

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Prova finale di tipo A
di
Monia Di Maggio

**GRUPPI CRISTALLOGRAFICI NELL'ARTE DI
M.C. ESCHER**

Relatore
Prof. Andrea Bruno

Il Candidato

Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2005 - 2006
Ottobre 2006

Indice

1	ISOMETRIE E SIMMETRIE	2
2	GRUPPI UNIFORMEMENTE DISCONTINUI	9
3	GRUPPI DISCRETI E GRUPPI ORNAMENTALI	12
3.1	GRUPPI CRISTALLOGRAFICI	20
3.2	RETICOLI	22
4	MODELLI DI GRUPPI	34
5	ESCHER E LE TASSELLAZIONI DEL PIANO	49
5.1	La simmetria nell'arte di Escher	51

1 ISOMETRIE E SIMMETRIE

In questa sezione forniamo le nozioni essenziali sulle isometrie mantenendoci all'interno di un sistema Hilbertiano di assiomi, ossia su di un piano Euclideo dove valgono, appunto, i cinque postulati di Euclide e i relativi teoremi legati a questi.

Definizione 1.1 Una *isometria* (o *movimento rigido*) del piano è un'applicazione biunivoca $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ che preserva la distanza tra coppie di punti corrispondenti, ossia t.c.

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Osservazione 1.1 L'insieme delle isometrie del piano formano un gruppo, rispetto alla composizione di funzioni, chiamato **gruppo Euclideo** E_2 .

Infatti, prese $f, g \in E_2$

$$d(f(g(x)), f(g(y))) = d(g(x), g(y)) = d(x, y) \in E_2 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

applicando rispettivamente la definizione d'isometria per f e g si ha che la composizione è ancora un elemento di E_2 .

La composizione di funzioni è associativa e la trasformazione identità del piano funge da elemento d'identità.

Infine ciascun $g \in E_2$ è una biiezione e soddisfa

$$d(g^{-1}(x), g^{-1}(y)) = d(g(g^{-1}(x)), g(g^{-1}(y))) = d(x, y)$$

dunque $g^{-1} \in E_2$.

Abbiamo così dimostrato che $(E_2, \circ)$ è un gruppo.

Diamo alcuni esempi di movimenti rigidi del piano e successivamente dimostreremo, attraverso il teorema di *Chasles*, che sono gli unici esistenti.

1. La **traslazione** di vettore $\vec{v} = \overrightarrow{A, B}$ denotata con $\tau_{A, B}$ (o $\tau_{\vec{v}}$) è una trasformazione $\tau_{\vec{v}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ che associa ad ogni punto del piano A il punto $B = \tau_{\vec{v}}(A)$;

2. la **riflessione** rispetto ad un asse m , denotata con σ_m , è una trasformazione $\sigma_m : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ che associa ad ogni punto del piano A il punto

$$\sigma_m(A) = \begin{cases} A & \text{se } A \in m \\ B & \text{se } A \notin m, \text{ m } \perp \overline{AB} \text{ passante per il suo punto medio} \end{cases}$$

3. la **rotazione** di centro un punto C e di angolo θ , denotata con $\rho_{C, \theta}$, è una trasformazione $\rho_{C, \theta} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ che associa ad ogni punto del piano A il punto $B = \rho_{C, \theta}(A)$, con $\theta = \widehat{ACB}$;

4. la **glissoriflessione**, denotata con $\gamma_m^{\vec{v}}$, dove $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, è una trasformazione $\gamma_m^{\vec{v}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ che associa ad ogni punto A del piano, il punto $B = \gamma_m^{\vec{v}}(A) = \sigma_m \tau_{\vec{v}}$ con $\vec{v} \parallel m$.

La glissoriflessione è composizione di una traslazione ed una riflessione.

Prima di dare l'enunciato del teorema, osserveremo alcune proprietà di queste isometrie, specificando alcuni lemmi che torneranno utili per la nostra dimostrazione.

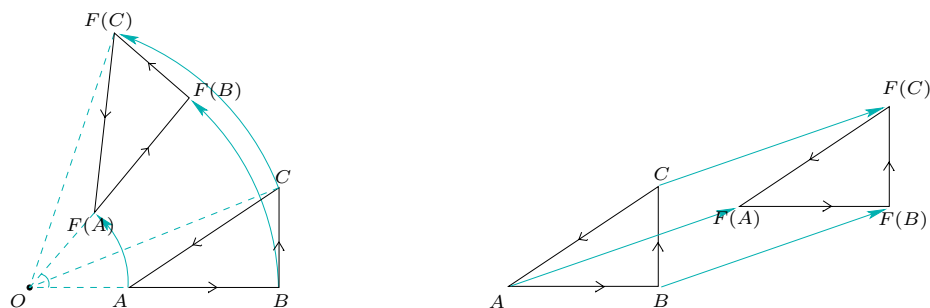
Essendo un movimento rigido una isometria, conserva dunque la distanza tra coppie di punti, di conseguenza rimangono inalterati tutti gli elementi geometrici, quali le aree, gli angoli, i perimetri, ecc.

In altri termini una figura trasformata da un'isometria non cambia né forma né dimensioni, ma solo la sua posizione nel piano.

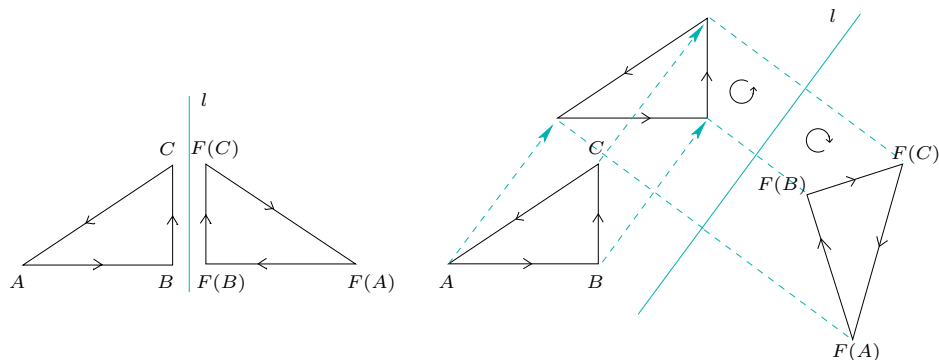
Tali isometrie si dividono in due tipi differenti, forniamo quindi le seguenti definizioni, denotando con Γ l'insieme dei movimenti rigidi del piano:

Definizione 1.2 Dato un triangolo qualsiasi $\triangle ABC$ di angoli $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$. Un movimento rigido $F \in \Gamma$ si dice del **primo tipo** (o pari) se F è una traslazione

o una rotazione e t.c. $F(\hat{A}), F(\hat{B}), F(\hat{C})$ conserva il verso di percorrenza del triangolo.



Definizione 1.3 Dato un triangolo qualsiasi $\triangle ABC$ di angoli $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$. Un movimento rigido $F \in \Gamma$ si dice del **secondo tipo** (o dispari) se F è una riflessione o una glissoriflessione t.c. $F(\hat{A}), F(\hat{B}), F(\hat{C})$ cambia il verso di percorrenza del triangolo.



Le **isometrie pari** (o dirette) mantengono l'orientamento e si ottengono componendo un numero pari di riflessioni; esempi ne sono la *traslazione*, la *rotazione* e l'identità.

Le **isometrie dispari** (o inverse) cambiano l'orientamento e si ottengono componendo un numero dispari di riflessioni; esempi ne sono le *riflessioni* e le *glissoriflessioni*.

Osservazione 1.2 *l'insieme delle isometrie pari è un gruppo.*

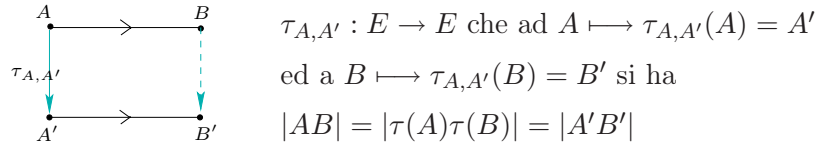
Lemma 1.1 Se $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ sono due segmenti distinti del piano, con $|AB| = |A'B'|$ allora esiste $F \in \Gamma$ che è una traslazione o una rotazione t.c. $F(A) = A'$ e $F(B) = B'$. F porta $\overline{AB}$ su $\overline{A'B'}$.

Dimostrazione

- Siano $AB \parallel A'B'$; ho due casi:

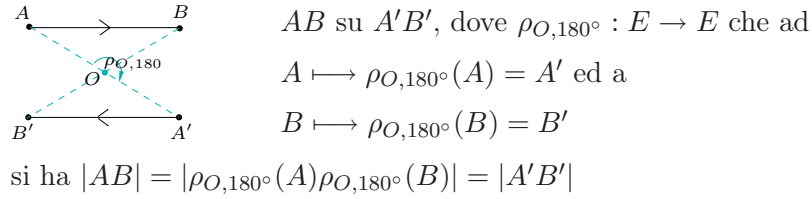
1. I segmenti sono equiorientati

allora per andare da AB a $A'B'$ è sufficiente una traslazione



2. I segmenti non sono equiorientati

sia O l'intersezione tra AA' e BB' , la rotazione di $\rho_{O,180^\circ}$ mi porta

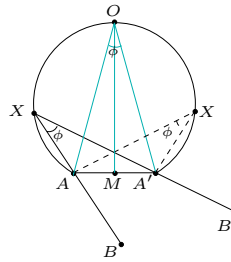


- Siano invece $AB \nparallel A'B'$

Sia ϕ l'angolo tra AB e $A'B'$, consideriamo il luogo dei punti X t.c.

l'angolo $\widehat{AXA'} = \phi$ è un arco di circonferenza. (per tre punti, in tal caso A, X, A' , passa un'unica circonferenza)

Sia M il punto medio del segmento AA' e sia O l'intersezione tra il cerchio e la perpendicolare ad AA' passante per M . $\rho_{O,\phi}$ porta AB su $A'B'$



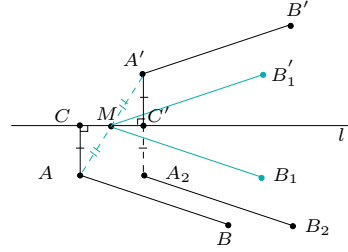
Lemma 1.2 Se $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ sono due segmenti distinti del piano, con $|AB| = |A'B'|$ allora esiste $G \in \Gamma$ che è una riflessione o una glissoriflessione t.c.

$G(A) = A'$ e $G(B) = B'$. G porta $\overline{AB}$ su $\overline{A'B'}$.

Dimostrazione Distinguiamo i due casi in cui i segmenti siano paralleli o meno:

- Sia $\overline{AB} \nparallel \overline{A'B'}$

Consideriamo il punto medio M tra A e A' e trasliamo i due segmenti in M , rispetto a $\tau_{\vec{v}}$ e $\tau_{-\vec{v}}$ di vettore $\vec{v} = \overrightarrow{AM}$, otteniamo due segmenti



coincidenti in M di angolo $B_1 \widehat{M} B_1'$ (dove $B_1 = \tau_{\vec{v}}(B)$ e $B_1' = \tau_{-\vec{v}}(B')$). Sia l la bisettrice di tale angolo, siano C e C' rispettivamente le proiezioni ortogonali di A e A' su l ; abbiamo che $|CA| = |C'A'|$ (essendo i triangoli $\triangle ACM$ e $\triangle M A' C'$ uguali).

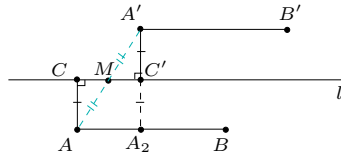
Dunque sotto la traslazione $\tau_{C,C'}$ il segmento AB viene mandato nel segmento $A_2 B_2$, successivamente riflettendo quest'ultimo rispetto ad l il segmento $A_2 B_2$ va a coincidere con il segmento $A' B'$ (essendo $|C'A'| = |CA| = |A_2 C'|$ e $A' A_2 \perp l$).

Abbiamo così che la glissoriflessione $\gamma_l^{CC'}$ manda il segmento AB nel segmento $A' B'$.

- Sia $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$

Basta considerare la retta l passante per il punto medio di $\overline{AA'}$ e

parallela ai segmenti, procedendo successivamente come il caso precedente otteniamo così $\gamma_l^{CC'}(AB) = A' B'$.



Attraverso questi lemmi abbiamo visto che dati due segmenti uguali esistono due trasformazioni che portano uno nell'altro mediante un movimento.

Ora vediamo che se abbiamo due segmenti uguali, possiamo portare l'uno nell'altro attraverso un movimento del primo o del secondo tipo.

Lemma 1.3 Siano A, B, A', B' quattro punti distinti con $|AB| = |A'B'|$ allora esistono soltanto due movimenti che portano $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$ e

$|AB| \mapsto |A'B'|$; uno di questi è del primo tipo e l'altro del secondo tipo e si distinguono nel seguente modo:

Essi portano ciascuno dei due semipiani individuati da AB in un semipiano individuato da $A'B'$.

Teorema 1.1 (di Chasles). *Ogni movimento rigido del piano è:*

- *una traslazione*
- *una rotazione*
- *una riflessione*
- *o una glissoriflessione*

Dimostrazione Sia $F : E \rightarrow E$ un movimento rigido del piano, consideriamo due punti $A, B \in E$ t.c. $F(A) = A'$ e $F(B) = B'$ poiché F è un'isometria, conserva dunque le distanze, abbiamo che $|AB| = |F(A)F(B)| = |A'B'|$. Dai lemmi precedentemente affrontati ricaviamo che esiste una traslazione o rotazione e una glissoriflessione o riflessione che mandano A in A' e B in B' una del primo e l'altra del secondo tipo.

F coincide con una di queste.

Osservazione 1.3 *le riflessioni generano, per composizione, tutte le altre isometrie del piano.*

Infatti $\tau_{A,B} = \sigma_{m_2}\sigma_{m_1}$ dove m_1, m_2 sono rispettivamente l'asse passante per il punto medio di $\overline{AB}$ e l'asse passante per B entrambi $\perp \overline{AB}$.

Mentre $\rho_{C,\theta} = \sigma_{m_1}\sigma_{m_2}$ dove m_1, m_2 sono gli assi di riflessione passanti per C e formanti fra loro un angolo $\frac{\theta}{2}$.

Infine abbiamo che $\gamma = \sigma_{m_1}\sigma_{m_2}\sigma_{m_3}$ essendo la glissoriflessione composizione di una traslazione per una riflessione.

Osservazione 1.4 *L'insieme delle traslazioni Γ' e l'insieme delle rotazioni R' (con centro fissato), sono sottogruppi di Γ .*

Componendo due riflessioni otteniamo una traslazione (o una rotazione se

gli assi delle riflessioni sono incidenti) e componendo due glissoriflessioni otteniamo una traslazione; per cui non vi è struttura di sottogruppo in un insieme di riflessioni o glissoriflessioni.

Un concetto molto importante legato allo studio delle isometrie, ed in particolare al nostro lavoro, è quello di simmetria; ossia, una isometria (o movimento rigido) del piano che manda un insieme di punti F (o equivalentemente una figura) in se stesso.

Lo strumento matematico che misura la simmetria di una figura è il gruppo di simmetria: se consideriamo una figura F (per fissare le idee, pensiamo ad una figura piana), il gruppo di simmetria di F contiene tutte le isometrie del piano che lasciano invariata la figura F .

Definizione 1.4 *Un'isometria α è una **simmetria** per un insieme di punti F se $\alpha(F) = F$.*

Si ha che:

m è una **linea di simmetria** per un insieme di punti F se $\sigma_m(F) = F$.

P è un **punto di simmetria** per un insieme di punti F se $\sigma_P(F) = F$, dove σ_P è una rotazione di 180 gradi di centrata in P .

Teorema 1.2 *L'insieme di tutte le simmetrie di F (o di una figura) è un gruppo.*

Dimostrazione Sia $\mathcal{S} = \{ f \in E_2 \text{ t.c. } f(F) = F \}$ l'insieme di tutte le simmetrie per F , tale insieme è non vuoto perché l'identità è una simmetria per F .

Supponiamo $f, g \in \mathcal{S}$ dobbiamo dimostrare che $f \circ g \in \mathcal{S}$

Per ipotesi $f(F) = F$ e $g(F) = F$ quindi $gf(F) = g(f(F)) = g(F) = F$ la composizione è quindi una simmetria.

Se $f \in \mathcal{S}$ anche l'inversa è in $\mathcal{S}$, infatti $f^{-1}(F) = f^{-1}(f(F)) = id(F) = F$.

Dunque $(\mathcal{S}, \circ)$ è un gruppo, in particolare è un sottogruppo di E_2 .

2 GRUPPI UNIFORMEMENTE DISCONTINUI

Nello studio delle isometrie risulta utile la conoscenza di eventuali **punti fissi**, ossia, quei punti che rimangono fissi dopo una trasformazione.

Osservazione Le traslazioni e le glissoriflessioni non hanno punti fissi, mentre le rotazioni e le riflessioni fissano un punto (o una linea).

Un sottogruppo dei movimenti rigidi del piano gode della proprietà di essere un gruppo uniformemente discontinuo se è definito nel seguente modo:

Definizione 2.1 *Un gruppo Γ d'isometrie piane si dice **uniformemente discontinuo** se $\forall F \in \Gamma$ e per ogni punto del piano $X \neq F(X)$ esiste $d > 0$ t.c. $|XF(X)| \geq d$.*

Il termine *uniforme* indica il fatto che d può essere scelto una volta, per tutti i punti X del piano.

Proposizione 2.1 *Sia $F \neq id$ un movimento rigido appartenente ad un gruppo uniformemente discontinuo Γ allora F non ha punti fissi.*

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che $F \in \Gamma$ abbia un punto fisso, cioè $F(O) = O$ per qualche O .

Sia X un punto del piano t.c. $|OX| < \frac{d}{2}$

$|OX| = |F(O)F(X)| = |OF(X)|$ quindi $|OF(X)| < \frac{d}{2}$

usando quest'ultimo risultato, l'ipotesi $|OX| < \frac{d}{2}$ e la disuguaglianza triangolare abbiamo che:

$|XF(X)| \leq |XO| + |OF(X)| < \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d$ ma ciò contraddice l'ipotesi di G.U.D. dove si deve avere che $|XF(X)| \geq d$.

