UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

FACOLTÀ DI S.M.F.N.

Tesi di Laurea in Matematica

presentata da Paolo Santini

Politopi e loro simmetrie

Relatore

Prof. Andrea Bruno

Il Candidato   Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2005-2006

Classificazione:51M20

Indice

Introduzione

La parola politopo fu inventata nel 1882 da un matematico di nome Hoppe, ma i primi fondamenti sull'argomento risalgono agli antichi Greci, più di duemila anni fa. Tutte le idee e i concetti basilari si devono però a Ludwigh Schl*ä*fli, che fu il primo ad immaginare la loro esistenza a metà dell'ottocento; un'epoca in cui poche altre persone concepivano le possibilità di una geometria in più di tre dimensioni.
Nel primo capitolo si parla di poligoni, cosa sono e quando si dicono regolari; nel secondo e terzo paragrafo analizziamo le simmetrie del piano, quali sono e come agiscono sulle figure. In particolare studieremo i gruppi di simmetria e i loro sottogruppi finiti.
Nel secondo capitolo passiamo ai poliedri, analizzando la loro struttura e le loro proprietà; ci accorgeremo nel secondo paragrafo che esistono solo pochi poliedri regolari, cinque per esattezza al contrario di quanto si potrebbe immaginare. Infine analizzeremo le isometrie dello spazio, dando anche qui una suddivisione dei sottogruppi finiti.
Il terzo capitolo riguarda il ruolo che i poliedri e le figure geometriche in generale hanno avuto nella storia; molti simboli e trattati parlano di poliedri regolari, i Solidi Platonici, associandoli agli elementi base della vita.
Nel quarto capitolo infine parleremo di politopi generali in n dimensioni, dandone definizioni e proprietà. Vedremo come Schl*ä*fli ha classificato i politopi tramite la sua simbologia, concludendo con l'analisi delle isometrie nell'iperspazio, soffermandoci in particolare sui sottogruppi discreti, detti gruppi di Coxeter.

Capitolo 1

Poligoni e simmetrie del piano

1.1 I poligoni

Tutti noi sappiamo come sono fatti i *poligoni*: triangoli, quadrati, pentagoni sono figure che fanno parte della vita quotidiana. Ma che cos'é un poligono? Un poligono é una figura geometrica limitata da porzioni di linee e piani. Per essere precisi, definiamo un poligono di p lati e p vertici come un insieme di p segmenti $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_pA_1$ unenti coppie di p punti $A_1, \cdots, A_p$ [3]. I segmenti e i punti prendono il nome rispettivamente di *lati* e *vertici*.

Definizione 1.1. *Un poligono si dice regolare se é equiangolo ed equilatero.*

Il quadrato, ad esempio, é regolare mentre il rettangolo no, poichè é equiangolo ma non equilatero.

Definizione 1.2. *Dato un vertice a di un poligono definiamo figura al vertice a del poligono il segmento che unisce i punti medi dei lati aventi come vertice comune a.*

Se consideriamo un poligono e ne tracciamo tutte le figure al vertice, tali segmenti formano un nuovo poligono, detto *poligono troncato* .

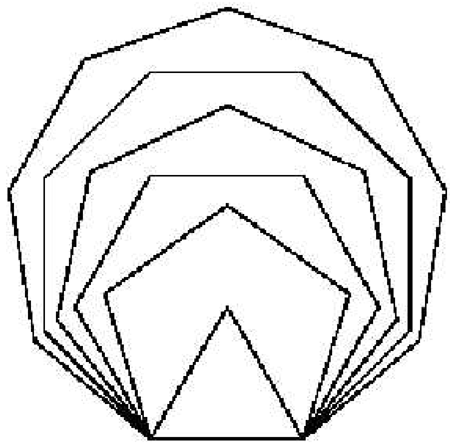

Figura 1.1

1.2 Simmetrie dei poligoni

Per comprendere adeguatamente gli argomenti di questa sessione bisogna conoscere la teoria dei gruppi, per la quale rimandiamo ad altre fonti lo studio [11]. Ci limitiamo a ricordare che un insieme di elementi o operazioni forma un **gruppo** se é chiuso rispetto ad una qualche operazione associativa, se contiene un elemento neutro o un'identità e se ogni elemento ha un opposto (nel caso di operazioni un'inversa). Il numero di operazioni o ele-

menti distinti se finito, prende il nome di *ordine* del gruppo, un sottoinsieme di operazioni il quale prodotto con ripetizione comprende l'intero gruppo é detto insieme di generatori; se una singola operazione genera l'intero gruppo questo é detto *gruppo ciclico*.
Sia data una figura nel piano. I movimenti rigidi (*isometrie*) che la mutano in sè corrispondono alle simmetrie della figura stessa. Si pensi ad esempio ad un rettangolo: é facile vedere che l'insieme dei movimenti che lo fissa é costituito da quattro elementi; sono l'identità, i ribaltamenti rispetto agli assi orizzontali e verticali, la rotazione di π in senso antiorario attorno al centro del rettangolo.
Se si parte da un quadrato invece, saranno di più i movimenti rigidi che si possono fare senza mutare la figura: saranno l'identità, tre rotazioni di $\pi/2$ π $3\pi/2$ rispettivamente, quattro ribaltamenti rispetto agli assi e alle diagonali.
L'insieme dei movimenti rigidi che mutano in sè un poligono regolare di n lati forma un gruppo e prende il nome di **gruppo diedrale** D_n.
Ogni isometria piana è composizione di al più tre riflessioni, e possiamo classificarle in base alla matrice $A \in O^+(2)$ associata: se det(A) = 1 l'isometria è diretta, se det(A) = -1 l'isometria è inversa. Un'isometria diretta se ha punti fissi é una rotazione, altrimenti è una traslazione; un'isometria inversa se ha punti fissi è una riflessione, altrimenti è una glissoriflessione. Per una trattazione dell'argomento più ampia rimandiamo a [4].
Un teorema classico dovuto a Chasles [12] afferma che ogni isometria del piano euclideo è una traslazione, una rotazione, una riflessione oppure una glissoriflessione.

