'icosaedro vi è quella pentagonale, e con il pentagono non si può tassellare il piano senza lasciare dei vuoti; non si possono quindi avere strutture molto estese con la simmetria icosaedrica, perché il disordine che ne creerebbe per riempire i vuoti distruggerebbe la struttura stessa. Nei cristalli, inoltre, la presenza di un ordine a lungo raggio è sinonimo di periodicità, e ogni struttura periodica ha una cella traslazionale che ripetuta all'infinita costruisce tutta la struttura. Ecco allora che, già nel titolo, il lavoro pubblicato nel 1984 contraddiceva le idee alla base della cristallografia: ordine a lungo raggio e assenza di simmetria traslatoria, due proprietà che sembravano in netta contrasto tra loro. Nel caso dei quasicristalli, osservati con tecniche di microscopia elettronica o di diffrazione, si osservava una sistemazione su larga scala della simmetria di tipo pentagonale e non vi era alcuna cella che ripetuta all'infinita generasse tutta la struttura. Insomma, come hanno scritto di recente Marjorie Senechal e Jean Taylor, entrambi matematici, "si era verificato l'impossibile". Dal 1984 gli scienziati hanno cercato di modificare i loro modelli per tener conto delle nuove esperienze. In realtà era già molto tempo che si discuteva, in linea teorica, se potesse esistere una nuova area della cristallografia in cui fosse possibile avere la simmetria pentagonale e icosaedrica. Questa domanda veniva posta spesso, tra la fine degli anni Settanta e l'inizio degli anni Ottanta, al fisico-matematico Roger Penrose, il quale aveva scoperto in quegli anni un certo numero di ricoprimenti del piano che avevano le due proprietà di possedere simmetrie non ammesse nella cristallografia classica e di non essere di tipo periodico, nel senso che vi erano chiaramente regioni che si ritrovavano nella struttura in scale diverse senza tuttavia una periodicità globale. I ricoprimenti di Penrose erano quasiperiodici. Il nome "quasicristalli" deriva dalla

contrazione di “ cristalli quasiperiodici”. Quando gli veniva chiesto se i suoi risultati potessero essere la premessa per un’area del tutto nuova della cristallografia, di solito Penrose rispondeva: ” In linea di principio, sì; ma come potrebbe la Natura operare in questo modo?”.

Di alcuni di questi ricoprimenti Penrose fece anche una versione per bambini; modificò le due figure geometriche che servivano a generare uno dei ricoprimenti, chiamati per la loro forma *dard* (dardo) e *kite* (aquilone), in due tipi di uccelli; purtroppo, a parte alcuni prototipi la versione giocattolo del ricoprimento trovata da Penrose, non venne mai costruita su larga scala; era ritenuta troppo complicata. La cosa *irragionevole* è che se si ricostruisce con un computer la figura di diffrazione generata dalla distribuzione dei punti ai vertici dei rombi di un ricoprimento di Penrose, si ottiene la stessa simmetria delle immagini di diffrazione ottenute con i quasicristalli! Un esempio clamoroso di come delle ricerche matematiche *a priori* del tutto *inutili*, ovvero del tutto *interne* alla matematica, siano divenute un punto fondamentale di riferimento per ricerche di fisica e cristallografia.

Strutture derivate dall’icosaedro si ritrovano anche in diversi tipi di virus, in particolare nel batteriografo γ . Sono stati studiati i cambiamenti superficiali che avvengono durante le morfogenesi della testa del fago. Inoltre, tramite elettromicrofotografie, sono state osservate sulle superfici di trasformazioni delle strutture che hanno portato in alcuni casi a paragonare i risultati con le strutture ripetitive realizzate dall’artista R.C.Escher e con i mosaici arabi. Michel Wurtz, microbiologo, ha scritto che, “nel presentare alcuni esempi di trasformazioni strutturali o dinamiche nella biologia molecolare dei fagi, possiamo affermare che i virus sono stati i primi artisti grafici”.