Da quest'ultima proposizione segue il prossimo corollario:

Corollario 2.1 *Un gruppo Γ uniformemente discontinuo di movimenti rigidi del piano può contenere soltanto traslazioni e glissoriflessioni diversi dall'identità.*

Dimostrazione Essendo Γ un G.U.D. $\Rightarrow$ ogni $F \in \Gamma$ non ha punti fissi. Gli unici movimenti piani che non fissano dei punti sono la traslazione e la glissoriflessione diverse dall'identità.

Mentre rotazioni e riflessioni hanno punti fissi.

Osservazione 2.1 *Definiamo $\Gamma' = \{ \text{traslazioni} \} \subseteq \Gamma$, con Γ G.U.D. Essendo Γ' un gruppo, rispetto la composizione, si ha $\Gamma' \leq \Gamma$ (sottogruppo) quindi Γ' è un G.U.D.*

Corollario 2.2 *Sia Γ un G.U.D. di movimenti rigidi del piano, allora:*
(caso isometrie pari)

o $\Gamma = \Gamma'$ ha solo traslazioni distinte.

oppure (caso isometrie dispari, Γ' contiene glissoriflessioni)

$\Gamma' \subset \Gamma$ e se γ è una qualsiasi glissoriflessione di Γ allora gli altri movimenti di $\Gamma - \Gamma'$ sono tutte glissoriflessioni della forma $\tau\gamma$ con $\tau \in \Gamma'$.

Possiamo classificare i G.U.D. in base a quante traslazioni essi contengono:

Teorema 2.1 di classificazione dei gruppi uniformemente discontinui *Ci sono cinque diversi tipi di G.U.D. del piano e sono generati come segue:*

1. $\Gamma' = \{id\}$ abbiamo che $\Gamma = \langle E \rangle$

2. Γ' formato solo da traslazioni di vettori collineari

- Se $\Gamma' = \Gamma$ si ha $\Gamma = \langle \tau_{\vec{a}} \rangle$ con $a \neq 0$

- Se $\Gamma' \subset \Gamma$ si ha $\Gamma = \langle \gamma_l^{\frac{\vec{a}}{2}} \rangle$ con $l \parallel \vec{a}$

3. Γ' formato da traslazioni di vettori non collineari

- Se $\Gamma' = \Gamma$ si ha $\Gamma = \langle \tau_{\vec{a}}, \tau_{\vec{b}} \rangle$ con $a, b \neq 0$

- Se $\Gamma' \subset \Gamma$ si ha $\Gamma = \langle \tau_{\vec{a}}, \gamma_l^{\frac{\vec{b}}{2}} \rangle$ con $a, b \neq 0$, $a \perp b$, $b \parallel l$

Non sarà nostro compito dimostrare tale teorema ma andando avanti approfondiremo il terzo caso, fulcro del nostro lavoro, in quanto questi gruppi uniformemente discontinui ci forniscono due tipi di gruppi cristallorfici di movimenti del piano.

3 GRUPPI DISCRETI E GRUPPI ORNAMEN- TALI

Diamo ora alcuni teoremi, lemmi e definizioni che torneranno utili in seguito

Teorema 3.1 (*Teorema di addizione dell'angolo*)

- Una rotazione di Θ° seguita da una rotazione di Φ° è una:
rotazione di $(\Theta + \Phi)^\circ$ se $(\Theta + \Phi)^\circ \neq 0^\circ$
traslazione se $(\Theta + \Phi)^\circ = 0^\circ$.
- Una traslazione seguita da una rotazione di Θ° , diversa dall'identità, è una rotazione di Θ° .
- Una rotazione di Θ° , e diversa dall'identità, seguita da una traslazione è una rotazione di Θ° .
- Una traslazione seguita da una traslazione è una traslazione.

Definizione 3.1 Un punto $A \in E_2$ è **equivalente** ad un'altro punto A' del piano, rispetto ad un dato gruppo di movimenti Γ , se uno dei due punti deriva dall'altro per mezzo di un movimento del gruppo, ossia

$$A \text{ e } A' \text{ sono equivalenti} \iff \exists F \in \Gamma \text{ t.c. } F(A) = A' \text{ o viceversa}$$

Definizione 3.2 Se $\mathbf{A}$ è l'insieme dei punti equivalenti al punto a e $\mathbf{B}$ è l'insieme dei punti equivalenti al punto b , definiamo la distanza nel seguente modo:

$$|ab| = \min\{ |AB| \text{ t.c. } A \in \mathbf{A} \text{ e } B \in \mathbf{B} \}$$

Lemma 3.1 Sia $\mathbf{A}$ un insieme qualsiasi di punti equivalenti nel piano, allora qualsiasi disco nel piano contiene al più un numero finito di punti di $\mathbf{A}$

Sia Γ un gruppo uniformemente discontinuo, comunque scelto un qualsiasi punto X del piano e applicando ad esso tutti i movimenti rigidi in Γ , otteniamo un insieme discreto.

Definizione 3.3 Un gruppo di movimenti rigidi Γ si dice **discreto** se per ogni punto del piano A e per ogni $F \in \Gamma$ con $F(A) \neq A$ esiste $d(A)$ t.c. $d(A, F(A)) \geq d(A)$.

In generale un gruppo di movimenti si dice discreto se per ogni punto, in una regione finita, esiste solo un numero finito di punti equivalenti rispetto al gruppo.

Teorema 3.2 Se un gruppo discreto Γ ha un **punto fisso** allora Γ è finito.

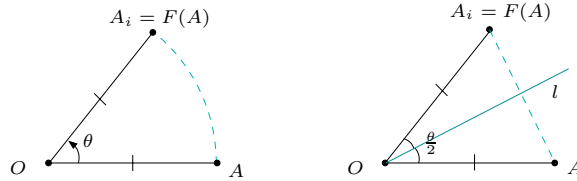
Dimostrazione Per ipotesi abbiamo che $O \in \Gamma$ t.c $F(O) = O$ per $F \in \Gamma$, ossia O è punto fisso.

Sia $A \neq O$ e $\mathbf{A}$ l'insieme dei punti equivalenti ad A mediante Γ , ogni punto di $\mathbf{A}$ è della forma $F(A)$.

Considerando il fatto che F è un movimento rigido (isometria) e che O è un punto fisso, abbiamo:

$$|OA| = |F(O)F(A)| = |OF(A)| \quad \forall A \in \mathbf{A}$$

Da cui segue che tutti i punti di $\mathbf{A}$ giacciono sulla circonferenza di centro



O e raggio $|OA|$, ossia nel disco $D(O, 2|OA|)$, Quindi l'insieme discreto $\mathbf{A}$ è finito e limitato (dal precedente lemma).

Sia $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \implies \forall F \in \Gamma \exists i = 1, \dots, n$ t.c.

$$F(O) = O \text{ e } F(A) = A_i$$

Dal teorema di Chasles segue che F è una rotazione di centro O e angolo $\widehat{AOA_i}$ oppure una riflessione rispetto alla bisettrice l di $\widehat{AOA_i}$.

Da ciò segue che il numero dei movimenti in Γ è al più $2n$ (n rotazioni, n riflessioni) e quindi è finito.

Abbiamo il seguente teorema, il quale afferma che i soli gruppi finiti di simmetrie sono i gruppi ciclici e diedrali.

Teorema 3.3 Teorema di Leonardo *Un gruppo finito d'isometrie Γ è un gruppo ciclico C_n o un gruppo diedrale D_n .*

Dimostrazione Per ipotesi Γ , essendo un gruppo finito, non contiene né traslazioni diverse dall'identità né glissoriflessioni (poiché esse generano un sottogruppo infinito di Γ).

Dunque Γ contiene solo rotazioni e riflessioni.

Consideriamo dapprima il caso in cui Γ contenga solo rotazioni.

Vogliamo dimostrare che tutte le rotazioni devono avere lo stesso centro.

Supponiamo per assurdo che ci siano due rotazioni con centri diversi, siano $\rho_{O,\theta}, \rho_{B,\phi} \in \Gamma$ (diverse dall'identità) tali rotazioni con $O \neq B$, il movimento $\rho_{B,\phi}^{-1} \rho_{O,\theta}^{-1} \rho_{B,\phi} \rho_{O,\theta} \in \Gamma$ da quest'ultimo otteniamo due rotazioni di centri diversi e di angoli $(-\theta - \phi)$ e $(\theta + \phi)$, la cui somma è zero, dunque per il teorema di addizione dell'angolo tale prodotto è una traslazione diversa dall'identità e questo è assurdo.

Quindi gli elementi del gruppo sono tutte rotazioni di centro O .

Sia $\rho_{O,\theta}(A) = A_1$ con A_1 minima distanza da A (ossia il minimo angolo di rotazione), tutti i punti equivalenti ad A si troveranno sulla circonferenza di centro O passante per A .

Essendo il gruppo discreto, esiste solo un numero finito n di punti equivalenti ad A , dunque $\widehat{AOA_1} = \frac{2\pi}{n}$ è l'angolo di ampiezza minima e tutti i movimenti di Γ sono rotazioni di ampiezza un multiplo (positivo o negativo) di quest'ultimo, ossia gli elementi di Γ sono esattamente le potenze $\rho^k = (\rho_{O,\frac{2\pi}{n}})^k = \rho_{O,\frac{2k\pi}{n}}$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Essendo le rotazioni isometrie pari ed esse formano un gruppo, abbiamo così il sottogruppo ciclico finito

$$C_n = \langle \rho_{O,\frac{2\pi}{n}} \rangle = \{\rho, \rho^2, \dots, \rho^n = id\}$$

Vediamo ora il caso in cui Γ , oltre alle rotazioni, contenga una riflessione σ : le n isometrie dispari $\rho\sigma, \rho^2\sigma, \dots, \rho^n\sigma \in \Gamma$, quindi Γ contiene $2n$ elementi

generati dalla rotazione ρ e dalla riflessione σ .

Se $n = 1$, allora $\Gamma = \langle \sigma \rangle$ altrimenti $\rho\sigma$ deve essere una riflessione rispetto ad un asse passante per il centro O .

Concludiamo che il gruppo finito d'isometrie che contiene una riflessione è un gruppo diedrale $D_n = \langle \rho, \sigma \rangle = \{id, \rho, \dots, \rho^{n-1}, \sigma, \rho\sigma, \dots, \rho^{n-1}\sigma\}$.
(osserviamo che $\rho^n = \sigma^2 = id$).

Dunque tutti i gruppi discreti, finiti, di Γ che fissano un punto O sono sostanzialmente di due tipi:

$$C_n = \langle \rho_{O, \frac{2\pi}{n}} \rangle = \{ \rho_{O, \frac{2k\pi}{n}} \text{ t.c. } k \in \mathbb{Z} \}$$

consiste di tutte le rotazioni di centro O e angolo $\frac{2k\pi}{n}$ di un poligono regolare di n lati.

$$D_n = \langle \rho, \sigma \rangle = \{id, \rho, \dots, \rho^{n-1}, \sigma, \rho\sigma, \dots, \rho^{n-1}\sigma\}$$

consiste di tutte le riflessioni di assi passanti per O e formanti un angolo di $\frac{k\pi}{n}$.

Questi gruppi finiti d'isometrie del piano che possono contenere solo rotazioni e riflessioni sono chiamati **gruppi di rosoni**.

Ora ci occuperemo dei gruppi discreti di isometrie piane che non sono finiti e che dovranno, dunque, contenere almeno una traslazione (e quindi infinite, ottenute per applicazione ripetuta di una di esse). Quest'ultime dipendono dal sottogruppo delle traslazioni.

Se tale sottogruppo è generato da una sola traslazione i modelli di simmetria si estendono, indefinitamente ripetuti, in una direzione riempiendo una striscia di piano e vengono detti **fregi**. Nel caso in cui il sottogruppo delle traslazioni è generato da due traslazioni indipendenti, si hanno i cosiddetti **gruppi cristallografici piani** (o **mosaici**, oppure anche **gruppi di carte da parati**, come sono detti in ambienti e con scopi diversi).

Esistono sostanzialmente, dunque, tre tipi di gruppi discreti a seconda della

grandezza del sottogruppo delle traslazioni Γ' :

Un grupo discreto Γ viene classificato in base al suo sottogruppo delle traslazioni nel seguente modo:

1. non contiene nessuna traslazione ma rotazioni e riflessini

$$\Gamma = \langle E_2 \rangle \quad \textbf{gruppi dei rosoni}$$

2. contiene traslazioni di vettori collineari $\Gamma' = \{\tau_{\vec{v}} \text{ t.c. } \vec{v} = n \vec{a}, n \in \mathbb{Z}\}$

$$\Gamma = \langle \tau_{\vec{a}} \rangle \quad \textbf{gruppi dei fregi}$$

3. contiene traslazioni di vettori non collineari

$$\Gamma' = \{\tau_{\vec{v}} \text{ t.c. } \vec{v} = n \vec{a} + m \vec{b}, a \nparallel b, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Gamma = \langle \tau_a, \tau_b \rangle \quad \textbf{gruppi cristallografici}$$

Il primo punto è stato precedentemente affrontato, dunque, ora ci occuperemo del punto successivo enunciando, ma senza dare una rigorosa dimostrazione, il teorema di classificazione dei gruppi di fregi.

La parola fregio in matematica indica una figura piana il cui gruppo di simmetria (cioè l'insieme di quelle trasformazioni del piano che lasciano invariate le distanze e mutano la figura in se stessa) contiene delle traslazioni, ma solo traslazioni unidirezionali e tutte multiple di una traslazione-base. Una tale figura è necessariamente illimitata.

Per i fregi, oltre alle traslazioni, ci sono altre simmetrie che ne vengono aggiunte per composizione. Consideriamo simmetrie sotto cui tali modelli sono invarianti per traslazione, vedremo che ci sono solo 7 possibili tipi di fregi ornamentali.

Definizione 3.4 *Un gruppo di **fregi** con centro c è un gruppo d'isometrie che fissa una data retta c e le cui traslazioni formano un gruppo ciclico infinito.*

Teorema 3.4 *Sia $\mathcal{F}$ un gruppo di fregi con centro c dove le traslazioni formano il gruppo generato da τ .*

Se $\mathcal{F}$ contiene una rotazione di 180° , si supponga che $\mathcal{F}$ contenga σ_A ;

se $\mathcal{F}$ contiene una riflessione di asse $\perp c$, si supponga che $\mathcal{F}$ contenga σ_a con $a \perp c$.

Sia γ la glissoriflessione con asse c t.c. $\gamma^2 = \tau$ allora $\mathcal{F}$ è uno dei seguenti gruppi distinti:

$$\mathcal{F}_1 = \langle \tau \rangle \quad \mathcal{F}_1^1 = \langle \tau, \sigma_c \rangle \quad \mathcal{F}_1^2 = \langle \tau, \sigma_a \rangle \quad \mathcal{F}_1^3 = \langle \gamma \rangle$$

$$\mathcal{F}_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle \quad \mathcal{F}_2^1 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \rangle \quad \mathcal{F}_2^2 = \langle \gamma, \sigma_A \rangle$$

Fissiamo A un punto qualunque di $\mathcal{F}$, a distanza finita da A ci sono solo un numero finito di punti equivalenti ad esso e deve esistere un punto A_1 avente distanza minima da A (essendo $\mathcal{F}$ discreto).

Traslando A di una lunghezza $|AA_1|$ lungo la retta c passante per A e A_1 abbiamo che:

$A_i = \tau^i(A)$ con $A_0 = A$ dunque $\tau^n(A_i) = \tau^{n+i}(A)$ ogni traslazione in $\mathcal{F}$ deve mandare ogni A_i in qualche A_j .

Sia M il punto medio di A e A_1 e sia $M_i = \tau^i(M)$ quindi M_i è il punto medio di A_i e A_{i+1} e anche il punto medio di A_0 e A_{2i+1} .

Consideriamo dapprima il caso in cui $\mathcal{F}$ contenga solo traslazioni di vettori collineari.

Otteniamo una serie di punti equidistanti tutti equivalenti ad A , perché derivano da A applicando una o più traslazioni τ (o τ^{-1}) lungo la retta c .

Dunque $\mathcal{F}_1 := \langle \tau_{A,A_1} \rangle$.

Tale modello di fregio non ha punti di simmetria, non ha linee di simmetria e non è fissato da una glissoriflessione.

Oltre alle traslazioni le uniche isometrie pari che fissano c sono le rotazioni di 180° con centro appartenente a c . Supponiamo che $\mathcal{F}$ contenga tali rotazioni. Per ipotesi $\sigma_A \in \mathcal{F}$. Abbiamo che $\sigma_M \in \mathcal{F}$ poiché $\sigma_M = \tau \sigma_A \in \mathcal{F}$, dunque dal teorema precedente M è centro di rotazione di ordine due e si ha anche che $\mathcal{F}$ contiene $\sigma_{A_i,180}$ e $\sigma_{M_i,180} \forall i$.

Supponiamo che P sia il centro di una qualche rotazione di 180° in $\mathcal{F}$ $P \neq A$ allora $\sigma_P \sigma_A = \tau^n \in \mathcal{F}$ (per il teorema di addizione dell'angolo) quindi $\sigma_P \sigma_A(A) = \tau^n(A) = A_n$ per qualche n , ricaviamo $\sigma_P(A) = A_n$ e P è il punto medio di A e A_n .

Quindi $\mathcal{F}$ contiene esattamente le rotazioni $\sigma_{A_i, 180}$ e $\sigma_{M_i, 180}$.

Sia $\mathcal{F}_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle$.

Poiché $\sigma_M = \tau \sigma_A$ è un'involuzione (ossia $\sigma_M^2 = id$) abbiamo quindi $(\tau \sigma_A)^2 = id$ allora $\tau \sigma_A = (\tau \sigma_A)^{-1} = \sigma_A^{-1} \tau^{-1} = \sigma_A \tau^{-1}$ quindi ogni elemento in $\mathcal{F}_2$ è della forma τ^i o $\sigma_A \tau^i$.

Ogni elemento in $\sigma_A^j \tau^i$, $\mathcal{F}_2$ può essere della forma $\mathcal{F}_2 = \langle \sigma_A, \sigma_M \rangle$ poiché $\sigma_M \tau = \sigma_A$.

Un modello di fregio avente $\mathcal{F}_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle$ come gruppo di simmetria ha un punto di simmetria ma non linee di simmetria.