1.3 Sottogruppi finiti di isometrie del piano

I gruppi finiti di simmetrie furono studiati sitematicamente da *Leonardo da Vinci* nel corso delle sue indagini architettoniche sulle simmetrie di un edificio, e sul modo in cui esse vengono modificate dall'aggiunta di absidi e nicchie.

Teorema 1.1. *Ogni sottogruppo finito non banale delle isometrie del piano* *è isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, per qualche $n{\geq}2$, oppure a uno dei gruppi diedrali D_{2n}, $n{\geq}2$. [13]*

Dimostrazione. Sia G un sottogruppo finito non banale delle isometrie del piano. Esso non può contenere traslazioni non banali, e dunque neanche glissoriflessioni, perchè il quadrato di una glissoriflessione é una traslazione non banale. Dunque G conterrà unicamente rotazioni e riflessioni.
Supponiamo che consista solo di rotazioni. Prendiamo due rotazioni di centri C e D ed angoli θ e φ, denotiamole con $R_{C,\theta}$ e $R_{D,\varphi}$, con C$\neq$D. Se $\theta+\varphi = 2k\pi$ allora $R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi}$ é una traslazione non banale, e ciò é impossibile.
In caso contrario G contiene la composizione

$$f = (R_{C,\theta})^{-1} \circ (R_{D,\varphi})^{-1} \circ R_{C,\theta} \circ R_{D,\varphi}$$

Poichè $(R_{C,\theta})^{-1} = R_{C,-\theta}$ e $(R_{D,\varphi})^{-1} = R_{D,-\varphi}$ la loro composizione sarà una rotazione di angolo $-\theta - \varphi$ e f sarà una traslazione non banale [14]. Ciò é impossibile, si deve avere C=D. Il sottogruppo G consiste dunque di sole rotazioni con lo stesso centro C, supponiamo sia $R = R_{C,\gamma} \in G$ con γ minimo valore intero possibile. Dovrà essere $R_{C,\theta} = R^k$ per qualche k>0, altrimenti si negherebbe la minimalità di γ; quindi gli elementi di G sono potenze di R, e G é un gruppo ciclico, isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Supponiamo ora che G contenga almeno una riflessione. Supponiamo ne contenga m, e sia ρ una di esse. Il sottogruppo delle isometrie dirette è formato da n rotazioni $R, R^2, ..., R^n = 1$; gli n prodotti $\rho \circ R, \rho \circ R^2, ..., \rho \circ R^{n-1}, \rho$ sono isometrie inverse distinte fra loro e quindi riflessioni. Ne segue che $n \leq m$. D'altra parte moltiplicando ρ a destra per le m riflessioni si ottengono altrettante rotazioni distinte, dunque $m \leq n$.
In conclusione n=m e gli elementi di G sono:

$$R, R^2, ..., R^n = 1$$

$$\rho \circ R, \rho \circ R^2, ..., \rho \circ R^{n-1}, \rho$$

Quindi G é isomorfo a D_{2n}. □

Capitolo 2

Poliedri e loro simmetrie

2.1 I poliedri

Un poliedro può essere definito come un insieme finito e connesso di poligoni piani, tale che ogni lato di ogni poligono ne incontra solo un altro, con la premura che i poligoni circostanti un singolo vertice formino un solo circuito.
I poligoni prendono il nome di *facce*, ed i loro lati *spigoli*. Il caso più importante di poliedro é quando tutti i vertici di ogni faccia giacciono su un lato del piano contenente la faccia stessa: parleremo in questo caso di poliedro convesso nello spazio. Si può dimostrare che per i poliedri tale proprietà é equivalente all'ordinaria convessità come sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$
Il teorema che enunceremo ora é noto come **'Formula di Eulero'**, e riguarda solo i poliedri convessi.

Teorema 2.1. *Se un poliedro convesso ha v vertici, e spigoli e f facce, allora* $v - e + f = 2$

La formula di Eulero é stata dimostrata in molti modi, quello che noi utilizzeremo sfrutta la visualizzazione di un poliedro come *diagramma di Schlegel.* [6]
Consideriamo il grafo che si ottiene proiettando su un piano vertici e spigoli di un poliedro da un punto opportunatamente scelto: precisamente scegliamo il punto molto vicino ad una faccia del poliedro, in modo che tale faccia si

proietti in un poligono al cui interno si proiettano tutti i restanti vertici e spigoli del poliedro; il grafo così ottenuto si dice diagramma di Schlegel del poliedro. Nel diagramma di Schlegel K di un poliedro P il numero dei vertici (rispettivamenete degli spigoli) del grafo K coincide con quello del poliedro P, mentre il numero delle facce di P é uguale al numero delle componenti connesse del complementare di K nel piano: infatti, la componente illimitata corrisponde alla faccia vicino alla quale si trova il punto da cui si proietta, mentre le componenti limitate sono in corrispondenza biunivoca con le altre facce del poliedro. Possiamo ora dimostrare il teorema 2.1