Di una *estetica dei virus* parlano anche un virologo e un matematico, A.S.Koch e T.Tarnai: “ I virus come agenti patogeni hanno acquistato una ben nota reputazione, di misteriosi, invisibili nemici della salute e della vita. Anche se per qualcuno l’idea di fare delle considerazioni sull’estetica dei virus potrebbe sembrare un poco morboso, non di meno l’estetica del demoniaco e del peccato non è estranea all’arte [...]. Ci auguriamo che il lettore dimentichi i suoi pregiudizi contro i virus e guardi a questi semplicemente come a particolari entità della inesauribile varietà di manifestazioni concrete della natura”.

Come si vede, Keplero non è stato un fenomeno isolato di scienziato la cui immaginazione è stata catturata dai *bellissimi corpi*. Strutture analoghe a quelle dei virus si ritrovano nell’architettura moderna. Basti pensare alle realizzazioni di R.Buckminster Fuller, i famosi *Geodesic Domes*, che sono ottenuti con triangolazioni di strutture icosaedriche.

L’avvento della computer graphics nel caso dei solidi dello spazio ha contribuito a modificare l’approccio scientifico alla loro morfologia nelle diverse discipline. Se Albrecht Dürer a quanto sembra fu il primo a descrivere come disegnare su un foglio lo sviluppo dei solidi in modo tale che ritagliando il modello e incollandolo lungo gli spigoli, si ottenesse un modello di carta del solido voluto, oggi è oramai di routine studiare le forme solide di cristalli e quasicristalli utilizzando la grafica interattiva, che permette di modificare i dati e quindi il modello nel momento stesso in cui lo si sta studiando. Non poteva restare estraneo a questo ulteriore sviluppo nello studio dei poliedri il lavoro degli artisti. E’ il caso di Lucio Saffaro, che durante tutta la sua attività artistica si è interessato ai diversi tipi di poliedri. Saffaro ha costruito delle nuove classi di poliedri che poi, come pittore, ha realizzato nelle sue opere. Il poliedro M è costituito di soli triangoli

equilateri, precisamente 240, che si incontrano nei vertici a 4 a 4, a 10 a 10, a 12 a 12. I poliedri formati solo da triangoli equilateri sono detti deltaedri. Il più grande deltaedro è quello formato da 360 triangoli regolari che si incontrano nei vertici a 4 a 4, a 8 a 8, a 9 a 9 e a 15 a 15.

Queste due opere sono state realizzate in modo tradizionale su tela, con colori e pennelli, mentre utilizzando un elaboratore dalle notevoli capacità grafiche e di calcolo è stato possibile per Saffaro ottenere una famiglia di poliedri stellati, del tipo cioè di quelli realizzati da Paola Uccello sul pavimento di San Marco. In questo modo Saffaro è riuscito a costruire forme che non si sarebbero potute ottenere altrimenti. Una delle forme più interessanti è quella composta dall'intersezione di cento icosaedri; alla fine dell'operazione di intersezione degli icosaedri compaiono sullo schermo delle forme pentagonali che l'autore stesso non poteva prevedere di ottenere.

L'uso della grafica computerizzata non ha chiuso il discorso sulla *vecchia* geometria Euclidea e sui solidi regolari dello spazio; ha anzi aperto nuove possibilità, nuovi *bellissimi corpi* potrebbero essere scoperti, di cui nessuno può supporre nemmeno l'esistenza. Quello che in qualsiasi caso nessuna tecnologia moderna potrà mai modificare è il fatto che solo cinque sono i solidi regolari dello spazio Euclideo a tre dimensioni: "Perché non accorderemo a nessuno che vi siano corpi visibili più belli di questi, che formano ciascuno un genere a sé".

Bibliografia

- [1] G.M. Piacentini Cattaneo
Algebra, un approccio algoritmico
Decibel, 1996
- [2] G.E. Martin
Transformation Geometry, an introduction to symmetry
Springer-Verlag, 1982
- [3] V.V. Nikulin, I.R. Shafarevich
Geometries and group
Springer-Verlag, 1994
- [4] M.A. Armstrong
Groups and simmetry
Springer, 1997
- [5] M. Dedò
Forma, simmetria e topologia
Decibel, 2005
- [6] M. Emmer
La perfezione visibile, Matematica e arte
Theoria, 1991
- [7] S.Nicosia
Le parole della matematica, Dizionario
Cedam, 1998
- [8] Enciclopedia interattiva
www.wikipedia.it