Se $\mathcal{F}$ contiene solo isometrie pari allora $\mathcal{F}$ deve essere $\mathcal{F}_1$ oppure $\mathcal{F}_2$.

Le altre possibilità per $\mathcal{F}$ si ottengono aggiungendo a $\mathcal{F}_1$ oppure a $\mathcal{F}_2$, isometrie dispari e quindi riflessioni o glissoriflessioni (considerando che una glissoriflessione è composizione di tre riflessioni).

Aggiungiamo, dunque, riflessioni tenendo presente che σ_l fissa $c \Leftrightarrow l = c$ o $l \perp c$.

1. Cominciamo dal caso in cui $\mathcal{F}$ **non contenga rotazioni**, ossia aggiungiamo per composizione una riflessione di asse $l = c$ a $\mathcal{F}_1 = \langle \tau \rangle$.

Otteniamo $\mathcal{F}_1^1 = \langle \tau, \sigma_c \rangle$.

Poiché $\tau \sigma_c = \sigma_c \tau$ allora $\mathcal{F}_1^1$ è abeliano e ogni elemento è della forma $\sigma_c^j \tau^i$.

$\mathcal{F}_1^1$ contiene la glissoriflessione $\gamma_c(A) = A_n$ che manda A in A_n .

Un modello di fregio avente $\mathcal{F}_1^1$ come gruppo di simmetria non ha punti di simmetria e il centro è una linea di simmetria.

Aggiungiamo ad $\mathcal{F}_1$ riflessioni di asse $a \perp c$ passante per A .

Sia $\mathcal{F}_1^2 = \langle \tau, \sigma_a \rangle$ dove $a \perp c$ in A . Poiché $\tau \sigma_a = \sigma_a \tau^{-1}$ allora ogni

elemento di $\mathcal{F}_1^2$ è della forma $\sigma_a^j \tau^i$.

$\mathcal{F}_1^2$ non contiene σ_c ma contiene le riflessioni di asse $\perp c$ passanti per A_i oppure per M_i .

Un modello di fregio avente $\mathcal{F}_1^2$ come gruppo di simmetria non ha punti di simmetria, ha una linea di simmetria ma il centro non è una linea di simmetria.

Sia $\mathcal{F}_1^3 = \langle \gamma \rangle$ dove γ è la glissoriflessione con asse c t.c. $\gamma^2 = \tau$.

Un modello di fregi avente $\mathcal{F}_1^3$ come relativo gruppo di simmetria non ha punti di simmetria, non ha linee di simmetria ma è fissato da una glissoriflessione.

2. Consideriamo ora il caso in cui $\mathcal{F}$ **contenga rotazioni**, ossia aggiungiamo per composizione una riflessione di asse $l = c$ a $\mathcal{F}_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle$.

Sia $\mathcal{F}_2^1 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \rangle$.

Poiché σ_c commuta sia con τ che con σ_A allora ogni elemento di $\mathcal{F}_2^1$ è della forma $\sigma_c^k \sigma_A^j \tau^i$.

$\mathcal{F}_2^1$ contiene la glissoriflessione $\sigma_c \tau^n(A) = A_n$ che manda A in A_n .

$\mathcal{F}_2^1$ contiene anche $\tau^{2i} \sigma_A \sigma_c$ che è la riflessione di asse $\perp$ a c passante per A_i . $\mathcal{F}_2^1$ contiene, inoltre, $\tau^{2i+1} \sigma_A \sigma_c$ che è la riflessione di asse $\perp$ a c passante per M_i .

Se $a \perp c$ passante per A allora $\mathcal{F}_2^1 = \langle \tau, \sigma_a, \sigma_c \rangle$.

Un modello di fregio avente $\mathcal{F}_2^1$ come gruppo di simmetria ha un punto di simmetria e il centro è una linea di simmetria.

Supponiamo di aggiungere riflessioni il cui asse non passi né per alcun punto medio M_i né per alcun punto A_i , ma sia perpendicolare a c e passante per il punto medio di $\overline{AM}$ abbiamo $\mathcal{F}_2^2 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_p \rangle$ dove p è l'asse della riflessione.

Si noti che $\mathcal{F}_2^2$ contiene la glissoriflessione $\sigma_p \sigma_A$ con asse c che manda porta A in M .

Sia $\gamma = \sigma_p \sigma_A$ quindi $\tau = \gamma^2$ e $\sigma_p = \gamma \sigma_A$ allora $\mathcal{F}_2^2 = \langle \gamma, \sigma_A \rangle$ non

contiene σ_c . Un modello di fregio avente $\mathcal{F}_2^2$ come gruppo di simmetria ha un punto di simmetria, una linea di simmetria ma il centro non è una linea di simmetria.

3.1 GRUPPI CRISTALLOGRAFICI

Occupiamoci ora di quei gruppi discreti d'isometrie piane, il cui sottogruppo delle traslazioni è generato da due elementi indipendenti, che prendono il nome di **gruppi di carte da parati** (o gruppi cristallografici), essi ricoprono in maniera uniforme e regolare tutto il piano per ripetizione di un modulo. Nel caso di questi gruppi, la richiesta di compatibilità fra le simmetrie locali del modulo e la simmetria globale della figura piana si esprime mediante un risultato fondamentale, detto di restrizione cristallografica, che fissa la forma dei possibili reticoli piani lungo i quali il modulo può essere trasferito per traslazione.

Un gruppo wallpaper (carta da parati) $\mathcal{W}$ è un gruppo d'isometrie le cui traslazioni sono esattamente quelle generate da $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ dove se $\tau_1 = \tau_{A,B}$ e $\tau_2 = \tau_{A,C}$ allora A, B, C sono punti non collineari.

Definizione 3.5 *Un gruppo cristallografico piano (o Wallpaper groups) $\mathcal{W}$ è un gruppo d'isometrie che soddisfa le seguenti proprietà:*

1. $\forall$ punto del piano A e $\forall F \in \mathcal{S}$ con $F(A) \neq A$
 $\exists d(A)$ t.c. $d(A, F(A)) \geq d(A)$
dove $\mathcal{S}$ è il gruppo delle simmetrie del cristallo.
(Tale proprietà equivale a dire che $\mathcal{S}$ è **discreto**)
2. Il gruppo delle traslazioni è generato da due isometrie tra loro distinte.

Lemma 3.2 *Un gruppo d'isometrie del piano il cui sottogruppo delle traslazioni è generato da due isometrie distinte, è un gruppo cristallografico.*

Definizione 3.6 *Un **reticolo** per $\mathcal{W}$ determinato dal punto A è l'insieme di tutte le immagini determinate da A sotto le traslazioni in $\mathcal{W}$.*

Poiché ogni traslazione in $\mathcal{W}$ è della forma $\tau_2^j \tau_1^i$, allora tutti i punti $A_{i,j}$ formano un reticolo, dove $A_{i,j} = \tau_2^j \tau_1^i(A)$

Definizione 3.7 Una **cella unitaria** per $\mathcal{W}$ rispetto al punto A generante le traslazioni τ_1, τ_2 è una regione quadrilatera con vertici $A_{i,j}, A_{i+1,j}, A_{i,j+1}$ e $A_{i+1,j+1}$.

Osservazione 3.1 I vettori che formano i lati di una cella unitaria, generano il gruppo delle traslazioni del disegno.

Una cella unitaria è sempre una regione quadrilatera determinata da un parallelogramma.

Un reticolo con una cella unitaria rettangolare è chiamato rettangolare.

Un reticolo con una cella unitaria rombica è chiamato rombico.

Definizione 3.8 Una **regione generatrice** (o base poligonale) per $\mathcal{W}$ è la più piccola regione poligonale del piano le cui immagini, sotto l'intero gruppo delle simmetrie, ricoprono tutto il piano.

Ossia t è una tale regione se $\{\alpha(t)/\alpha \in \mathcal{W}\}$ è un ricoprimento.

Definizione 3.9 Un punto P è un **n -centro** per un gruppo d'isometrie G , se le rotazioni con centro P in G , formano un gruppo ciclico infinito C_n con $n > 1$.

Definizione 3.10 Una **figura** è un insieme non vuoto di punti

Osservazione 3.2 Se il punto P è un n -centro per il gruppo di simmetrie di una figura allora P è anche chiamato n -centro per la figura.

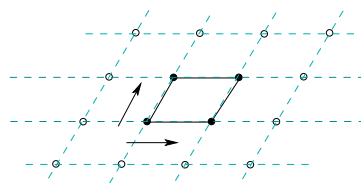
3.2 RETICOLI

In questa sezione daremo un'idea di ciò che vogliamo fare e successivamente daremo una formulazione più matematica di tali concetti.

Costruzione di un reticolo

Un reticolo piano è costituito da un insieme di punti *discreto*.

Per costruirlo, mettiamo in evidenza in un piano, i quattro vertici di una cella unitaria, poi trasliamo la cella parallelamente rispetto ad uno dei suoi lati di un tratto pari alla lunghezza del lato stesso e mettiamo in evidenza i due nuovi punti così ottenuti. Immaginiamo di continuare questo procedimento indefinitivamente nella stessa direzione e in quella contraria.



Otteniamo dunque una striscia formata da due serie di punti equidistanti. Spostando questa striscia perpendicolarmente a se stessa di un tratto uguale alla lunghezza del lato della cella, mettendo in evidenza i nuovi punti ottenuti e ripetendo questo procedimento indefinitivamente da entrambe le direzioni, otteniamo così il reticolo come l'insieme dei punti (che chiameremo nodi) a coordinate intere.

Equivalentemente possiamo partire, anziché da un parallelogrammo, da un qualsiasi punto del piano A_1 applicando ad esso una traslazione di modulo costante τ_1 lungo un'arbitraria retta a giacente sul piano; ottenendo così un insieme di punti equivalenti A_2, A_3 , etc. (che indicheremo con il nome di **filare**). Se trasliamo i punti ottenuti, sempre di una quantità costante τ_2 non necessariamente uguale al modulo di τ_1 e indipendente da esso, lungo la retta b del piano; si ottiene un sistema infinito di filari con τ_1 e τ_2 periodi di traslazione minima o periodo d'identità, rispettivamente sulla retta a e b .

In base al gruppo di simmetria che possiede la cella considerata, si possono formare diversi tipi di figure (quadrati, rombi, rettangoli, etc.) lasciando

invariato il sistema di nodi originario.

Dunque un reticolo può essere generato da un qualsiasi parallelogrammo purché esso non contenga, né al suo interno né sui lati, alcun nodo del reticolo (oltre ai vertici), altrimenti non avremmo tutti i nodi del reticolo stesso.

Questa viene chiamata **cella generatrice**.

Tutti i nodi del reticolo sono traslazionalmente equivalenti.

Nel piano sono possibili cinque diversi tipi di reticoli irriducibili tra loro, nel senso che non esiste nessuna isometria in grado di trasformare uno di questi tipi di reticolo in un altro.

Un risultato molto importante che ci permette di determinare gli angoli ammissibili per le simmetrie rotazionali (ossia quelle isometrie che portano il reticolo in se stesso attraverso una rotazione) e classificare, successivamente, le simmetrie di un reticolo piano in base alla forma del parallelogramma di base è il teorema di restrizione cristallografica.

Vedremo che esistono 5 possibili tipi di simmetrie per un reticolo in relazione a 5 forme di celle diverse. Quattro di queste celle vengono dette **primitive**, poiché non contengono nodi al loro interno e nella notazione cristallografica vengono denotate dalla lettera **p**, mentre la rimanente viene detta **centrata**, poiché dotata di un nodo nel suo baricentro per quest'ultima viene adottata la lettera **c**.

Se τ_1 e τ_2 rappresentano i vettori generatori del reticolo, tali celle sono:

1. **Cella obliqua** (a forma di parallelogramma $|\tau_1| \neq |\tau_2|$);

Il reticolo corrispondente si dice **obliquo** e presenta solamente simmetrie di traslazione e simmetrie di rotazione di ordine 1 e 2.

2. **Cella rettangolare** ($\tau_1 \perp \tau_2$, $|\tau_1| \neq |\tau_2|$);

Il reticolo si dice **rettangolare** e presenta simmetrie traslazionali, rotazionali di ordine 2 e riflessioni.

3. **Cella rettangolare centrata** ($|\tau_1| \neq |\tau_2|$);

Il reticolo presenta simmetrie traslazionali, rotazionali di ordine 2, riflessioni e glissoriflessioni.

4. **Cella quadrata** ($\tau_1 \perp \tau_2$, $|\tau_1| = |\tau_2|$);

Il reticolo si dice **quadrato** e presenta simmetrie traslazionali, rotazionali di ordine 2 e 4 e riflessioni.

5. **Cella esagonale** (rombo con angoli di 120° e 60° , $|\tau_1| = |\tau_2|$);

Il reticolo si dice **esagonale** e presenta simmetrie traslazionali, rotazionali di ordine 2, 3 e 6, riflessioni e glissoriflessioni.

Oltre ai punti di rotazione, i reticoli possono ammettere assi di riflessione e/o glissoriflessione.

L'asse di riflessione è una retta **m** rispetto alla quale per ogni nodo del reticolo esiste lo speculare rispetto ad **m** (tale asse verrà rappresentato con un tratto continuo).

L'asse di glissoriflessione, invece, è una retta **g** rispetto alla quale per ogni nodo del reticolo esiste lo speculare traslato di metà periodo d'identità dei filari parallelo alla retta **g**. (tale asse verrà rappresentato con tratto discontinuo).

Le combinazioni possibili dei vettori di traslazione con gli altri elementi di simmetria, rappresentano i gruppi cristallografici. Nel piano ne esistono 17 e corrispondono alle combinazioni dei cinque reticoli con gli elementi di simmetria 1, 2, 3, 4, 6, **m**, **g**.

Si darà infine, così, la classificazione dei 17 gruppi cristallografici attraverso il **teorema di Fedorov**.

Ad ogni gruppo cristallografico piano, verrà associata una notazione cristallografica che sfrutta caratteri e numeri i quali stanno ad indicare il tipo di cella unitaria del reticolo e le rispettive simmetrie.

-Il primo elemento di questo simbolo è una lettera, **p** o **c**, che individua il tipo di cella del reticolo riferendosi rispettivamente ad una cella **primitiva** o **centrata**.

-il secondo è un numero **n** che sta ad indicare l'ordine massimo del punto di rotazione associato al reticolo.

-Il terzo, invece, denota una simmetria assiale normale al lato sinistro della cella, il suo simbolo è uno dei seguenti:

- **m** che sta ad indicare un asse di riflessione o di glissoriflessione o entrambi,
- **g** indica che non ci sono assi di riflessione ma esiste un'asse di glissoriflessione,
- **1** indica che non ci sono assi di simmetria.

Infine abbiamo un quarto carattere, anche per esso viene adottato uno dei tre simboli precedentemente descritti, a differenza, che denota un asse di simmetria posto ad un angolo $\alpha = 180^\circ$ se $n = 1$ oppure $n = 2$, $\alpha = 45^\circ$ se $n = 4$, $\alpha = 60^\circ$ se $n = 3$ oppure a 6.

Dunque vedremo che all'unico **reticolo obliquo** primitivo è possibile associare soltanto punti di rotazione di ordine 1 e 2. Si ottengono così i gruppi spaziali indicati simbolicamente con **p1** e **p2** (dove in **p1** è presente la sola operazione identità e quindi un punto materiale viene ripetuto soltanto dai vettori di traslazione del reticolo).

Al reticolo **rettangolare**, che può essere primitivo o centrato, è possibile associare riflessioni e glissoriflessioni. Si prendono dunque in esame le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned} &\mathbf{pm}, \mathbf{pg}, \mathbf{cm}, \mathbf{cg}; \\ &\mathbf{pmm}, \mathbf{pmg}, \mathbf{cmm}, \mathbf{cmg}, \mathbf{cgg}. \end{aligned}$$

Osservando che **cm** $\equiv$ **cg**, **cmm** $\equiv$ **cmg** $\equiv$ **cgg**.

Nel reticolo **quadrato** al punto di rotazione di ordine quattro è possibile associare o no una linea di riflessione o glissoriflessione; i gruppi spaziali sono quindi:

$$\mathbf{p4}, \mathbf{p4m}, \mathbf{p4g}.$$

Il reticolo **esagonale** primitivo è compatibile con i punti di rotazione 3 e 6, combinati o no con una riflessione; si hanno quindi i seguenti gruppi spaziali:

p3, p3m1, p31m, p6, p6m.

Dunque i 17 gruppi spaziali bidimensionali sono:

p1, p2;

pm, pg, pmmm, pmg, pgg, cmm;

p4, p4m, p4g;

p3, p3m1, p31m, p6, p6m.

Inoltre, nelle figure che utilizzeremo sia per la teoria della classificazione dei gruppi cristallografici che per analizzare le immagini di Escher, rappresenteremo con un triangolino il punto dove viene a trovarsi un 3-centro, con un quadratino il punto dove viene a trovarsi un 4-centro e per i 6-centri ed i 2-centri verranno utilizzati rispettivamente un cerhietto ed un piccolo esagono.

Rappresenteremo, infine, con una linea continua l'asse di riflessione e con una linea tratteggiata l'asse di glissoriflessione.

Tutti gli assi di simmetria che si vedono nelle figure, risulteranno dalla combinazione di traslazioni e rotazioni con le simmetrie indicate nel terzo e quarto posto.

Proprietà di un reticolo:

- Ogni reticolo ammette infiniti assi di traslazione: ogni retta che passa per due nodi qualsiasi del reticolo è infatti un possibile asse di traslazione.
- Qualunque asse di traslazione è detto filare del reticolo e la minima distanza tra due nodi lungo un filare è detta periodo di identità del filare stesso.
- In un reticolo tutti i filari tra loro paralleli hanno lo stesso periodo di identità.
- Dato un reticolo, due punti del piano sono detti equivalenti rispetto al reticolo se possono essere ottenuti l'uno dall'altro per traslazione parallela ad un filare del reticolo e la loro distanza è un multiplo del periodo di identità del filare.

Un reticolo può possedere anche simmetrie per rotazione. Gli angoli θ delle rotazioni che sono simmetrie di un reticolo ammettono sempre multipli interi $n\theta$ coincidenti con multipli interi dell'angolo giro.

Nel seguito per ordine della rotazione intendiamo il minimo positivo di tali interi n .