Dimostrazione. Consideriamo un diagramma di Schlegel K del poliedro P; l'idea della dimostrazione é di modificare questo grafo con una serie di mosse, ciascuna delle quali non cambi la quantità v - e + f, fino a ridurlo ad un singolo triangolo per il quale v - e + f = 3 - 3 + 2 = 2.
Innanzitutto possiamo supporre che tutte le componenti connesse limitate del complementare di K siano triangolari: per ottenere questo, basta osservare che ogni n-gono si può dividere in n - 2 triangoli, senza aggiungere nuovi vertici, mediante le n - 3 diagonali uscenti da un vertice; procedendo in questo modo su ogni componente non triangolare, ad ogni passo si ha che:

$$f' = f + (n-3) \quad v' = v \quad e' = e + (n-3)$$

e quindi v' - e' + f' = v - e + f.
Supponiamo allora che le componenti connesse limitate del complementare di K siano tutte triangolari, fissiamo uno di questi triangoli che sia adiacente alla componente illimitata, ed eliminiamolo, ottenendo così un uovo grafo K'. Ci sono due possibili casi a seconda che il triangolo eliminato t abbia uno o due lati in comune con la componente connessa illimitata. Nel primo caso si ha f' = f - 1, v' = v, e' = e - 1.(t_1 figura 2.1a)
Mentre nel secondo si ha f' = f - 1, v' = v - 1, e' = e - 2.(t_2 figura 2.1a)

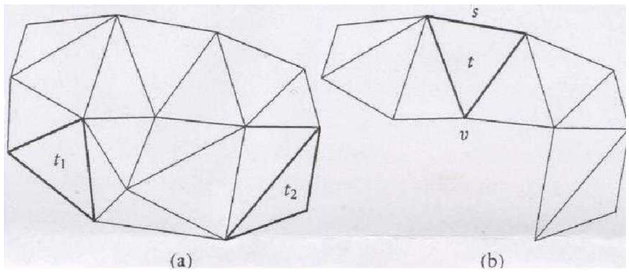

Figura 2.1

In entrambi i casi risulta quindi v' - e' + f' = v - e + f e l'idea é quindi di iterare questa mossa finchè non ci si riduce ad un triangolo. Esiste una terza possibilità (figura 2.1*b*) per un triangolo adiaciente alla componente illimitata, cioè che abbia in comune con questa uno spigolo s ed un vertice v non adiacente. Questa situazione non é possibile all'inizio, ma può presentarsi dopo che abbiamo tolto alcuni triangoli: é comunque impossibile che tutti i triangoli siano di questo tipo, quindi possiamo procedere come sopra descritto ed arrivare ad un solo triangolo. □

2.2 Classificazione dei poliedri

Vediamo ora di dare una definizione di poliedro regolare e di verificare un importante risultato non del tutto ovvio a priori: esistono soltanto cinque poliedri regolari.

Definizione 2.1. *Un poliedro di dice* **regolare** *se é convesso, tutte le sue facce sono poligoni regolari, e in ogni vertice si incontrano lo stesso numero di facce.*

Supponiamo di avere un poliedro di v vertici, e spigoli e f facce, ognuna di quest'ultime formata da p lati e con ad ogni vertice q facce che concorrono ad esso. Ogni spigolo é condiviso da due vertici e da due facce, avremo dunque $2e = qv = pf$ [9]. Dalla formula di Eulero

$$2 = v - e + f = v - (qv)/2 + (qv)/p = (2p + 2q - pq)(v/2p) = [4 - (p-2)(q-2)](v/2p)$$

Quindi, abbiamo $v = \frac{4p}{2p+2q-pq}$, $e = \frac{qv}{2}$, $f = \frac{qv}{p}$
e $(p-2)(q-2) < 4$
Le prime tre equazioni ci dicono che v, e, f sono determinati una volta conosciuti i valori di p e q; segue che p e q determinano al più un solido regolare. Dato che p e q sono interi maggiori di due, la disuguaglianza é molto facile da risolvere: ci sono esattamente cinque soluzioni per p e q alla disuguaglianza, e sono date nelle prime due colonne della tabella.

p	q	v	e	f	Platonic Solid
3	3	4	6	4	Regular Tetrahedron
3	4	6	12	8	Regular Octahedron
3	5	12	30	20	Regular Icosahedron
4	3	8	12	6	Cube
5	3	20	30	12	Regular Dodecahedron

Tabella 2.1

Abbiamo mostrato che ci sono al più cinque poliedri regolari: il cubo, il tetraedro, l'ottaedro, l'icosaedro e il dodecaedro.

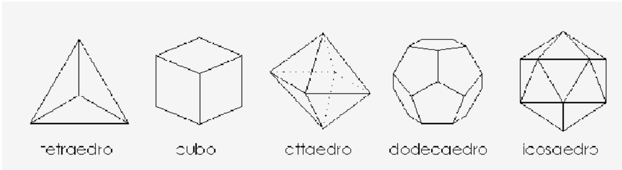

Figura 2.2

2.3 I gruppi di simmetria dei poliedri

Quando diciamo che una figura é simmetrica, intendiamo dire che esiste una isometria o movimento rigido dello spazio che induce una biezione su di essa. L'insieme di tali isometrie forma un gruppo, detto *gruppo di simmetria* della figura.

Ritorniamo ai nostri poliedri regolari ed osserviamo le cinque figure: non é difficile notare che é possibile prendere i vertici del tetraedro fra quelli del cubo e che quindi ogni simmetria del tetraedro é anche una simmetria del cubo.

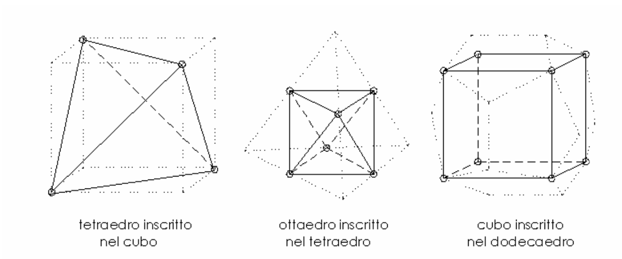

Figura 2.3

Dunque il gruppo di simmetria di un cubo contiene quello di un tetraedro; il poliedro formato prendendo come vertici i centri delle facce di un cubo ha sei vertici ed é chiaramente un ottaedro regolare. Un poliedro ottenuto prendendo come vertici i centri delle facce di un altro poliedro prende il nome di *duale*; il duale di un tetraedro é ancora un tetraedro, il duale di un cubo é un ottaedro, il duale di un ottaedro é un cubo. Dunque ogni simmetria dell'ottaedro é una simmetria del cubo e viceversa, ne segue che i due hanno lo stesso gruppo di simmetria.

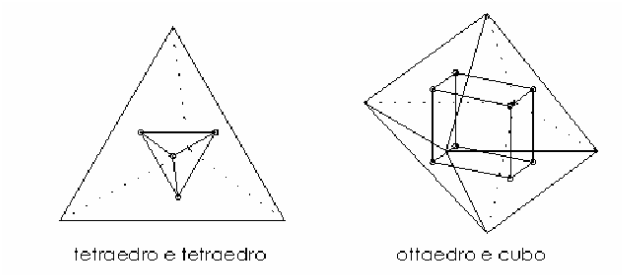

Figura 2.4

Utilizzando un pò più di immaginazione, si vede che il duale di un icosaedro risulta essere un dodecaedro e il duale di un dodecaedro é un icosaedro; concluderemo quindi che i due poliedri hanno lo stesso gruppo di simmetria. Tutti questi risultati sono racchiusi in un teorema dovuto a **Theatetus** (419-369 a.c.), famoso soprattutto per aver costruito i fondamenti degli studi sugli irrazionali che appaiono negli 'Elementi' di Euclide [10].

Teorema 2.2. *Esistono esattamente cinque poliedri regolari. Il gruppo di simmetria di un cubo é il gruppo di simmetria di un ottaedro regolare. Il gruppo di simmetria di un dodecaedro regolare é il gruppo di simmetria di un icosaedro regolare. Il gruppo di simmetria di un icosaedro regolare contiene il guppo di simmetria di un ottaedro regolare, il quale contiene il gruppo di simmetria di un tetraedro regolare.*

2.4 Sottogruppi finiti di isometrie dello spazio

Per arrivare alla classificazione dei sottogruppi finiti di isometrie nello spazio, abbiamo bisogno di alcune definizioni [1].

Definizione 2.2. *Sia X un insieme. Denotiamo con S_X il gruppo delle permutazioni di X con la composizione.*

Definizione 2.3. *Sia G un gruppo e X un insieme. Una G-azione su X é un omomorfismo $\phi : G \rightarrow S_X$. Diremo che G agisce su X.*

Definizione 2.4. *Se (X,G) é un'azione su un gruppo e $x \in X$, lo stabilizzatore é il sottogruppo $G_x = (g \in G \parallel g(x) = x)$*

Definizione 2.5. *Sia (G,X) uno spazio transitivo, cioè l'azione (G,X,ϕ) é transitiva. L'orbita O(x) di $x \in X$ é definita come*

$$O(x) = \{g(x) \parallel g \in G\}$$

Corollario 2.1. *Siano X e G finiti, e consideriamo una G-azione su X. Se $A \subset X$ é un sottoinsieme che interseca ogni orbita in esattamente un punto, abbiamo*

$$|X| = \sum_{x \in A} \frac{|G|}{|G_x|}$$

Come nel caso piano, una volta fissato un sistema di riferimento, si può definire un omomorfismo fra il gruppo delle isometrie dello spazio ed $O^+(3)$, gruppo delle matrici ortogonali 3x3.

Teorema 2.3. *I sottogruppi finiti di O^+(3) sono di cinque tipi: due famiglie indicizzate con interi n$\geq$ 2,e tre gruppi eccezionali.*

Dimostrazione. Il punto di partenza é il corollario 2.1; sia G$\subset O^+(3)$ un sottogruppo finito, e consideriamo la sua azione ristretta alla sfera S^2. Introduciamo l'insieme

$$\Gamma = \left\{(g, x) \in (G \setminus e) \times S^2 \parallel g(x) = x\right\}$$

proiettato nell'insieme

$$X = \left\{x \in S^2 \parallel g(x) = x \ per \ qualche \ g \ \in G \setminus e\right\}$$

dei punti fissi non banali di G. L'elemento e denota l'elemento identità, calcoliamo la cardinalità di Γ in due modi, prima sommando per g, e poi per x. Poichè ogni g $\in G \setminus e$ ha esattamente due punti fissi distinti, abbiamo $|\Gamma| = 2(|G| - 1)$. Per calcolare X, utilizziamo il corollario 2.1 e abbiamo

$$|O(x)| = \frac{|G|}{|G_x|}$$

ma $|G_x|$ è costante per y $\in$ O(x). Chiameremo questa costante ν_x; dunque $|(G_y \setminus e)| = \nu_x - 1$. Concludiamo dunque che

$$\Gamma = \sum_{x \in A} (\nu_x - 1) \, |O(X)| = \sum_{x \in A} (\nu_x - 1) \frac{|G|}{|G_x|} = \sum_{x \in A} \frac{|G| \, (\nu_x - 1)}{\nu_x}$$

dove

$$2 - \frac{2}{|G|} = \sum_{x \in A} (1 - \frac{1}{\nu_x})$$

Se la quantità ν_x è grande, ogni quantità $1 - 1/\nu_x$ è minore di 1, e la somma sarà due o meno, altrimenti la somma sarà più grande di due. Possiamo concludere che i soli casi possibili sono racchiusi nella tabella qua sotto:

2 orbits	ν_1	ν_2	$\#G$
case I	n	n	n

3 orbits	ν_1	ν_2	ν_3	$\#G$
case II	2	2	n	$2n$
case III	2	3	3	12
case IV	2	3	4	24
case V	2	3	5	60

Tabella 2.2

Ci sono solo cinque casi possibili per le cardinalità delle orbite e per gli ordini degli stabilizzatori associati. Resta da dimostrare che tutti i possibili casi corrispondono ad un unico gruppo G.