- Ciascun nodo del reticolo, o punto medio dei lati, o baricentro di qualunque maglia è il centro di una simmetria rotazionale di ordine 2. Ciò deriva dal fatto che ciascun nodo del reticolo è sempre affiancato, in ogni filare che lo contenga, da due nodi equidistanti.
- Se un punto P del piano è centro di una simmetria rotazionale di ordine n compatibile con un reticolo, allora ogni punto equivalente rispetto al reticolo è anch'esso centro di una simmetria rotazionale di ordine n .

Il nostro compito è di dimostrare che un reticolo è necessariamente rettangolare o rombico quando $\mathcal{W}$ contiene **isometrie dispari** (ossia riflessioni e glissoriflessioni).

Teorema 3.5 *Se un gruppo cristallografico $\mathcal{W}$ contiene una riflessione σ_l , allora l appartiene ad una diagonale di una cella unitaria rombica per $\mathcal{W}$ o altrimenti l è parallela ad un lato di una cella unitaria per $\mathcal{W}$.*

Dunque $\mathcal{W}$ ha un reticolo che è romboidale o rettangolare.

Dimostrazione Per ipotesi $\sigma_l \in \mathcal{W}$ vorremmo mostrare che l sia parallela ad una diagonale di una cella rombica oppure ad un lato di una cella unitaria rettangolare.

Sia $A \in l$, sia $\tau_{A,P} \neq id$ la più piccola traslazione in $\mathcal{W}$.

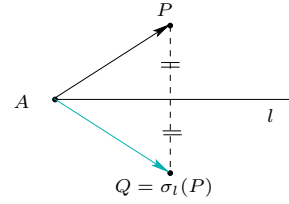
Ci sono due casi:

1. $\overleftrightarrow{AP}$ non giace su l e non è perpendicolare ad l .

Sia $Q = \sigma_l(P)$ allora $\tau_{A,Q} \in \mathcal{W}$, poiché

$$\tau_{A,Q} = \tau_{A,\sigma_l(P)} = \sigma_l \tau_{A,P} \sigma_l^{-1}.$$

Infatti $AP = AQ$ ed i punti A, P, Q non sono collineari, allora $\langle \tau_{A,P}, \tau_{A,Q} \rangle$ è il gruppo di tutte le traslazioni in $\mathcal{W}$ e l contiene una diagonale di una cella unitaria rombica.

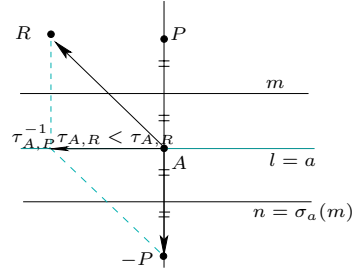


2. $\overleftrightarrow{AP}$ giace su l oppure è perpendicolare ad l .

Sia $a \perp \overleftrightarrow{AP}$ dove la retta a passa per il punto A , sia m l'asse di simmetria perpendicolare ad $\overleftrightarrow{AP}$ e sia $n = \sigma_a(m)$.

Sia $\tau_{A,R}$ una traslazione più piccola in $\mathcal{W}$ che non sia in $\langle \tau_{A,P} \rangle$ allora R appartiene ad m o ad n , oppure è tra entrambe.

Altrimenti avremmo $\tau_{A,P}^{\pm 1} \tau_{A,R} < \tau_{A,R}$ che per come abbiamo scelto $\tau_{A,R}$ non può essere. Inoltre considerando sia $\tau_{A,R}$ che

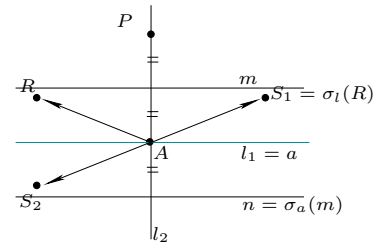


il suo inverso, potremmo supporre che $\tau_{A,R}$ è t.c. $R \in m$ o ad a , oppure

R è tra m ed a e che $S = \sigma_l(R)$.

Si supponga che R stia tra m ed a , in tal caso arriveremo a degli assurdi, infatti:

a) se $\overleftrightarrow{AP}$ giace su l , allora $\tau_{A,S} \tau_{A,R}(A) = \tau_{A,S}(R)$ è una traslazione in $\mathcal{W}$ più piccola



b) se $\overleftrightarrow{AP}$ è perpendicolare ad l , allora $\tau_{S,A}\tau_{A,R}(A) = \tau_{S,A}(R)$ è una traslazione in $\mathcal{W}$ più piccola di $\tau_{A,P}$; anche questo è un assurdo.

Se $R \in m$ poiché $\tau_{A,P} = \tau_{A,S}\tau_{A,R}$, sarà $\langle \tau_{A,R}, \tau_{A,S} \rangle = \langle \tau_{A,P}, \tau_{A,R} \rangle$. Ossia l è parallela ad una diagonale della cella romboidale, $ARPS_1$, generata dalle traslazioni $\tau_{A,R}$ e $\tau_{A,S}$.

Sarà utile, per i nostri studi, considerare inoltre il seguente lemma, derivante dal teorema di classificazione dei fregi.

Teorema 3.6 *Se il gruppo cristallografico $\mathcal{W}$ contiene una glissoriflessione γ_l , allora $\mathcal{W}$ ha un reticolo di traslazione rombico o rettangolare.*

Supponiamo che $\tau_{A,B}$ sia la traslazione più piccola in $\mathcal{W}$ che non sia in

$< \gamma_l^2 >$. Poiché $\tau_{A,P}^{\pm 1} \tau_{A,B}$ non può essere più piccola di $\tau_{A,B}$, potremo supporre che $B \in a$ oppure giaccia tra a e p .

- Se $B \in a$ allora $\mathcal{W}$ ha un reticolo di traslazione rettangolare ed l è parallela ad un lato di una cella unitaria rettangolare.
- se B è tra a e p e $C = \sigma_l(B)$, allora $\tau_{A,C} \in \mathcal{W}$ poiché $\tau_{A,C} = \gamma_l \tau_{A,B} \gamma_l^{-1} \in \mathcal{W}$. Quindi se $B \in m$ si ha $\tau_{A,C} \tau_{A,B} = \gamma_l^2$. Dunque $ABPC$ è una cella unitaria rombica la cui diagonale contiene l .

Teorema 3.7 *Se una glissoriflessione $\gamma_l \in \mathcal{W}$ fissa un reticolo per $\mathcal{W}$, allora il gruppo cristallografico $\mathcal{W}$ contiene una riflessione.*

Dimostrazione Se la glissoriflessione γ_l manda il punto A nel punto P , $\gamma_l(A) = P$, in un reticolo determinato da A per il gruppo cristallografico $\mathcal{W}$, allora $\tau_{P,A} \gamma_l$ deve essere una riflessione poiché il loro prodotto è un'isometria dispari che fissa il punto A .

Questo termina gli ultimi risultati utili per le isometrie dispari in un gruppo cristallografico $\mathcal{W}$.

Passiamo ora alle isometrie pari, in particolar modo alle *rotazioni*:

Esaminando gli n -centri per un gruppo si ottengono cose vantaggiose e interessanti.

Teorema 3.8 *Sia G un gruppo d'isometrie, per un dato n , se il punto P è un n -centro per G e tale gruppo contiene un'isometria che manda P in $Q \implies Q$ è un n -centro per G .*

Se l è un'asse di simmetria per una figura ed il gruppo di simmetria per la figura contiene un'isometria che manda l in m allora m è un'asse di simmetria per la figura.

Dimostrazione Per un dato n l'insieme degli n -centri deve essere fissato da ogni isometria nel gruppo.

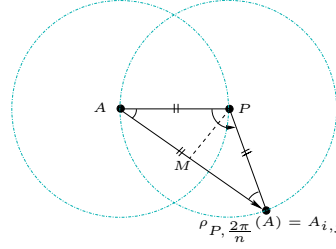
Per vedere questo, si supponga $\alpha(P) = Q$ per qualche isometria α nel gruppo G . Da $\alpha\rho_{P,\Theta}\alpha^{-1} = \rho_{Q,\pm\Theta}$ e $\alpha^{-1}\rho_{Q,\Phi}\alpha = \rho_{P,\pm\Phi}$ vediamo che Q è un n -centro $\iff P$ è un n -centro (per lo stesso n)

Enunciamo e dimostriamo il seguente teorema ci consente di stabilire l'esistenza di una traslazione, minima, tra due punti di rotazione

Teorema 3.9 *Se $\rho_{A,\frac{360}{n}}$ e $\rho_{P,\frac{360}{n}}$ con $P \neq A$ e $n > 1$ sono due rotazioni appartenenti ad un gruppo cristallografico $\mathcal{W}$, allora $2|AP| \geq \tau \neq id$, $\tau \in \mathcal{W}$.*

Dimostrazione Per ipotesi abbiamo che $\rho_{A,\frac{360}{n}}$ e $\rho_{P,\frac{360}{n}}$ con $P \neq A$ e $n > 1$ sono elementi di $\mathcal{W}$ dunque, dalla definizione di gruppo, il prodotto $\rho_{P,\frac{360}{n}}\rho_{A,\frac{-360}{n}}$ è contenuto in $\mathcal{W}$ e per il teorema di addizione dell'angolo esso è uguale ad una traslazione diversa dall'identità, ossia, $\rho_{P,\frac{360}{n}}\rho_{A,\frac{-360}{n}} = \tau_2^j\tau_1^i$ per qualche i, j .

Abbiamo così che $\rho_{P,\frac{360}{n}} = \tau_2^j\tau_1^i\rho_{A,\frac{360}{n}}$ e $\rho_{P,\frac{360}{n}}(A) = \tau_2^j\tau_1^i\rho_{A,\frac{360}{n}}(A) = A_{i,j}$.



Quindi, nel caso in cui $n = 2$, P è il punto medio di $\overline{AA_{i,j}}$ altrimenti $APA_{i,j}$ è un triangolo isoscele.

In entrambi i casi otteniamo che

$$2|AP| = |AP| + |PA_{i,j}| \geq |AA_{i,j}| > 0$$

dal fatto che $|AP| = |PA_{i,j}|$ e dalla disuguaglianza triangolare, quindi $2|AP| \geq |\tau_{A,A_{i,j}}| = |AA_{i,j}|$ è maggiore della lunghezza di ogni traslazione diversa dall'identità in $\mathcal{W}$.

Tale teorema afferma più precisamente le seguenti affermazioni:

1. due n -centri (con lo stesso n) non possono essere troppo vicini
2. un 2-centro e un 4-centro non possono essere troppo vicini
3. un 3-centro e un 6-centro non possono essere troppo vicini

4. un 2-centro e un 6-centro non possono essere troppo vicini

Teorema 3.10 (Restrizione cristallografica) Se il punto P è un n -centro per il gruppo cristallografico $\mathcal{W}$, allora n può assumere uno dei seguenti valori $n=2, 3, 4$ o 6 .

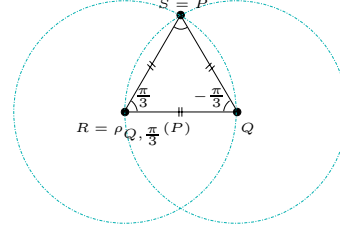
Ossia valgono le rotazioni di angoli $2k\pi, k\pi, \frac{2k\pi}{3}, \frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{3}$ dove $k \in \mathbb{Z}$, $k = 1, \dots, n$.

Dimostrazione Per ipotesi P è un n -centro del gruppo $\mathcal{W}$, sia Q un n -centro (con lo stesso n) alla minima distanza possibile da P , con $Q \neq P$.

(L'esistenza del punto Q è assicurata dai due teoremi precedenti, infatti dal teorema 3.9 viene determinata la minima traslazione in $\mathcal{W}$. Denotando con τ tale traslazione abbiamo che l' n -centro P viene mandato in Q da $\tau(P) = Q$ dal teorema 4.2 essendo P n -centro e $\tau \in \mathcal{W}$ si ha che Q è un n -centro in $\mathcal{W}$).

Sia $R = \rho_{Q, \frac{360}{n}}(P)$ allora R è un n -centro e $PQ=QR$. (P è un n -centro $\rho_Q \in \mathcal{W}$ applico il teorema 4.2) Sia $S = \rho_{R, \frac{360}{n}}(Q)$ allora S è un n -centro e $RQ=RS$. (come sopra)

Se $S = P$, abbiamo un triangolo equilatero, in questo caso $n=6$.



Se $S \neq P$ allora dobbiamo avere $SP \geq PQ = RQ$ avendo preso Q come la minima distanza da P .

Denotiamo con $d = PQ$. Siano X, Y l'intersezione delle rette passanti rispettivamente per R e Q , perpendicolari al segmento SP abbiamo che

$$SP = SX + XY + YP = SX + d + YP$$

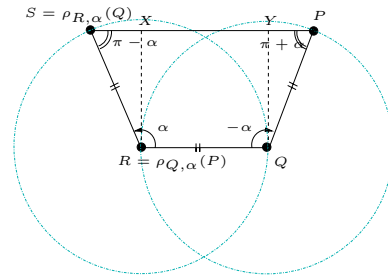
dove

$$SX = d \cos(\pi - \alpha) = -d \cos \alpha$$

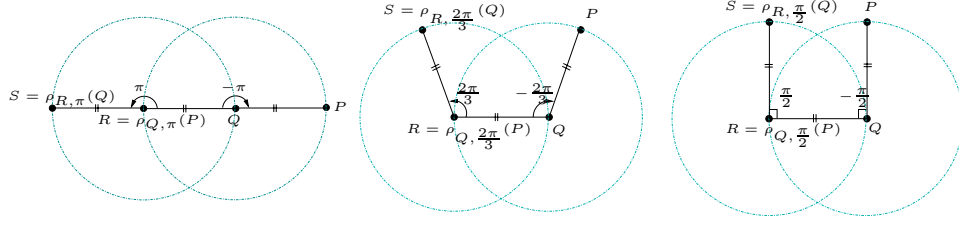
$$YP = d \cos(\pi + \alpha) = -d \cos \alpha$$

$$\text{Quindi } SP = d(-2 \cos \alpha + 1) \geq d \iff -2 \cos \alpha \geq 0 \iff \cos \alpha \leq 0 \iff -\frac{\pi}{2} \geq \alpha = \frac{2\pi}{n} \geq \frac{\pi}{2} \text{ Abbiamo così che per } S \neq P \text{ si ha } n \leq 4.$$

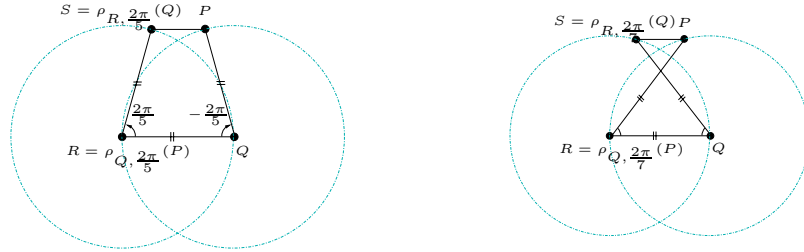
Dunque n è uno tra i valori 2, 3, 4 o 6.



Mostriamo di seguito ciò che avviene, rispettivamente, per un 2, 3, 4-centro.



Vediamo ora che n non può essere né 5 né maggiore di 6.



Supponiamo per assurdo che $n = 5$, avremmo che $SP < PQ$ e questo è un assurdo perché contraddice la minimalità di PQ . Lo stesso avviene per $n > 6$, come possiamo vedere l'esempio dato in figura per $n = 7$.

2-centro $\longrightarrow \langle \rho_{180^\circ} \rangle = \{\text{rotazioni di : } 180^\circ, 360^\circ = id\}$

3-centro $\longrightarrow \langle \rho_{120^\circ} \rangle = \{\text{rotazioni di : } 120^\circ, 240^\circ, 360^\circ = id\}$

4-centro $\longrightarrow \langle \rho_{90^\circ} \rangle = \{\text{rotazioni di : } 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ = id\}$

6-centro $\longrightarrow \langle \rho_{60^\circ} \rangle = \{\text{rotazioni di : } 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ, 360^\circ = id\}$

4 MODELLI DI GRUPPI

Ora affronteremo alcuni teoremi che ci permetteranno di determinare le celle, precedentemente citate, dei cinque reticoli e ricavarne tutti i possibili gruppi $\mathcal{W}$, cominciando con quei gruppi che contengono un n -centro e considerando soltanto i valori per $n = 2, 3, 4, 6$ ottenuti dalla restrizione cristallografica. Analizzeremo quindi tutte le possibili simmetrie che fissano il reticolo.

Teorema 4.1 *Sia A un 6-centro per il gruppo cristallografico $\mathcal{W}$, allora $\mathcal{W}$ non contiene 4-centri.*

Inoltre il centro di simmetria piú vicino ad A è un 2-centro M ed A è il centro di un esagono regolare i cui vertici sono 3-centri e i cui lati sono bisecati da 2-centri.

Tutti i centri di simmetria per $\mathcal{W}$ sono determinati da A ed M

Dimostrazione dimostriamo, come prima cosa, che $\mathcal{W}$ contenendo il 6-centro A non può contenere 4-centri, infatti supponendo per assurdo che $\mathcal{W}$ contenga un 4-centro $\rho_{P,90}$ allora si dovrà avere $\rho_{P,90}\rho_{A,-60} \in \mathcal{W}$ ma da tale prodotto otteniamo una rotazione di 30° attorno a qualche punto che non può essere in $\mathcal{W}$ per la restrizione cristallografica.

Ora mostriamo che il centro di simmetria M piú vicino ad A è un 2-centro:

Se per assurdo M fosse un 3-centro (o un 6-centro)

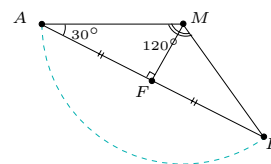
allora avremmo $\rho_{M,120}\rho_{A,60} = \rho_{F,180}$ da ciò segue

$\rho_{M,120}(A) = \rho_{F,180}\rho_{A,-60}(A) = \rho_{F,180}(A)$ ossia

$\rho_{M,120}(A) = B = \rho_{F,180}(A)$ quindi F sarebbe il punto

medio di AB , dunque $|AF| < |AM|$ il che è un

assurdo essendo per ipotesi M più vicino ad A .



Abbiamo quindi che M non può essere né un 3,6,4-centro $\implies M$ deve essere un 2-centro.