Osserviamo che:

- Il caso I è realizzato dal gruppo ciclico di ordine n generato dalle rotazioni di ordine n in $\mathbb{R}^3$; le due orbite corrispondono ai due punti di S^2 giacenti sull'asse di rotazione.

- Il caso II corrisponde al sottogruppo di $O^+(3)$ che lascia invariato un poligono di n lati posto sul piano di $\mathbb{R}^3$ e centrato nell'origine. Prende il nome di gruppo diedrale di ordine 2n e contiene n rotazioni attorno all'asse perpendicolare al piano del poligono, più n riflessioni attraverso le linee congiungenti il centro del poligono con i suoi vertici. I due punti di S^2situati sull'asse del poligono formano una singola orbita. Una seconda orbita è data dai vertici del poligono e la terza dalle proiezioni radiali dei punti medi dei lati del poligono su S^2.

- I casi III, IV, V sono realizzati dai sottogruppi di $O^+(3)$ che lasciano invariati un tetraedro regolare, un cubo e un dodecaedro, tutti centrati nell'origine.

$\square$

Capitolo 3

Un pò di storia...

'E li platonici assomigliano quattro solidi regulari a questi quattro elementi (Aria, Terra, Acqua, Fuoco), et il quinto al Cielo. Il dodecaedro al cielo, perchè come il cielo è il più ampio di tutti gli elementi, et abbraccia ogni cosa, così il Dodecaedro è il più grande dei solidi chiusi intra una spera, et può circoscrivere ogn'uno de li altri, come Hypsicle demostra nelli Anaphorici...'
Così si esprime il matematico e filosofo Francesco Maurolico (1494-1575) nella sua 'Cosmographia' trattando dei Solidi Platonici. Ma perché un solido regolare come un Dodecaedro veniva assimilato all'intero Universo?
Perchè in antico ci si era già resi conto di quanto fossero rare figure solide dotate di simmetria, comparabili con i poligoni regolari della geometria 'piana'. Solo cinque sono i poliedri regolari che la geometria solida offriva a chi cercava strette analogie tra il mondo delle idee, l'universo matematico e l'Universo fisico.

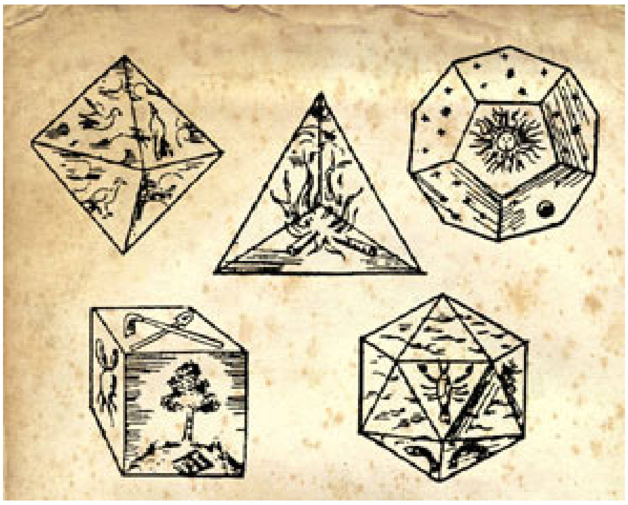

Figura 3.1

Anche se Euclide, nel XII libro della sua opera 'Elementi' , si mostra di opinione contraria, è a Platone che viene attribuita la scoperta, base della sua cosmogonia, dei solidi simmetrici che da lui hanno appunto preso il nome: il Cubo, il Tetraedro, l'Ottaedro, il Dodecaedro e l ' Icosaedro.
'... E prima di tutto, che Fuoco e Terra e Acqua e Aria siano corpi, è chiaro ad ognuno. Ma ogni specie di corpo ha anche profondità... Restava una quinta combinazione e Dio se ne giovò per decorare l'Universo...' scrive Platone nel Timeo (XX, 55) associando la 'quinta combinazione', il Dodecaedro, all'intero Creato o ad una sorta di etere che dovrebbe pervaderlo tutto. Enorme fu la fortuna che questi cinque 'Solidi Platonici' trovarono nella cultura occidentale. Piero della Francesca ne trattò nel suo *Libellus de quinque corporibus regolaribus* e il grande matematico Luca Pacioli affrontò l'argomento delle cinque figure solide regolari e della loro corrispondenza con alcuni elementi della Natura nel suo *De Divina Proportione.* Senza dimenticare ovviamente Keplero e le due sue opere *Harmoniae mundi*, del 1619, e *Mysterium Cosmographicum* di poco posteriore, opera nella quale si sforza di giustificare i movimenti dei pianeti con le caratteristiche 'geometriche' dei Solidi Platonici :
'...La Terra è la sfera che misura tutte le altre. Circoscrivi ad essa un Dodecaedro: la sfera che lo comprende sarà Marte. Circoscrivi a Marte un

Tetraedro: la sfera che lo comprende sarà Giove. Circoscrivi a Giove un cubo: la sfera che lo comprende sarà Saturno...', e così via.
I solidi geometrici regolari, i Solidi Platonici, ma soprattutto il Dodecaedro, assursero quindi a modello matematico per cercare un collegamento tra Macrocosmo e Microcosmo, poichè le idee che si avevano sull'infinitamennte grande si riflettevano, in alcuni casi, nell'infinitamente piccolo (o meglio, in quello che allora era considerato tale!), soprattutto in alcune manifestazione del 'Regno Minerale'.

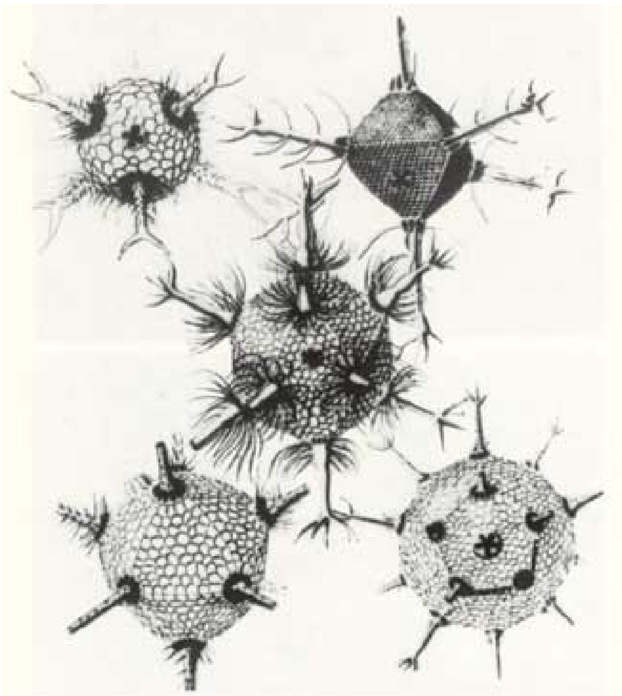

Figura 3.2

Le forme dei gusci dei radiolari corrispondono a quelle dei solidi platonici. Qui le leggi della forma prevalgono sull'utilità funzionale. I Disegni sono di *Ernst Haeckel*.

Capitolo 4

Politopi

Un n-politopo convesso può essere definito induttivamente, appoggiandosi sulle definizioni che conosciamo di poligono (che sarà un 2-politopo) e di poliedro (che sarà un 3-politopo); un 1-politopo é un segmento, uno 0-politopo é un punto.
Un n-politopo P_n é un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$, il cui bordo é costituito da un certo numero di (n-1)-politopi, detti celle. Diciamo vertici di P_n i suoi estremi.
In particolare un politopo 4-dimensionale ha celle 3-dimensionali che sono poliedri, celle piane, dette facce, celle 1-dimensionali, dette spigoli, e vertici che sono i punti estremi.
Si deve tener conto che, in dimensione superiore a tre, la rappresentazione grafica di un politopo non è possibile se non ricorrendo a considerazioni particolari.

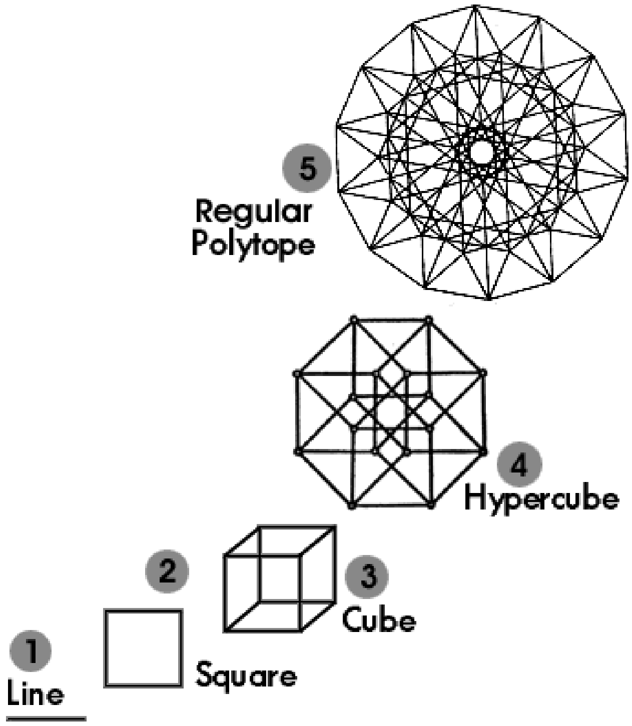

Figura 4.1

4.1 Generalizzazione della formula di Eulero

Per i politopi convessi di qualunque dimensione vale una formula, analoga alla formula di Eulero, che mette in relazione il numero dei vertici, degli spigoli, delle facce e delle celle.
Sia P_n un n-politopo, definiamo N_i il numero di (n-1)-politopi che formano il suo bordo. Un segmento P_1 ha due estremi: $N_0 = 2$.
Un poligono P_2 ha tanti vertici quanti sono i lati: $N_0 - N_1 = 0$.
Un poliedro P_3 ha un numero di vertici, spigoli e facce soddisfacenti la formula di Eulero: $N_0 - N_1 + N_2 = 2$.
Un politopo P_4 di dimensione 4 ha un numero di vertici, spigoli, facce e celle 3-dimensionali soddisfacenti la formula: $N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 0$.

Teorema 4.1. *Eulero-Poincarè.* [7]
Dato un n-politopo P_n in dimensione n vale la formula:

$$N_0 - N_1 + N_2 - \cdots + (-1)^{n-1} N_{n-1} = 1 - (-1)^n$$

4.2 Esempi di politopi

Cominciamo a considerare il caso n=4 e vediamo la costruzione di alcuni politopi di $\mathbb{R}^4$. Un triangolo si ottiene unendo i vertici di un segmento con un punto esterno alla retta del segmento; e se si uniscono i vertici del triangolo con un punto esterno al piano su cui giace si ottiene un tetraedro, in generale non regolare.