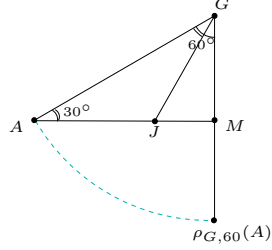
Abbiamo dunque mostrato che il 2-centro $\rho_{M,180} \in \mathcal{W}$ e per ipotesi $\mathcal{W}$ contiene il 6-centro $\rho_{A,60}$ pertanto $\rho_{M,180}\rho_{A,-60} = \rho_{G,120}$ allora abbiamo che

$\rho_{M,180}(A) = \rho_{G,120}(A)$. Quindi G può essere un 3-centro oppure un 6-centro.

Facciamo vedere che G non può essere un 6-centro. Supponiamo che lo

sia, di conseguenza $\rho_{G,60}\rho_{A,60} = \rho_{J,120}$

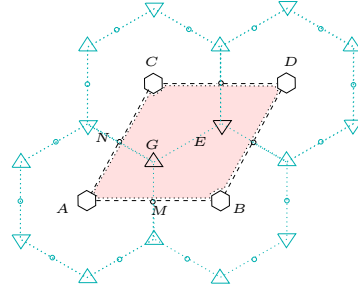
$\implies \rho_{G,60}(A) = \rho_{J,120}(A)$ ossia esisterebbe un centro J tra A e M t.c. $|AJ| < |AM|$ contro l'ipotesi. Pertanto G deve essere un 3-centro.



L'immagine di G sotto le potenze di $\rho_{A,60}$ sono i vertici dell'esagono nell'enunciato del teorema.

Denotiamo con $B = \sigma_M(A)$ e $C = \rho_{A,60}(B)$ allora B e C sono 6-centri per $\mathcal{W}$, infatti essendo A un 6-centro e $\sigma_M \in \mathcal{W} \implies$ per il teorema 3.8 abbiamo che anche B è un 6-centro, lo stesso discorso vale per C . Sia $N = \rho_{A,60}(M)$ allora N è un 2-centro per $\mathcal{W}$ (caso analogo al precedente).

Le basi di $\mathcal{W}$ (in tal caso generato da una cella esagonale formata da 6-centri) sono $AMGN$ e AMG le quali generano, come vedremo, i modelli $\mathcal{W}_6$ e $\mathcal{W}_6^1$.



Poiché il 6-centro A deve andare in un 6-centro (quindi in B e in C) sotto un elemento di $\mathcal{W}$, per il teorema di addizione dell'angolo e per il teorema 3.8, si ha che $\sigma_M\sigma_A = \tau_{A,B}$ e $\sigma_N\sigma_A = \tau_{A,C}$ (considerando il fatto che M è il centro di simmetria più vicino ad A) sono le più piccole traslazioni in $\mathcal{W}$. Quindi $\tau_{A,B}$ e $\tau_{A,C}$ devono generare il sottogruppo delle traslazioni di $\mathcal{W}$.

Abbiamo il nostro primo specifico gruppo di carte da parati:

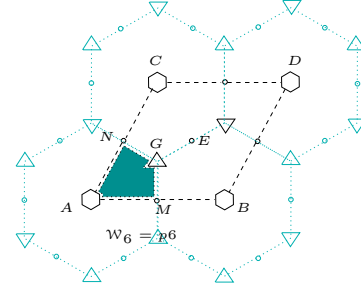
$$\mathcal{W}_6 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,60} \rangle = \langle \rho_{A,60}, \sigma_M \rangle$$

dove ABC è il triangolo equilatero ed M è il punto medio di $\overline{AB}$.

La regione $ABCD$ è una cella unitaria, determinata da 6-centri, di angoli 60° e 120° con $|\tau_{A,B}| = |\tau_{A,C}|$ e M, N punti medi di $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

Tale modello ha un centro di rotazione di ordine sei ma non ha linee di simmetria.

Per il nostro modello $\mathcal{W}_6$ viene adottato il simbolo cristallografico $p6$, il quale sta ad indicare che la cella elementare del reticolo è primitiva e l'ordine di rotazione è sei.



Poiché ogni isometria del gruppo deve lasciare invariato il reticolo di traslazione, allora anche una glissoriflessione dovrà fissare tale reticolo, quindi per il teorema 3.7 $\mathcal{W}$ conterrà una riflessione.

Sarà possibile ottenere una qualunque estensione di $\mathcal{W}_6$, aggiungendo riflessioni che fissano il reticolo. Si aggiungeranno, dunque, tutte le possibili riflessioni.

Otteniamo, così, il secondo gruppo cristallografico

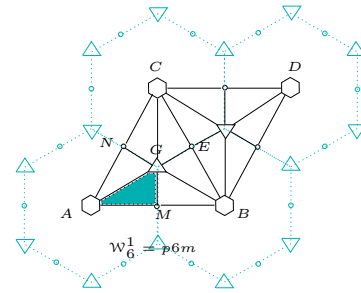
$$\mathcal{W}_6^1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,60}, \sigma_{MC}^{\leftrightarrow} \rangle = \langle \rho_{A,60}, \sigma_M, \sigma_{MC}^{\leftrightarrow} \rangle$$

che possiamo riscrivere nel seguente modo $\mathcal{W}_6^1 = \langle \sigma_{AG}^{\leftrightarrow}, \sigma_{GM}^{\leftrightarrow}, \sigma_{MA}^{\leftrightarrow} \rangle$ ossia $\mathcal{W}_6^1$ è generato da tre riflessioni rispetto alle tre linee che contengono i lati di un triangolo di angoli $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

Ne segue che $\mathcal{W}_6^1 = \langle \rho_{A,60}, \sigma_{MC}^{\leftrightarrow} \rangle$.

Un modello wallpaper che ha gruppo di simmetria $\mathcal{W}_6^1$ ha un centro di rotazione di ordine sei ed una linea di simmetria.

Per tale modello viene adottato il simbolo cristallografico **p6m**.



Un modello cristallografico avente un 6-centro ha gruppo di simmetria $\mathcal{W}_6$ o $\mathcal{W}_6^1$.

Studiamo i gruppi di W con un 3-centro ma non un 6-centro e dimostriamo la seguente analogia al teorema precedente.

Teorema 4.2 *Sia A un 3-centro per il gruppo cristallografico $\mathcal{W}$, privo di 6-centri, allora ogni centro di simmetria per $\mathcal{W}$ è un 3-centro e A è il centro di un esagono regolare i cui vertici sono 3-centri.*

Tutti i centri di simmetria per $\mathcal{W}$ sono determinati da A e da un 3-centro più vicino.

Dimostrazione Per ipotesi A è un 3-centro in $\mathcal{W}$ e non ci sono 6-centri.

Facciamo vedere che ogni centro di simmetria deve essere un 3-centro.

Supponiamo per assurdo che $P \in \mathcal{W}$ sia un 2-centro (equivalentemente per un 4-centro) allora $\rho_{A,-120}\rho_{P,180} = \rho_{J,60}$ che è un 6-centro contro l'ipotesi.

Sia G un 3-centro più vicino ad A , sia J t.c. $\rho_{G,120}\rho_{A,120} = \rho_{J,240}$ allora J è un 3-centro e il triangolo AGJ è equilatero.

Le immagini di G e J mediante potenze di $\rho_{A,120}$ sono i vertici dell'esagono nell'enunciato del teorema.

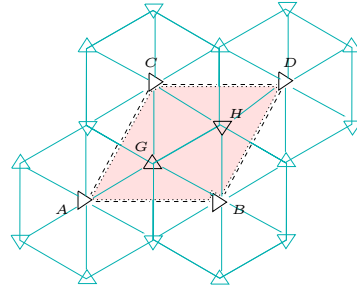
Ripetendo lo stesso discorso per ogni 3-centro si mostra che tutti i 3-centri sono allineati come in figura e questo termina la dimostrazione del teorema.

Osserviamo che $\rho_{G,120}\tau_{A,G}$ e $\rho_{J,120}\tau_{A,J}$ sono uguali a $\rho_{Q,120}$ dove Q è il baricentro del triangolo AGJ , Infatti $\rho_{G,120}\tau_{A,G}(A) = G = \rho_{Q,-120}(A)$ e $\rho_{J,120}\tau_{A,J}(A) = J = \rho_{Q,120}(A)$, quindi né $\tau_{A,G}$ né $\tau_{A,J}$ sono in W , altrimenti Q sarebbe un 3-centro più vicino ad A di G .

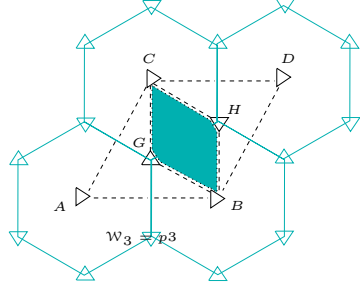
Dunque per avere la minima traslazione $\tau_{A,B}$ in $\mathcal{W}$, il 3-centro B non deve essere un vertice dell'esagono dei 3-centri più vicini ad A .

Siano $B := \rho_{G,120}(A)$ e $C := \rho_{G,-120}(A)$

per il teorema 3.8 sono 3-centri, abbiamo che $\tau_{A,B} = \rho_{G,120}\rho_{A,-120}$ e $\tau_{A,C} = \rho_{G,-120}\rho_{A,120}$ allora $\tau_{A,B}$ e $\tau_{A,C}$ sono le traslazioni più piccole e generano il gruppo delle traslazioni di W .



Si ottiene così $\mathcal{W}_3 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,120} \rangle = \langle \rho_{A,120}, \rho_{G,120} \rangle$.



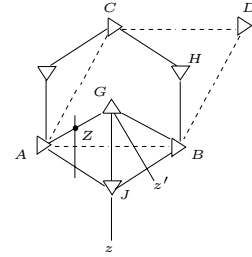
Se $\mathcal{W}$ non contiene isometrie dispari allora dovrà essere $\mathcal{W}_3$.

Un modello di wallpaper $\mathcal{W}$ avente come gruppo di simmetria $\mathcal{W}_3$ ha un centro di rotazione di ordine tre, non ha centri di rotazione di ordine sei e non ha linee di simmetria.

Per tale modello viene adottato il simbolo cristallografico **p3**.

Consideriamo di estendere $\mathcal{W}_3$ ad un gruppo W senza riflessioni aggiungendo glissoriflessioni allora per il teorema 3.7, $\mathcal{W}$ dovrà avere una glissoriflessione che manda il 3-centro A in un 3-centro che non sia nel reticolo determinato da A . Componendo questa glissoriflessione con una traslazione e con una rotazione attorno ad A , potremmo supporre che $\mathcal{W}$ contenga una glissoriflessione che manda A in G o in J .

Sia γ una glissoriflessione in W , che manda A in G , allora sarà $\gamma = \sigma_z \sigma_Z$, dove Z è il punto medio di A e G e z è una qualsiasi linea passante per G . Siccome σ_Z fissa l'insieme di tutti i 3-centri, allora anche σ_z deve fissare l'insieme di tutti i 3-centri (vedere figura di lato).



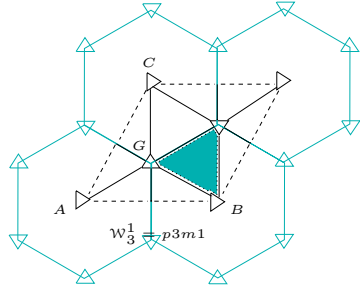
Componendo σ_z con una rotazione rispetto a G possiamo supporre, senza perdita di generalità, due casi:

- z è la bisettrice $\perp$ del segmento $\overline{JB}$
- $z = \overleftrightarrow{GJ}$.

il primo caso è impossibile poiché altrimenti $\overleftrightarrow{AG}$ sarebbe l'asse di γ e $\tau_{A,B}\gamma^2$ sarebbe una traslazione in W di lunghezza AG e più piccola di $\tau_{A,B}$ quindi deve essere $z = \overleftrightarrow{GJ}$ così infatti $\rho_{G,-120}\gamma = \sigma_{\overleftrightarrow{AG}}\sigma_z\sigma_z\sigma_Z = \sigma_{\overleftrightarrow{ZJ}}$ e $\mathcal{W}$ contiene la riflessione rispetto alle bisettrici perpendicolari ad $\overline{AG}$. Inoltre la presenza di una glissoriflessione che manda A in J , implica che la riflessione rispetto

alla bisettrice perpendicolare di $\overline{AJ}$ è in $\mathcal{W}$.

In ogni caso, se $\mathcal{W}$ è un'estensione di $\mathcal{W}_3$ e contiene un'isometria dispari, deve contenere una riflessione. Tutte l'estensioni di $\mathcal{W}_3$ ad un gruppo senza 6-centri aggiungendo isometrie dispari sono ottenute aggiungendo riflessioni.



Se $\mathcal{W}_3$ è esteso aggiungendo σ_l , allora la linea l deve essere una linea di simmetria per l'insieme di 3-centri. Poiché una tale linea deve passare per almeno un 3-centro, supponiamo che l è una linea passante per il 3-centro A . Otteniamo, così, i modelli $\mathcal{W}_3^1$ e $\mathcal{W}_3^2$.

Dove $\mathcal{W}_3^1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,120}, \sigma_{AG}^{\rightarrow} \rangle = \langle \rho_{A,120}, \rho_{G,120}, \sigma_{AG}^{\leftarrow} \rangle$ ossia, $\mathcal{W}_3^1$ è generato dalle riflessioni sui tre lati di un triangolo equilatero, e $\mathcal{W}_3^2 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,120}, \sigma_{AB}^{\leftarrow} \rangle = \langle \rho_{G,120}, \sigma_{AB}^{\leftarrow} \rangle$.

I gruppi $\mathcal{W}_3^1$ e $\mathcal{W}_3^2$ sono ottenuti aggiungendo a $\mathcal{W}_3$ la riflessione rispetto ad una sola delle diagonali della cella unitaria rombica determinata da A . Infatti se così non fosse le riflessioni rispetto ad entrambe le diagonali introdurrebbero una rotazione di 180° e un 6-centro, si arriverebbe dunque ad un assurdo.

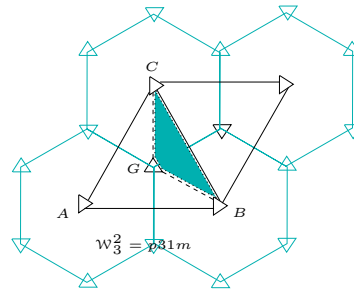
Un modello $\mathcal{W}$ avente come gruppo di simmetria $\mathcal{W}_3^1$ ha un centro di rotazione di ordine 3, non ha centri di rotazione di ordine 6 e ogni 3-centro appartiene ad una linea di simmetria.

Per questo gruppo cristallografico viene usato il simbolo **p3m1**.

Un modello $\mathcal{W}$ avente come gruppo di simmetria $\mathcal{W}_3^2$ ha un centro di rotazione di ordine 3 fuori da una linea di simmetria ma non ha centri di rotazione di ordine 6.

Per tale gruppo cristallografico viene adottato il simbolo **p31m**, ossia $\mathcal{W}_3^2$ è generato da una riflessione e da una rotazione di periodo tre.

Quindi ogni modello $\mathcal{W}$ che contiene solo centri di rotazione di ordine tre ha come gruppo di simmetria $\mathcal{W}_3$ o $\mathcal{W}_3^1$ o $\mathcal{W}_3^2$.



Ci occuperemo, ora, di quei gruppi cristallografici che hanno 4-centri, mediante il seguente teorema.

Teorema 4.3 *Sia A sia un 4-centro per il gruppo cristallografico $\mathcal{W}$, allora non ci sono né 3-centri né 6-centri per $\mathcal{W}$.*

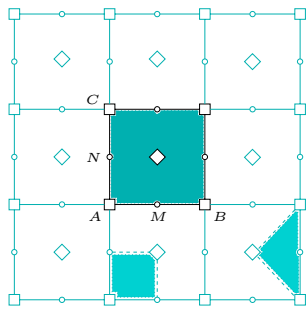
Inoltre il centro di simmetria più vicino ad A è un 2-centro M ed A è il centro di un quadrato i cui vertici sono 4-centri e i cui lati sono bisecati da 2-centri.

Tutti i centri di simmetria per $\mathcal{W}$ sono determinati da A ed M .

Dimostrazione Per ipotesi A è un 4-centro, non ci sono né 3 né 6-centri in $\mathcal{W}$.

Supponiamo per assurdo che $\mathcal{W}$ contenga un 6-centro $\rho_{P,60}$ (lo stesso vale per un 3-centro) allora si dovrà avere $\rho_{P,60}\rho_{A,-90} = \rho_{D,-30} \in \mathcal{W}$ e questo è un'assurdo per la restrizione cristallografica.

Dimostriamo ora che il centro di simmetria più vicino ad A è un 2-centro M . Supponiamo per assurdo che M non sia un 2-centro (precedentemente abbiamo dimostrato che non esistono né 3 né 6-centri in $\mathcal{W}$) quindi M è un 4-centro più vicino ad A , allora $\rho_{M,90}\rho_{A,90} = \rho_{K,180}$ da ciò segue che $\rho_{M,90} = \rho_{K,180}\rho_{A,-90} \iff \rho_{M,90}(A) = B = \rho_{K,180}(A)$ in tal caso K sarebbe il punto medio di AB , dunque $|AK| \leq |AM|$ il che è un assurdo essendo, per ipotesi, M il centro di simmetria più vicino ad $A \implies M$ è un 2-centro.



Abbiamo quindi che $\rho_{M,180} \in \mathcal{W}$ e $\rho_{M,180}\rho_{A,-90} = \rho_{E,90}$ dove E è un 4-centro.

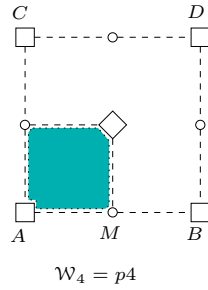
Le immagini di E ed M mediante le potenze di $\rho_{A,90}$ sono rispettivamente i vertici e i punti medi del quadrato dell'enunciato del teorema.

Osserviamo che la traslazione $\tau_{A,E}$ non è in $\mathcal{W}$ (non manda il 4-centro A nel 4-centro) poiché, se

così fosse, avremmo che Z è un centro di simmetria più vicino ad A di M , dove $\tau_{A,E} = \sigma_A = \sigma_Z$.