In dimensione quattro, unendo i vertici A, B, C, D del tetraedro con un punto E nella quarta dimensione, esterno al poliedro, otteniamo la generalizzazione del tetraedro, detta **5-celle** o *simplesso*. Un 5-celle in dimensione quattro ha $N_0 = 5,\ N_1 = 10,\ N_2 = 10,\ N_3 = 5$. Un'analoga costruzione sempre in $\mathbb{R}^4$ è possibile per il cubo, ottenendo un *ipercubo*, anche detto **8-celle**. I vertici sono $8 + 8 = 16$, le celle 8, e tenuto conto che ogni spigolo è comune a tre cubi, gli spigoli saranno $\frac{8*12}{3} = 32$, e tenuto conto che ogni faccia è comune a due cubi, le facce sono: $\frac{8*6}{2} = 24$ ossia $N_0 = 16,\ N_1 = 32,\ N_2 = 24,\ N_3 = 8$. Una costruzione analoga può essere applicata con un ottaedro: dato un ottaedro consideriamo un iperpiano che lo contiene e due punti appartenenti ai due semispazi opposti rispetto a questo iperpiano. Unendo questi due punti con i vertici del poliedro, otteniamo il politopo detto **16-celle** o *cocubo*, quando tutti gli spigoli sono uguali. Il 16-celle ha $N_0 = 8,\ N_1 = 24,\ N_2 = 32,\ N_3 = 16$.

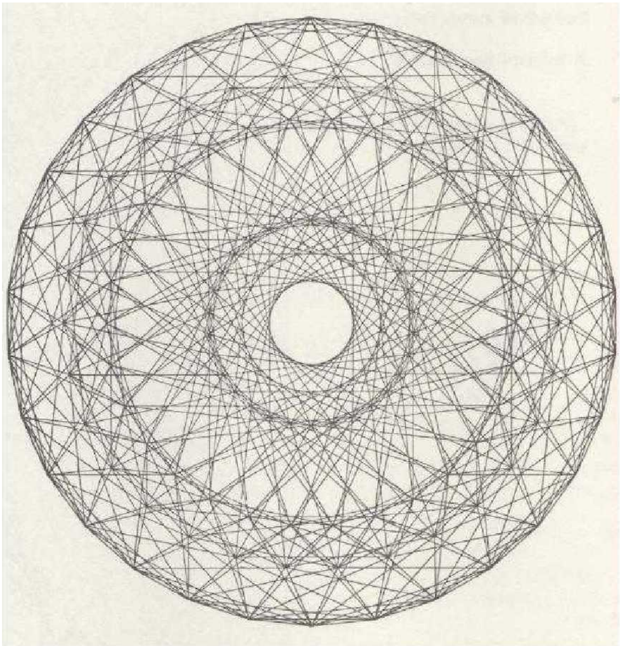

Figura 4.2

Il politopo in quattro dimensioni $\{3, 3, 5\}$ disegnato da Van Oss.

4.3 Politopi regolari e simbologia di Schl$\ddot{a}$fli

Definizione 4.1. *Siano P_n un politopo di $\mathbb{R}^n$ ed 'a' un suo vertice e si considerino i punti medi degli spigoli uscenti da a: collegandoli si ottiene un politopo (n - 1)-dimensionale detto* ***figura al vertice*** *di P_n relativa ad a.*

Definizione 4.2. *Un politopo si dice* ***regolare*** *se le sue celle sono regolari e le sue figure al vertice sono regolari.*

Ora vediamo di introdurre una simbologia fondamentale nella rappresentazione dei politopi, introdotta da Schl$\ddot{a}$fli. Sia P un poliedro regolare, usando i simboli di Schl$\ddot{a}$fli si denota come $\{p, q\}$ dove p è il numero dei poligoni uguali fra loro che costituiscono le facce e q il numero di facce che concorrono ad ogni vertice. Ad esempio il cubo si denota con $\{4, 3\}$ in quanto le sue facce sono quadrati e ad ogni vertice concorrono tre facce.
Sia P_4 un politopo regolare in $\mathbb{R}^4$, le celle sono dei poliedri regolari $\{p, q\}$ e le figure al vertice saranno dei $\{q, r\}$ perchè le loro facce sono dei poligoni di q lati ed il politopo si indica con $\{p, q, r\}$.
Analogamente in dimensione superiore, se le celle sono $\{p, q, ..., v\}$ e le figure al vertice $\{q, ..., v, w\}$ il politopo viene indicato con il simbolo $\{p, q, ..., v, w\}$.
Consideriamo ora i politopi costruiti in dimensione quattro; il 5-celle è composto da cinque tetraedri, in ogni vertice concorrono quattro spigoli, le figure al vertice sono poliedri aventi quattro vertici e come facce triangoli equilateri, quindi tetraedri: il 5-celle si indica con il simbolo $\{3, 3, 3\}$.
L'8-celle è composto da 8 cubi. In ogni vertice ci sono quattro spigoli; le figure al vertice sono tetraedri $\{3, 3\}$, quindi l'ipercubo si indica con $\{4, 3, 3\}$.
Il 16-celle è composto da sedici tetraedri $\{3, 3\}$ ed in ogni vertice concorrono sei spigoli; le figure al vertice sono ottaedri $\{3, 4\}$, quindi si indicherà con $\{3, 3, 4\}$.