Indichiamo con $N = \rho_{A,90}(M)$ (N è un 2-centro essendo $\rho_{A,90} \in \mathcal{W}$ e M un 2-centro, per il teorema 3.8), $\tau_{A,B} = \sigma_M \sigma_A$ e $\tau_{A,C} = \sigma_N \sigma_A$ (per il teorema dell'angolo il prodotto di due rotazioni è una traslazione) abbiamo che $\tau_{A,B}$ e $\tau_{A,C}$ sono le più piccole traslazioni in $\mathcal{W}$ e generano il sottogruppo delle traslazioni.

Abbiamo pertanto il gruppo cristallografico:



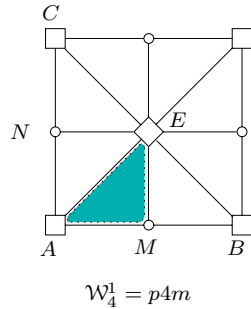
$\mathcal{W}_4 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,90} \rangle = \langle \rho_{A,90}, \rho_{E,90} \rangle$ dove E è il centro del quadrato $ABDC$.

Un modello $\mathcal{W}$ avente come gruppo di simmetria $\mathcal{W}_4$ ha un centro di rotazione di ordine quattro, non ha linee di simmetria e dalla notazione cristallografica viene denotato con **p4**.

Se $\mathcal{W}$ non contiene isometrie dispari allora $\mathcal{W}$ deve essere $\mathcal{W}_4$.

Consideriamo di estendere $\mathcal{W}_4$ ad un gruppo cristallografico $\mathcal{W}$ aggiungendo isometrie dispari. Se σ_l è in $\mathcal{W}$, allora l deve essere una linea di simmetria per l'insieme di tutti i 4-centri in $\mathcal{W}$. Poiché $\mathcal{W}_4$ ha già delle rotazioni sarà sufficiente aggiungere o una riflessione su una linea di simmetria passante per un 4-centro oppure una riflessione su una linea di simmetria fuori da tutti i 4-centri.

Consideriamo allora, i vettori $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{MN}$, otteniamo così i seguenti gruppi



cristallografici:

$$\mathcal{W}_4^1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,90}, \sigma_{\overleftrightarrow{AE}} \rangle = \langle \rho_{A,90}, \rho_{E,90}, \sigma_{\overleftrightarrow{AE}} \rangle$$

E' facile vedere che $\mathcal{W}_4^1$ è anche generato da tre riflessioni rispetto a tre linee che contengono i lati di un triangolo rettangolo isoscele.

Un modello $\mathcal{W}$ avente come gruppo di simmetria $\mathcal{W}_4^1$ ha una linea di simmetria passante per un centro di rotazione di ordine quattro e il simbolo che

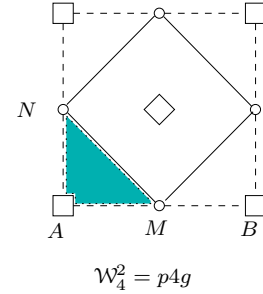
viene usato per questo tipo di gruppo cristallografico è **p4m**.

Sia $\mathcal{W}_4^2 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \rho_{A,90}, \sigma_{MN}^{\leftrightarrow} \rangle = \langle \rho_{A,90}, \sigma_{MN}^{\leftrightarrow} \rangle$.

Un modello $\mathcal{W}$ avente come gruppo di simmetria $\mathcal{W}_4^2$ ha un centro di rotazione di ordine quattro, una linea di simmetria fuori da tutti i 4-centri e il simbolo che si adotta per tale gruppo di simmetrie è **p4g**.

Osserviamo che entrambe le riflessioni $\sigma_{AE}^{\leftrightarrow}$ e $\sigma_{MN}^{\leftrightarrow}$ non possono essere aggiunte a $\mathcal{W}_4$ altrimenti introdurrebbero un centro

di simmetria più vicino ad A di M e questo non è possibile per le ipotesi fatte su M .



Per considerare le possibili estensioni di $\mathcal{W}_4$, ad un gruppo cristallografico $\mathcal{W}$, senza riflessioni, aggiungendo solo isometrie dispari, è sufficiente (teorema 3.7) supporre che $\mathcal{W}$ contenga una glissoriflessione che mandi il 4-centro A in un 4-centro che non stia nel reticolo determinato da A . Componendo questa glissoriflessione con una traslazione appropriata, possiamo supporre che $\mathcal{W}$ contenga una glissoriflessione γ che manda A in E , ossia $\gamma(A) = E$. Se Z è il punto medio di A ed E , allora $\gamma = \sigma_z \sigma_Z$ per qualche linea z passante per E .

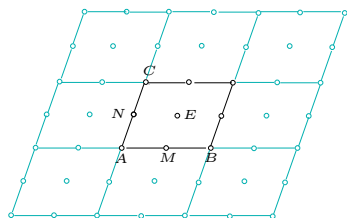
Siccome γ deve fissare l'insieme di tutti i 4-centri, allora z dovrà essere uno dei vettori $\overleftrightarrow{ME}$, $\overleftrightarrow{BE}$ oppure $\overleftrightarrow{NE}$. In ogni caso, γ seguita rispettivamente da $\rho_{E,90}, \rho_{E,180}$ o $\rho_{E,270}$ darà la riflessione rispetto ad $\overleftrightarrow{MN}$.

Estendere $\mathcal{W}_4$ con isometrie dispari porta solo a $\mathcal{W}_4^1$ o $\mathcal{W}_4^2$.

Ora supponiamo che il gruppo cristallografico $\mathcal{W}$ abbia un 2-centro A e che ogni centro di simmetria per $\mathcal{W}$ sia un 2-centro.

Dunque $\sigma_A \in \mathcal{W}$.

Se $\langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C} \rangle$ è il sottogruppo delle traslazioni di $\mathcal{W}$, siano $\sigma_M = \tau_{A,B}\sigma_A$, $\sigma_N = \tau_{A,C}\sigma_A$ e $\sigma_E = \sigma_N\sigma_A\sigma_M$, allora i punti M, N, E saranno



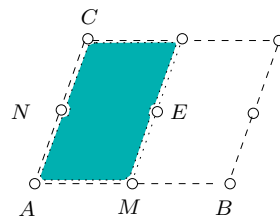
2-centri e $ABDC$ denoterà che una cella unitaria. Ogni punto $A_{i,j}$ nel reticolo di traslazione determinato da A è un 2-centro, così come il punto medio di due qualsiasi punti di tale reticolo.

Non possono esistere altri centri di simmetria oltre a questi. Otteniamo in questo modo un'altro gruppo cristallografico:

$\mathcal{W}_2 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_A \rangle$. Se $\mathcal{W}$ non contiene isometrie dispari, allora $\mathcal{W} = \mathcal{W}_2$

Possiamo vedere che $\mathcal{W}_2$ è generato da $\tau_{A,B}$, $\tau_{A,C}$ e σ_E e anche da σ_M , σ_E e σ_N .

Un modello wallpaper avente gruppo di simmetria



$$\mathcal{W}_2 = p2$$

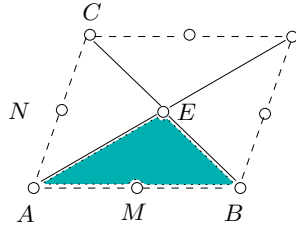
$\mathcal{W}_2$ ha un centro di rotazione di ordine due, ogni centro di simmetria è un centro di rotazione di ordine due, non è fissato da nessuna isometria dispari e il simbolo che viene usato per esso è **p2**.

Consideriamo di estendere $\mathcal{W}_2$ ad un gruppo $\mathcal{W}$ aggiungendo solo isometrie dispari. Supponiamo che σ_l sia in $\mathcal{W}$, allora $\mathcal{W}$ ha un reticolo rombico o rettangolare. (teorema 3.5).

Nel caso del reticolo rombico, la linea l è parallela ad una diagonale di una cella unitaria e quindi deve passare per un 2-centro su l . Allora l contiene una diagonale della cella unitaria del reticolo determinato da A .

comunque aggiungere la riflessione rispetto ad una diagonale di una cella unitaria rende necessario aggiungere la riflessione rispetto l'altra diagonale poiché il centro della cella unitaria è un 2-centro.

Otteniamo quindi:



$$\mathcal{W}_2^1 = cmm$$

$\mathcal{W}_2^1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{AE}^{\leftrightarrow}, \sigma_{BE}^{\leftrightarrow} \rangle$. Possiamo vedere che $\mathcal{W}_2^1$ è generato anche da $\sigma_{AE}^{\leftrightarrow}$, $\sigma_{BE}^{\leftrightarrow}$ e σ_M .

Quindi, nel caso rombico, abbiamo solo la possibilità che $\mathcal{W} = \mathcal{W}_2^1$.

Un modello wallpaper avente come gruppo di simmetria $\mathcal{W}_2^1$ ha un centro di rotazione di ordine due, ogni centro di simmetria è un 2-centro ed alcuni, ma non tutti, 2-centri sono su una linea di simmetria.

Dalla notazione cristallografica questo gruppo viene denominato con **cmm**.

Se una cella unitaria rombica è rettangolare allora essa è un quadrato (caso speciale del caso rettangolare generale considerato successivamente).

Un'estensione $\mathcal{W}$ di $\mathcal{W}_2$ può avere una riflessione rispetto ad una diagonale di una cella unitaria, a meno che la cella sia rombica, e non può avere riflessioni rispetto ad una diagonale e ad una linea parallela ad un lato poiché ogni n-centro è un 2-centro.

Ora, per estendere $\mathcal{W}_2$ con riflessioni, rimane da considerare solo il caso in cui una cella unitaria è rettangolare (possibilmente quadrata) e $\sigma_l \in \mathcal{W}$ con l parallela ad un lato della cella unitaria definita da $ABDC$.

Ci sono due possibilità: l passa per un 2-centro oppure l passa tra due filari adiacenti di 2-centri.

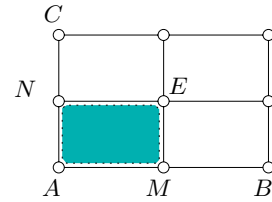
Nel primo caso, introdurre una riflessione rispetto ad una delle linee che contiene un lato di $NAME$ richiede l'introduzione della riflessione rispetto ad ognuna di queste linee, in tal caso

$\mathcal{W} = \mathcal{W}_2^2 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{AM}^{\leftrightarrow}, \sigma_{AN}^{\leftrightarrow} \rangle$ che è uguale

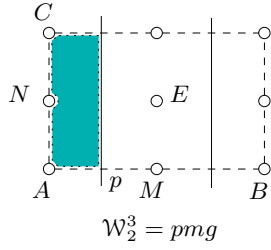
al seguente gruppo cristallografico: $\langle \sigma_{AM}^{\leftrightarrow}, \sigma_{ME}^{\leftrightarrow}, \sigma_{AN}^{\leftrightarrow}, \sigma_{NE}^{\leftrightarrow} \rangle$.

Un modello wallpaper avente come gruppo di simmetria $\mathcal{W}_2^2$ ha un centro di rotazione di ordine due, ogni centro di simmetria è un 2-centro e ogni 2-centro è su una linea di simmetria.

Come simbolo, per questo gruppo, viene adottato **pmm**.



$$\mathcal{W}_2^2 = pmm$$



Nel secondo caso, in cui l passa tra due filari adiacenti di 2-centri, possiamo supporre senza perdita di generalità che l sia parallela ad $\overline{AN}$. In questo caso $\mathcal{W} = \mathcal{W}_2^3 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_A, \sigma_p \rangle$ dove p è la bisettrice perpendicolare ad $\overline{AM}$.

Abbiamo che $\mathcal{W}_2^3 = \langle \sigma_A, \tau_N, \sigma_p \rangle$. Un modello wallpaper avente come gruppo di simmetria $\mathcal{W}_2^3$ ha un centro di simmetria di ordine due, ogni centro di simmetria è un 2-centro, ha una linea di simmetria e tutte le linee di simmetria sono parallele.

Nella rappresentazione cristallografica viene chiamato con **pmg**.

Abbiamo finito di estendere $\mathcal{W}_2$ aggiungendo solo riflessioni. Consideriamo di estendere $\mathcal{W}$ aggiungendo una glissoriflessione γ tale che non siano introdotte riflessioni.

Una glissoriflessione avente un asse passante per un 2-centro rende necessaria l'introduzione di una riflessione, quindi l'asse di γ deve passare tra due filari adiacenti di 2-centri. Questo richiede che la cella unitaria parallelogramma sia rettangolare.

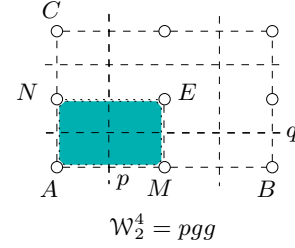
vedremo che una scelta di asse per γ introduce glissoriflessioni i cui assi consistono di tutti i possibili candidati. Sia p la bisettrice perpendicolare di $\overline{AM}$; sia q la bisettrice perpendicolare di $\overline{AN}$. Una glissoriflessione di asse p che porta il 2-centro M nel 2-centro C seguita da $\tau_{C,A}$ produce la riflessione indesiderata σ_p . Quindi sia γ la glissoriflessione che porta M in N e A in E , ossia $\gamma(M) = N$ e $\gamma(A) = E$. Sia ϵ la glissoriflessione che porta N in M e A in E , ossia $\epsilon(N) = M, \epsilon(A) = E$. L'asse di γ è p e $\gamma^2 = \tau_{A,C}$; l'asse di ϵ è q e $\epsilon^2 = \tau_{A,B}$ si ha che $\gamma\sigma_A = \epsilon$.

Sia $\mathcal{W}_2^4 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_A, \gamma \rangle$ allora $\mathcal{W}_2^4$ contiene entrambe γ ed ϵ

quindi tutte le possibili glissoriflessioni la cui presenza non richiede anche riflessioni.

Ma $\mathcal{W}_2^4$ è anche generato da γ ed ϵ , quindi

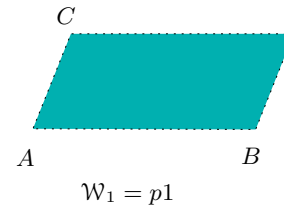
$\mathcal{W}_2^4 = \langle \gamma, \epsilon \rangle$ vedi la figura dove gli assi delle riflessioni sono indicati dalle linee tratteggiate. Un



modello wallpaper avente come gruppo di simmetria $\mathcal{W}_2^4$ ha un centro di rotazione di ordine due, ogni centro di simmetria è un 2-centro, non ha linee di simmetria ma è fissato da una glissoriflessione e viene denominato con **pgg**. Quindi aggiungendo a $\mathcal{W}_2$ solo isometrie dispari otteniamo uno tra i seguenti gruppi: $\mathcal{W}_2^1$, $\mathcal{W}_2^2$, $\mathcal{W}_2^3$ o $\mathcal{W}_2^4$.

Infine abbiamo quei gruppi wallpaper $\mathcal{W}$ che non hanno centro di simmetria.

Abbiamo il caso in cui, il gruppo cristallografico, $\mathcal{W}$ contiene solo isometrie di traslazione, ossia $\mathcal{W}$ è uguale a $\mathcal{W}_1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C} \rangle$, con A arbitrario e A, B, C non collineari.



Un modello wallpaper avente come gruppo di

simmetria $\mathcal{W}_1$ non ha centri di simmetria e non è fissato da alcuna isometria dispari. Dalla notazione cristallografica viene usato il simbolo **p1**.

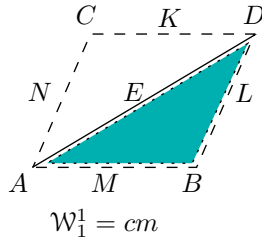
Consideriamo di estendere $\mathcal{W}_1$ ad un gruppo wallpaper $\mathcal{W}$ aggiungendo solo isometrie dispari. Se $\mathcal{W}$ contiene σ_l , supponiamo che A sia su l .

Se $\mathcal{W}$ non contiene riflessioni ma ha una glissoriflessione, supponiamo che A è sull'asse della glissoriflessione in $\mathcal{W}$.

Se σ_l è in $\mathcal{W}$ con A su l , allora (teor 3.5) c'è una cella unitaria rombica definita da $ABDC$ con $l = \overleftrightarrow{AD}$ oppure c'è una cella unitaria rettangolare definita da $ABDC$ $l = \overleftrightarrow{AC}$.

Nel caso in cui $ABDC$ è un quadrato, $\mathcal{W}$ non può avere riflessioni né rispetto ad $\overleftrightarrow{AD}$ né rispetto ad $\overleftrightarrow{AC}$ perchè $\mathcal{W}$ non contiene rotazioni.

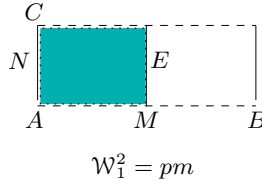
Siano $\mathcal{W}_1^1 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{\overleftrightarrow{AD}} \rangle$ e $\mathcal{W}_1^2 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \sigma_{\overleftrightarrow{AC}} \rangle$. Se $\mathcal{W}$ contiene una riflessione allora $\mathcal{W}$ è $\mathcal{W}_1^1$ oppure $\mathcal{W}_1^2$.



Osserviamo che $\overleftrightarrow{NK}$ non è una linea di simmetria per $\mathcal{W}_1^1$.

Sia γ la glissoriflessione con asse $\overleftrightarrow{NK}$ che porta N in K , quindi $\gamma^2 = \tau_{A,D}$. Vediamo che γ è in $\mathcal{W}_1^1$ e, in realtà, $\mathcal{W}_1^1 = \langle \gamma, \sigma_{\overleftrightarrow{AD}} \rangle$.

Un modello wallpaper avente come gruppo di simmetria $\mathcal{W}_1^1$ non ha centro di simmetria, è fissato da dalle riflessioni e dalle glissoriflessioni, ma alcuni assi delle glissoriflessioni non sono linee di simmetria. Tale gruppo viene rappresentato dalla notazione cristallografica con **cm**.



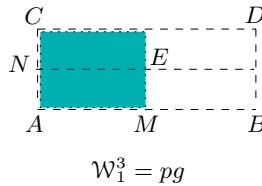
D'altra parte, tutte le glissoriflessioni in $\mathcal{W}_1^2$ sono della forma $(\sigma_{\overleftrightarrow{AC}} \tau_{A,B}^j) \tau_{A,C}^i$ con $i \neq 0$ e hanno assi che sono anche linee di simmetria per $\mathcal{W}_1^2$. Questa proprietà può essere usata per distinguere modelli con gruppi di simmetria $\mathcal{W}_1^1$ e $\mathcal{W}_1^2$.

Un modello wallpaper avente come gruppo di simmetria $\mathcal{W}_1^2$ non ha centro di simmetria, è fissato dalle riflessioni e dalle glissoriflessioni e tutti gli assi delle glissoriflessioni sono linee di simmetria.

Per esso viene adottato il simbolo **pm**.

Infine, consideriamo di estendere $\mathcal{W}_1$ solo con glissoriflessioni.

Gli assi delle glissoriflessioni devono essere paralleli perchè $\mathcal{W}_1$ non contiene rotazioni. Abbiamo un ulteriore caso in cui una delle traslazioni generatrici è il quadrato di una glissoriflessione in $\mathcal{W}$.



Sia $\mathcal{W}_1^3 = \langle \tau_{A,B}, \tau_{A,C}, \gamma \rangle$ dove γ è la glissoriflessione con asse $\overleftrightarrow{AB}$ che porta A in M .

Quindi $\gamma^2 = \tau_{A,B}$, chiaramente $\mathcal{W}_1^3$ è generato da $\tau_{A,C}$ e γ . Sia $\epsilon = \tau_{A,C} \gamma$. vediamo che ϵ è la glissoriflessione

con asse $\overleftrightarrow{NE}$ che porta N in E e che $\mathcal{W}_1^3$ è generato da γ ed ϵ . Quindi $\mathcal{W}_1^3$ contiene tutte le possibili glissoriflessioni.

Un modello wallpaper avente come gruppo di simmetria $\mathcal{W}_1^3$ non ha centro di simmetria, non ha linee di simmetria, ma è fissata da una glissoriflessione

e viene rappresentato con il simbolo **pg**.

L'estensione di $\mathcal{W}_1$ ad un gruppo wallpaper aggiungendo solo isometrie dispari dà $\mathcal{W}_1^1$ o $\mathcal{W}_1^2$ oppure $\mathcal{W}_1^3$. La nostra ricerca è terminata, abbiamo dunque elencato i 17 gruppi cristallografici (wallpaper).

Si è così dimostrato il seguente teorema:

Teorema 4.4 *Se $\mathcal{W}$ è un gruppo wallpaper, allora ci sono punti e linee tali che $\mathcal{W}$ è uno dei diciassette gruppi:*

$\mathcal{W}_1 = p1$	$\mathcal{W}_2 = p2$	$\mathcal{W}_4 = p4$	$\mathcal{W}_6 = p6$	
$\mathcal{W}_1^1 = cm$	$\mathcal{W}_2^1 = cmm$	$\mathcal{W}_4^1 = p4m$	$\mathcal{W}_3^1 = p3m1$	$\mathcal{W}_6^1 = p6m$
$\mathcal{W}_1^2 = pm$	$\mathcal{W}_2^2 = pmm$	$\mathcal{W}_4^2 = p4g$	$\mathcal{W}_3^2 = p31m$	
$\mathcal{W}_1^3 = pg$	$\mathcal{W}_2^3 = pmg$			
	$\mathcal{W}_2^4 = pgg$			

5 ESCHER E LE TASSELLAZIONI DEL PIANO

A questo punto ci è sembrato interessante mostrare mediante le opere dell'artista M.C. Escher le simmetrie dei 17 gruppi cristallografici precedentemente affrontati.

Attraverso i suoi disegni (pensati per essere illimitati e quindi uno stesso vettore può essere riapplicato infinite volte) è possibile far luce con più chiarezza alle caratteristiche di quelle celle che generano per traslazione tutto il piano, illustrando così la teoria dei cristalli.

Si prenderà un disegno escheriano, s'individuano i centri di rotazione e le simmetrie che l'opera contiene e si risalirà al tipo di tassello (cella generatrice) che ne viene utilizzato.

Tutto questo non prima di aver dato una piccola presentazione di questo grande artista.

La vita di Escher

Fra gli artisti che utilizzarono schemi matematici per realizzare le loro opere spicca la figura di Escher.

Maurits Cornelis Escher nasce a Leeuwarden, Olanda, nel 1898. Figlio di un ingegnere, studiò alla scuola di architettura e arti decorative di Haarlem, iniziando qui la sua passione per la xilografia (tecnica d'incisione in rilievo di disegni intagliati su una superficie di legno duro dalla quale si ottengono poi le stampe su carta).

Escher ha vissuto per molti anni in Italia, dove perfezionò questa tecnica, imparando altri metodi per incidere il legno e la pietra. Ritraeva prevalentemente paesaggi e nel 1935, costretto dal fascismo a scappare in Svizzera, inizia gli studi sulla prospettiva e le illusioni ottiche abbandonando la produzione di paesaggi per dedicarsi ai disegni astratti.

Nel 1936 soggiornò in Spagna e affascinato dalle decorazioni del palazzo trecentesco dell'Alhambra di Granada, dalla ricchezza ornamentale dei mosaici moreschi, intraprese lunghe ricerche nel campo delle tassellazioni del piano; appassionandosi, successivamente, alla rappresentazione dell'infinito tramite

questo suo desiderio di riempire il piano con tasselli così fitti da non lasciare spazi vuoti.

I suoi interessi, dunque, cambiarono radicalmente in quell'anno.

Ricopiò, nei suoi appunti, i motivi geometrici raffigurati su alcune piastrelle in maiolica e in stucco dell'Alhambra (esempi di divisione regolare del piano) e cominciò a cercare di ricoprire il piano con una o più figure. La sua originalità stava nella scelta di usare come tassello forme di animali, cosa che non era concessa dal Corano agli artisti islamici.

A partire da una griglia triangolare, quadrangolare, esagonale ecc. egli pensò di modificare il contorno del poligono-base in modo da ricavarne immagini di esseri viventi; sviluppando questa idea realizzò numerosi lavori.

Significativa è la litografia *Rettili.*, tra i numerosi oggetti che compaiono in essa si nota un foglio sul quale, dopo averlo tassellato con esagoni, sono stati disegnati dei rettili che a un certo punto "prendono vita" e cominciano a salire. La descrizione che ne fa l'artista è la seguente: *Uno di questi animali allunga una zampa al di là del bordo del quaderno e si distacca per entrare nella vita reale. Si arrampica per procedere, con fatica, su una salita scivolosa di una squadra da disegno, fino all'apice della sua esistenza. Dopo un breve riposo torna verso il basso sulla superficie piatta della carta da disegno, dove, ubbidiente, si inserisce fra i suoi vecchi compagni e riprende la sua funzione di elemento della divisione del piano.*

Qui si ritrovano alcuni motivi fondamentali della produzione artistica di Escher: le tassellazioni, il passaggio dal piano allo spazio ed i solidi geometrici. Come possiamo vedere, il tassello di questo esempio di tassellazione, è un rettile ottenuto a partire da un esagono dal quale Escher "ha tolto alcuni pezzi" per "attaccarli poi esternamente ad esso" (dunque la superficie della porzione di piano occupata da un rettile deve essere uguale a quella dell'esagono-base). Successivamente analizzeremo la tecnica utilizzata attraverso le trasformazioni geometriche.

5.1 La simmetria nell'arte di Escher

Le opere di Escher, raccolte dal libro di Doris Schattschneider intitolato *Visioni della Simmetria*, qui riportate, ci suggeriscono un'idea visiva di ciò che è una tassellazione del piano e quali sono gli 'elementi' di simmetria che ne fanno parte.

Ci siamo dunque proposti di esaminare i lavori dell'artista individuando, attraverso una loro attenta analisi, quali e di che ordine sono i punti di rotazione e quali simmetrie compaiono; risalendo così al tipo di cella unitaria usata per produrre la stampa (la tassellazione del piano) e quindi a quale gruppo cristallografico essa viene classificata.

Nel gruppo spaziale **p1**, abbiamo già visto che, è presente la sola operazione identità e quindi un punto materiale viene ripetuto soltanto da vettori traslatori del reticolo.

Nel disegno di Escher qui riportato, l'elemento di base, ovvero il massello utilizzato formato da otto teste (quattro di donna e quattro di uomini) posto al centro della stampa, può essere riprodotto verticalmente mediante un vettore orientato verso l'alto (o verso il basso) e orizzontalmente attraverso un vettore rivolto verso destra (o sinistra), ricoprendo così



l'intera stampa. Nell'illustrazione non compaiono centri di rotazione e le uni-



$$\mathcal{W}_1 = p1$$

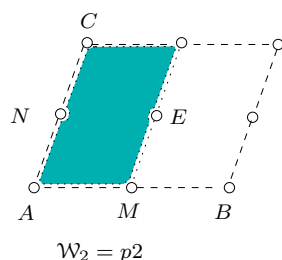
che operazioni di simmetria sono quelle di traslazione, vi è dunque una simmetria riconducibile a questo gruppo spaziale. Il tipo di cella adottata da Escher per la produzione di questa immagine genera, per traslazione, un reticolo obliquo.

Ora ci proporremo di esaminare quelle opere che contengono oltre agli elementi di traslazione anche quelli di rotazione.

Nella figura riportata qui accanto (*Pesce volante/Uccello*) possiamo individuare gli unici punti di rotazione di ordine due che si trovano rispettivamente nell'intersezione delle teste dei due uccelli bianchi (dove vi sono allo stesso tempo quelle delle pinne destre dei pesci rossi), delle loro code (dove vi è anche il punto di contatto delle pinne sinistre dei pesci rossi) ed infine delle loro ali destre e sinistre (dove vi sono anche le intersezioni rispettivamente delle pinne destre e delle code dei



pesci rossi). Più precisamente mettendo a fuoco la nostra attenzione, ad esempio, sui quattro vertici del parallelogramma formato dai punti d'incontro (punti di rotazione di ordine due) delle teste degli uccelli bianchi, vediamo



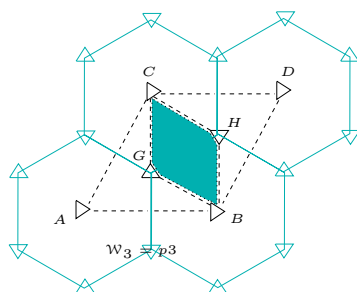
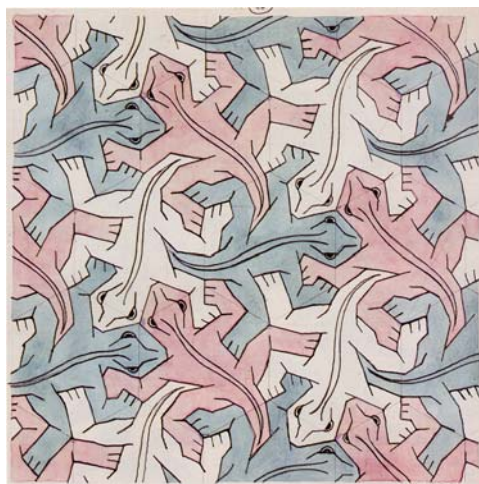
come i suoi lati siano bisecati da punti di rotazione dello stesso ordine: per il lato orizzontale abbiamo che il suo punto medio è dato dall'intersezione delle loro ali sinistre (anch'esso punto di rotazione di ordine due) mentre per il lato obliquo si ha un punto di rotazione di ordine due nell'intersezione delle code dei due volatili.

Infine, al centro di tale parallelogramma (generato da due vettori, uno obliquo di modulo pari alla lunghezza dei due uccelli e l'altro orizzontale di modulo diverso dal primo) abbiamo un ultimo punto di rotazione di ordine due ottenuto dall'intersezione delle ali destre dei due volatili.

Dunque oltre alle traslazioni, in quest'opera, si trovano simmetrie rotazionali

di ordine due e la cella individuata è riconducibile al gruppo spaziale **p2**. Anche qui si sta parlando di un reticolo obliquo.

Nella figura qui riportata (*Lucertola*) riconosciamo punti di rotazione di ordine tre, ottenuti dall'intersezione delle tre teste di lucertola, individuando in questo modo i vertici della cella unitaria rombica (posta al centro dell'immagine) contenente al suo interno due punti di rotazione dello stesso ordine, i quali vengono ricavati l'uno dai punti d'incontro



zampe inferiori destre dei rettili e l'altro dall'intersezione delle loro zampe sinistre. In questa immagine compaiono, dunque, solo simmetrie rotazionali di 120° e quelle traslazionali.

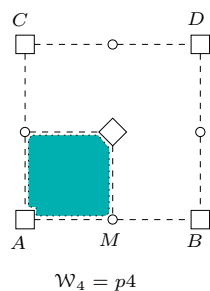
La stampa è priva di altre simmetrie, dunque il tutto è riconducibile ad un gruppo cristallografico **p3**. Il reticolo che si viene a formare è esagonale.



Nell'opera *Conchiglie e stelle di mare* riportata di seguito, possiamo individuare centri di rotazione di ordine due e quattro.

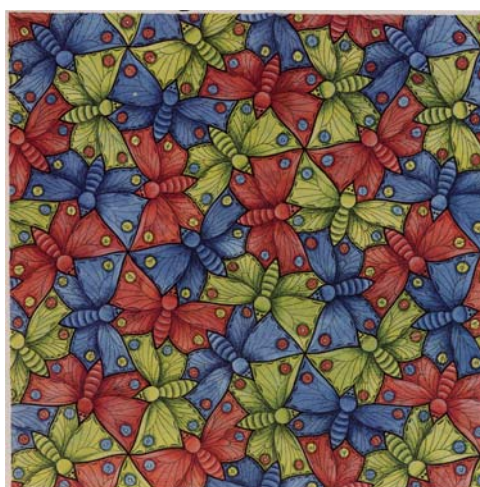
La cella di base è un quadrato ai cui vertici si trovano centri di rotazione di ordine quattro, ottenuti dal punto d'incontro delle quattro conchiglie. I lati della cella sono bisecati da centri di rotazione di ordine due, che si trovano all'interno

dei paguri (consideriamo solo il contorno della figura altrimenti non potrem-



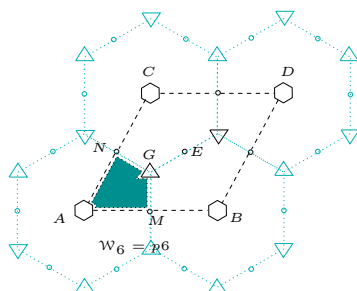
mo parlare di simmetria) e al centro di essa troviamo un punto di rotazione di ordine quattro dato dal punto di contatto delle quattro stelle di mare (equivalentemente dai quattro paguri). Possiamo dunque associare a questa stampa il gruppo spaziale **p4**. Dunque riproducendo per traslazione (verticale o orizzontale) la cella unitaria, individuata precedentemente, viene a formarsi un reticolo quadrato dando così origine a quella che è l'immagine creata da Escher.

In questa immagine (*Farfalla*) possiamo individuare centri di rotazione di ordine due, tre e sei. Il parallelogramma di base si ottiene unendo i punti di contatto della parte superiore delle ali sinistre delle farfalle.



Notiamo che i punti medi dei lati del parallelogramma sono centri di rotazione di ordine due e sono dati

dall'intersezione della parte superiore delle ali destre. All'interno della cella troviamo un punto di rotazione di ordine due, dato dal punto di contatto delle ali superiori destre (al centro della cella) e due punti di rotazione di ordine tre ottenuti dall'intersezione delle ali inferiori destre delle farfalle. Quest'ultimi vengono a trovarsi sulla diagonale della cella unitaria rombica.



Associamo quindi a questa figura il gruppo spaziale **p6**.

Anche in questo caso il reticolo che ne viene generato è esagonale.

Consideriamo ora quei gruppi spaziali contenenti, oltre alle simmetrie di rotazione, anche simmetrie di riflessione rispetto ad una retta.

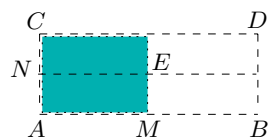
Esaminiamo quelli in cui ad un reticolo rettangolare è associata una linea (o più) di riflessione m oppure una linea (o più) di glissoriflessione g , questi sono i gruppi indicati rispettivamente con pm e pg .

Per il primo, non abbiamo a disposizione alcun disegno di Escher, come sappiamo in tal caso esistono due tipi indipendenti di riflessioni (ossia non è possibile ottenere l'una dall'altra mediante una simmetria della tassellazione considerata) con assi paralleli.

Per quanto riguarda il gruppo pg abbiamo la seguente figura (*Pessimista/Ottimista*) escheriana. Considerando i due omini neri, posti al centro del disegno, messi verticalmente l'uno rispetto all'altro e rivolti verso direzioni opposte, osserviamo che entrambi



formano una cella unitaria rettangolare. Infatti, si prendano come vettori

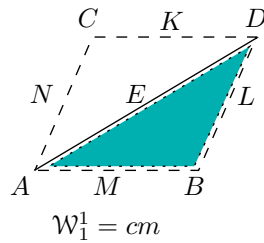


$$\mathcal{W}_1^3 = pg$$

generatori quello verticale di modulo pari a due volte l'altezza del personaggio (facciamo partire una linea da naso a naso) e quello orizzontale di modulo uguale alla sua lunghezza, applicati entrambi nella punta del naso dell'omino nero al

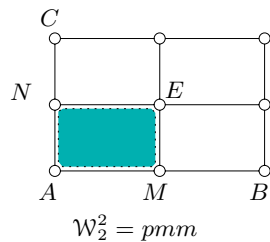
centro del disegno. Vediamo che applicando una glissoriflessione, di asse verticale con vettore rivolto verso il basso (o verso l'alto) e di modulo pari alla metà del vettore di traslazione verticale (avente asse di riflessione passante per il punto medio del lato orizzontale della cella), la figura viene mandata a coincidere con un'altra. Dunque abbiamo individuato la cella unitaria rettangolare e possiamo così associare a questa figura il gruppo cristallografico pg .

Nella figura riportata di seguito (*Scarabeo*), osserviamo che non compare alcun centro di rotazione. Consideriamo la cella rettangolare, avente per vertici i punti di contatto "testa-coda" degli insetti e per diagonale l'asse di simmetria dello scarabeo, ad esempio quello di colore più chiaro. Si ottiene per traslazione, rispetto ai due vettori generatori, della cella ricavata, l'intero disegno realizzato dall'artista. Possiamo associare a questo disegno il gruppo cristallografico **cm**; questo simbolo



due parti rappresentano, rispettivamente, una cella centrata priva di centri di rotazione. La terza parte, occupata dalla lettera m, indica la presenza di linee di riflessioni e glissoriflessioni perpendicolari ai lati della cella. Infine abbiamo, nella quarta posizione, il numero 1, il quale indica l'assenza di riflessioni e glissoriflessioni con assi inclinati di un angolo di 180 gradi rispetto un lato della cella (quindi paralleli al lato stesso).

Per quanto riguarda i gruppi **pmm** e **cmm**, non abbiamo a disposizione alcun disegno dell'artista da poter illustrare. Ci limiteremo dunque ad una

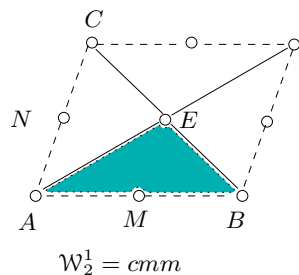


breve lettura della loro notazione cristallografica. Per indicare il gruppo **pmm** viene adottato anche il simbolo **p2mm**, il quale ci informa che stiamo parlando di una cella primitiva, dove compaiono centri di rotazione di ordine massimo pari a due; questo ci

viene fornito dai primi due posti occupati dai simboli *p* e 2 della notazione. La lettera *m*, al terzo posto, sta ad indicare che ci sono riflessioni i cui assi

sono perpendicolari ad un lato della cella. La lettera m , nella quarta posizione, indica che ci sono riflessioni inclinati di un angolo pari a 180 gradi rispetto ad un lato della cella (ossia paralleli al lato stesso), dunque perpendicolari alle riflessioni precedentemente citate. Non ci sono glissoriflessioni.

Per indicare il gruppo $cm\bar{m}$, viene usata anche la notazione **$c2mm$** , la quale sta ad indicare che la cella è centrata e l'ordine massimo di rotazione è pari



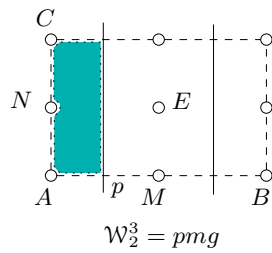
a due; dunque il gruppo $c2mm$ contiene un 2-centro. La lettera m , al terzo posto, sta ad indicare che ci sono riflessioni e glissoriflessioni, i cui assi sono perpendicolari ad un lato della cella. La lettera m , nella quarta posizione, indica che ci sono riflessioni e glissoriflessioni inclinati di un angolo

pari a 180 gradi rispetto ad un lato della cella (ossia paralleli al lato stesso), dunque perpendicolari alle riflessioni precedentemente citate.

Nella seguente figura (*Granchi*), si possono individuare centri di rotazione di ordine due nel punto d'incontro delle zampe dei granchi (a metà zampetta sinistra dei due granchi del medesimo colore). Individuiamo una cella rettangolare generata da due vettori indipendenti (ovviamente perpendicolari tra loro, essendo la cella rettangolare), di moduli pari alla lunghezza dei due granchi per il vettore verticale e di modulo uguale alla larghezza dei due granchi per quello orizzontale (se si analizza l'opera considerando la diversità di colore, altrimenti la cella unitaria si dimezza). Abbiamo due linee di riflessione perpendicolari al lato orizzontale della cella (tali assi di riflessione dividono verticalmente i granchi all'interno del



rettangolo) e due glissoriflessioni di asse perpendicolare al lato verticale (gli assi di quest'ultimi, vengono a trovarsi sui lati orizzontali del rettangolo).



Possiamo dunque associare a tale opera il gruppo cristallografico **pmg** denotato anche con **p2mg**. Dove i primi due simboli indicano che la cella è primitiva e ci sono centri di rotazione di ordine due. La lettera *m* al terzo posto indica la presenza di riflessioni e glissoriflessioni di assi perpendicolari ad un lato della

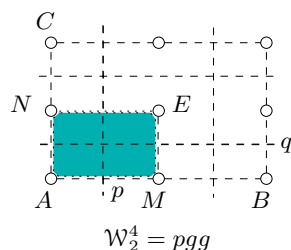
cella. In ultimo, troviamo la lettera *g*, che indica la presenza delle sole glissoriflessioni di assi inclinati di 180 gradi rispetto al lato della cella (quindi perpendicolari agli assi di simmetria precedentemente citati).

Nel disegno (*Due pesci*) realizzato dall'artista, possiamo individuare centri di rotazione di ordine due, dati dai punti d'incontro (della parte destra del contorno occhi) dei due pesci celesti, i quali individuano i vertici di una cella rettangolare. Osserviamo che nei punti medi dei lati del rettangolo troviamo centri di rotazione dello stesso ordine. Per il lato orizzontale tale punto è dato dall'intersezione delle pinne sinistre dei pesci celesti, mentre per quello verticale il punto coincide con



l'intersezione delle pinne destre degli stessi pesci. Possiamo notare che non compaiono riflessioni, ma solo glissoriflessioni di assi perpendicolari ai lati della cella unitaria.

Possiamo, dunque, associare a questa immagine il gruppo cristallografico **pgg**.



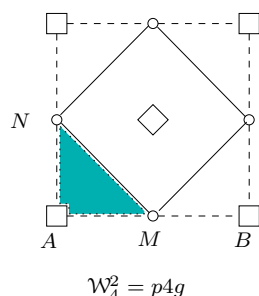
Una seconda notazione per questo gruppo è **p2gg**. Quest'ultima sta ad indicare che il tipo di cella trattata è primitiva e possiede centri di rotazione di ordine due. Mentre il terzo e il quarto simbolo ci suggeriscono che non compaiono riflessioni, ma

soltanto glissoriflessioni di assi perpendicolari ad entrambi i lati della cella unitaria.

Nell'immagine seguente (*Cimice*), sono presenti centri rotazionali di ordine due e quattro. Come possiamo vedere, nel punto d'incontro delle zampette delle quattro cimici, troviamo centri di rotazione di ordine quattro, i quali corrispondono ai vertici di un quadrato con lati di lunghezza pari a "due volte l'insetto". Osserviamo che un tale punto si trova anche all'interno del quadrilatero. Notiamo, inoltre, che nel punto medio dei lati della figura geometrica individuata, si trovano



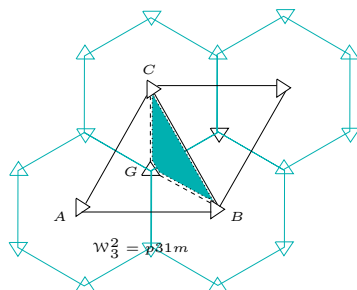
dei centri di rotazione di ordine due, dati dall'intersezione delle teste degli insetti. Abbiamo così individuato una cella unitaria quadrata.



Ci proponiamo, ora, di osservare la presenza di riflessioni nell'opera. Possiamo individuare gli assi di riflessione se uniamo i due punti medi dei lati consecutivi della cella unitaria; così facendo, riusciamo a vedere come la cimice venga divisa esattamente a metà da tali "linee". In ultimo vediamo che traslando (verticalmente o orizzontalmente) e poi riflettendo, rispetto ad un'asse parallelo al vettore di traslazione,

otteniamo la sovrapposizione di un insetto in un'altro; vi è, quindi, la presenza di glissoriflessioni. Possiamo associare a questo disegno il gruppo cristallografico **p4g** (analogamente **p4gm**).

Nella seguente figura (*Clown*), è semplice individuare i centri di rotazione di ordine tre ricavati dal punto d'incontro delle teste nere dei clown, i quali individuano i quattro vertici di una cella unitaria rombica. Osserviamo che all'interno del parallelogramma, compaiono due centri di rotazione dello stesso ordine, ottenuti: l'uno dal punto d'incontro delle ginocchia sinistre degli omini neri e l'altro dal punto d'incontro delle loro ginocchia destre. Osserviamo, inoltre, che sulla diagonale della cella unitaria rombica viene a

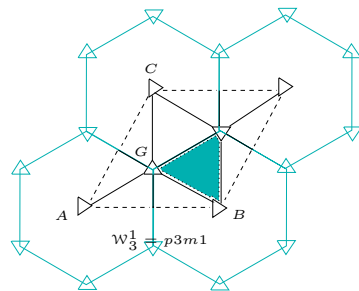


trovarsi un asse di riflessione. Quindi possiamo associare a questo disegno, in base alle simmetrie che quest'opera contiene, il gruppo cristallografico **p31m**. Tale notazione indica la presenza di una cella primitiva con punti rotazionali di ordine tre ai vertici. Inoltre il numero 1, al terzo posto, sta ad indicare l'assenza di assi di simmetria perpendicolari ai lati della cella. Mentre la lettera *m*, in ultima posizione, indica la presenza di assi di simmetria, aventi un'inclinazione di angolo pari a 60 gradi rispetto ad un lato della cella.

Infine consideriamo il disegno *Pesce-anatra-lucertola*, che presenta soltanto centri di rotazione di ordine tre, ottenuti dai punti d'incontro delle bocche dei tre pesci, i quali individuano i vertici di una cella unitaria rombica. Osserviamo che all'interno della cella ricavata, si trovano due punti rotazionali dello stesso ordine, ottenuti rispettivamente: l'uno dal punto in comune delle tre



teste di tartaruga e l'altro dal punto d'incontro delle tre code dello stesso animale. Notiamo, inoltre, la presenza di assi di simmetria perpendicolari ai lati della cella individuata, i quali dividono a metà pesci, oche e tartarughe. Traslando parallelamente rispetto ai lati del parallelogramma, si ottiene l'intero disegno. Possiamo così attribuire a quest'opera il gruppo cristallografico **p3m1**.



Per i rimanenti gruppi, **pm**, **p4m** e **p6m**, non siamo forniti di alcun disegno escheriano da poter analizzare.

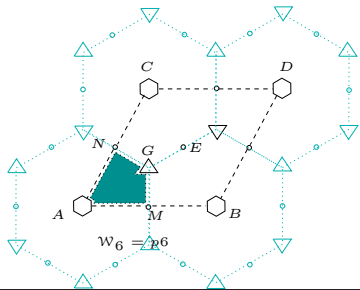
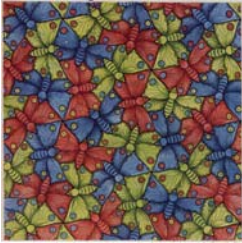
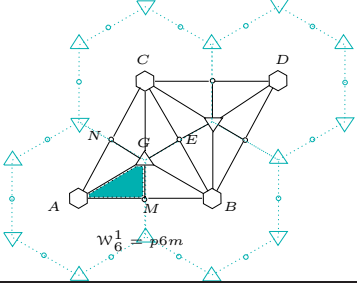
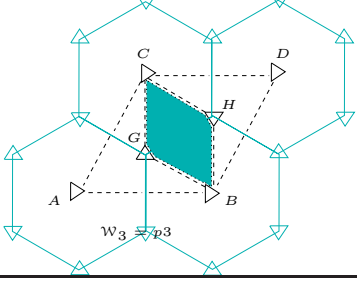
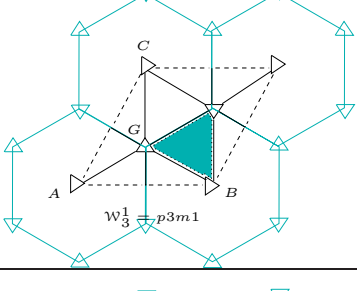
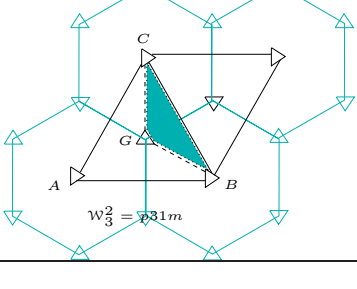
Una rapida lettura di tali gruppi è la seguente:

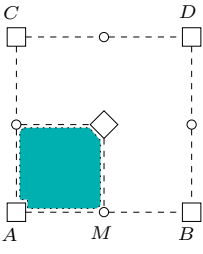
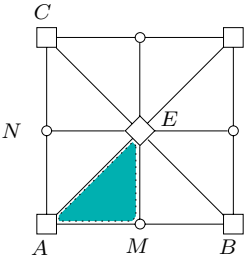
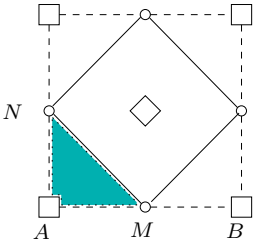
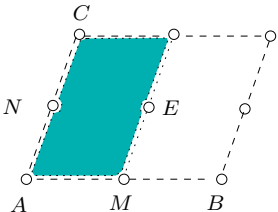
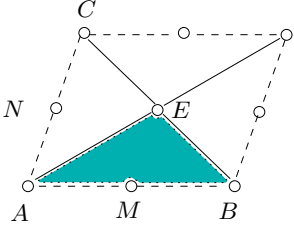
Per il gruppo **pm** viene adottato anche il simbolo **p1m1**, il quale ci informa che si sta parlando di una cella unitaria primitiva e le uniche rotazioni sono quelle banali, questo è quello che ci suggeriscono i primi due simboli. Mentre la lettera *m*, in terza posizione, indica che vi sono riflessioni di assi perpendicolari al lato della cella unitaria e il numero 1, in ultima posizione, indica che non ci sono assi di simmetria di angoli pari a 180 gradi rispetto ai lati della cella stessa.

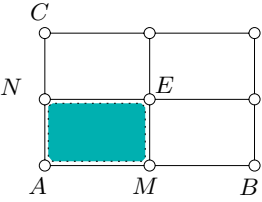
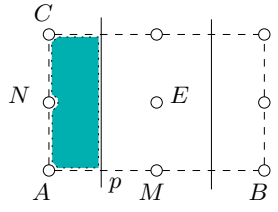
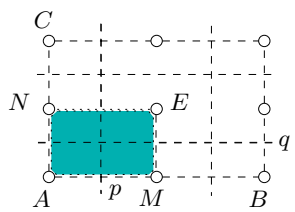
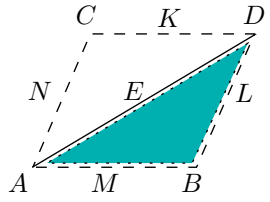
Mentre per il gruppo **p4m**, la notazione maggiormente dettagliata è **p4mm**

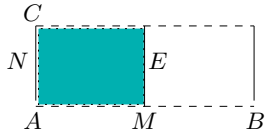
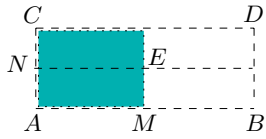
che indica la presenza di centri di rotazione di ordine quattro in una cella primitiva; questo vale per i primi due caratteri. Invece le lettere m nelle ultime due posizioni della "sigla" rappresentano, rispettivamente, la presenza di riflessioni e glissoriflessioni aventi assi normali ad un lato della cella, e la presenza di riflessioni e glissoriflessioni aventi assi inclinati, di un angolo pari a 45 gradi rispetto ad un lato della cella.

Infine il gruppo **p6m**, indicato più precisamente con la notazione **p6mm**, ci informa che siamo in presenza di una cella primitiva avente centri di rotazione massima pari a sei. Le lettere m nelle ultime due posizioni, invece, rendono nota la presenza di riflessioni e glissoriflessioni di assi normali ad un lato di una cella e la presenza delle stesse simmetrie di assi inclinati di un angolo di 60 gradi rispetto al lato opposto della cella stessa.

$\mathcal{W}_6 = p6$	$p6$		
$\mathcal{W}_6^1 = p6m$	$p6mm$		
$\mathcal{W}_3 = p3$	$p3$		
$\mathcal{W}_3^1 = p3m1$	$p3m1$		
$\mathcal{W}_3^2 = p31m$	$p31m$		

$\mathcal{W}_4 = p4$	$p4$	 $\mathcal{W}_4 = p4$	
$\mathcal{W}_4^1 = p4m$	$p4mm$	 $\mathcal{W}_4^1 = p4m$	
$\mathcal{W}_4^2 = p4g$	$p4gm$	 $\mathcal{W}_4^2 = p4g$	
$\mathcal{W}_2 = p2$	$p211$	 $\mathcal{W}_2 = p2$	
$\mathcal{W}_2^1 = cmm$	$c2mm$	 $\mathcal{W}_2^1 = cmm$	

$\mathcal{W}_2^2 = \mathbf{pmm}$	$p2mm$	 $\mathcal{W}_2^2 = pmm$	
$\mathcal{W}_2^3 = \mathbf{pmg}$	$p2mg$	 $\mathcal{W}_2^3 = pmg$	
$\mathcal{W}_2^4 = \mathbf{pgg}$	$p2gg$	 $\mathcal{W}_2^4 = pgg$	
$\mathcal{W}_1 = \mathbf{p1}$	$\mathbf{p1}$	 $\mathcal{W}_1 = p1$	
$\mathcal{W}_1^1 = \mathbf{cm}$	$\mathbf{c1m1}$	 $\mathcal{W}_1^1 = cm$	

$\mathcal{W}_1^2 = \mathbf{pm}$	$p1m1$	 $\mathcal{W}_1^2 = pm$	
$\mathcal{W}_1^3 = \mathbf{pg}$	$p1gl$	 $\mathcal{W}_1^3 = pg$	

Riferimenti bibliografici

- [1] Andrea Bruno. *Appunti del corso MC1*.
- [2] David Hilbert and Stefan Cohn-Vossen. *Geometria intuitiva*, volume 63 of *Complementi di topologia di Pavel Sergeevič Aleksandrov. Traduzione di Adolfo Verson. Biblioteca di cultura scientifica*. Paolo Boringhieri, Torino, 1960.
- [3] George Edward Martin. *Transformation geometry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1982. An introduction to symmetry.
- [4] V. V. Nikulin and I. R. Shafarevich. *Geometries and groups*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1987. Translated from the Russian by M. Reid, Springer Series in Soviet Mathematics.
- [5] Laura Pinzi. Gruppi cristallografici e automorfismi di curve ellittiche. Tesi di Laurea in Matematica, Università "Roma Tre", 2004. Roma.
- [6] Roberta Raja. Geometrie localmente euclidee nell'opera di m.c.escher. Tesi di Laurea in Matematica, Università "Roma Tre", 2003. Roma.
- [7] Germano rigault. *Introduzione alla cristallografia*. Paolo Boringhieri, Torino, 1960.
- [8] Doris Schattschneider. *Visioni della Simmetria*. Zanichelli, 1996.