Osservazione 4.1. *Anche in dimensione superiore, considerato un politopo regolare $\{p, q, ..., v, w\}$, si può ottenere il politopo duale, che è ancora regolare ed è dato da $\{w, v, ..., q, p\}$.*

4.4 Classificazione dei politopi regolari

Sia P un n-politopo regolare, con simbolo di Schläfli $\{r_1, r_2, ..., r_{n-1}\}$, e sia a un suo vertice. Diremo **stella** di P in a la sua figura al vertice relativa ad a, e la indicheremo con Et(P). Si consideri ora l'ipersfera circoscritta al politopo P di dimensione n e sia r il suo raggio; denotiamo con l la lunghezza dello spigolo di P e con $\rho(P)$ il rapporto fra il quadrato dello spigolo e il quadrato del diametro:

$$\rho(P) = \frac{l^2}{4r^2}$$

Esiste una relazione fondamentale per i politopi regolari, che lega un politopo P alla sua stella Et(P) riferita ad un generico vertice:

$$\rho(P) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{r_1}}{\rho(Et(P))}$$

Dimostrazione. Sia x $\in$ P un vertice, o il centro di P e O' il centro di Et(P). Sia r (rispett. r') il raggio della ipersfera circoscritta a P (rispett. a Et(P)). Siano y,y' gli estremi di un vertice di Et(P), e sia $l' = yy'$ la lunghezza dello spigolo. I punti y, x, y' sono vertici consecutivi di una faccia bidimensionale di P, che sarà un poligono regolare con r_1 lati. Sia r'' il raggio del cerchio di centro O'' circoscrivente la faccia di P; abbiamo:

$$l = yx = xy' = 2r'' \sin\frac{\pi}{r_1}, l' = 2r''\frac{2\pi}{r_1}$$

dove $l' = 2l\cos(\pi/r_1)$. Per definizione si ha $\rho(P) = \frac{l^2}{4r^2}$ e $\rho(Et(P)) = \frac{l'^2}{4r'^2}$. Denotiamo con 2ϕ l'angolo formato dai punti $y\hat{o}x$, abbiamo $r' = l\cos\phi$ e $l = 2r\sin\phi$; unendo i risultati abbiamo:

$$\rho(P) = \sin^2\phi = 1 - \cos^2\phi$$

$$\rho(Et(P)) = \frac{4l^2\cos^2\frac{\pi}{r_1}}{4l^2\cos^2\phi} = \frac{\cos^2\frac{\pi}{r_1}}{cos^2\phi}$$

$$\rho(P) = 1 - \cos^2\phi = 1 - \frac{\cos^2\frac{\pi}{r_1}}{\rho(Et(P))}$$

□

Teorema 4.2. ($Schläfli$, 1850). *Gli unici possibili simboli per i politopi regolari n-dimensionali sono dati dalla seguente lista [8] :*

- *n = 2 :* $\{r_1\}$ *dove* $r_1 \geq 3$ *è un intero arbitrario.*
- *n = 3 :* $\{3,3\},\{3,4\},\{4,3\},\{3,5\},\{5,3\}$;
- *n = 4 :* $\{3,3,4\},\{4,3,3\},\{3,4,3\},\{3,3,5\},\{5,3,3\}$;
- $n \geq 5$ *:*$\{3,...,3\},\{3,...,3,4\},\{4,3,...,3\}$.

Dimostrazione. Proviamo che i soli simboli possibili sono quelli dell'enunciato. Poichè $r_1 \geq 3$ (lati di una faccia) risulta $\cos^2\frac{\pi}{r_1} \geq \cos^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}$, ma ρ(P) è una quantità positiva per definizione:

$$\rho(P) = 1 - \frac{\cos^2\frac{\pi}{r_1}}{\rho(Et(P))} > 0$$

perciò

$$\rho(Et(P)) > \cos^2\frac{\pi}{r_1} \geq \frac{1}{4}$$

I politopi regolari, stelle di politopi regolari, devono quindi soddisfare alla doppia condizione:

$$\rho(r_1, r_2, ..., r_{n-1}) > 0 \quad \rho(r_2, r_3, ..., r_{n-1}) > \frac{1}{4}$$

Esaminiamo il caso n = 2.
Dato il poligono $\{r_1\}$, presi due vertici consecutivi x, x', indicato con o il centro della circonferenza circoscritta, l'angolo $x\hat{o}x'$ vale $\frac{2\pi}{r_1}$. Abbiamo inoltre $\frac{l}{2} = r\sin\frac{\pi}{r_1}$ da cui $\frac{l}{2r} = \sin\frac{\pi}{r_1}$.
Possiamo allora scrivere $\rho(r_1) = \frac{l^2}{4r^2} = \sin^2\frac{\pi}{r_1}$.
Quindi:

$$r_1 = 3 \;\; \rho(3) = \sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} > \frac{1}{4}$$

$$r_1 = 4 \;\; \rho(4) = \sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$

$$r_1 = 5 \;\; \rho(5) = \sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{1}{8}(5 - \sqrt{5}) > \frac{1}{4}$$

$$r_1 = 6 \quad \rho(6) = \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Qualsiasi sia il numero dei lati $\rho(r_1)$ è sempre maggiore di zero, ma solo i poligoni con al più cinque lati possono essere stelle per i poliedri.

Esaminiamo il caso n = 3.

Sia P un poliedro di simbolo $\{r_1, r_2\}$, il secondo parametro può assumere solo i valori 3, 4 e 5 per quanto visto nel caso bidimensionale. Vediamo quando $r_2 = 3$:

Se $r_1 = 3$ si ha $\rho(3,3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{4}{3}\frac{1}{4} = \frac{2}{3} > \frac{1}{4}$.

Se $r_1 = 4$ si ha $\rho(4,3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{4}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$.

Se $r_1 = 5$ si ha $\rho(5,3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{5}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{4}{3}\frac{1}{8}(3 + \sqrt{5}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{6} > 0$.

Se $r_1 = 6$ si ha $\rho(6,3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{6}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{4}{3}\frac{3}{4} = 0$.

Pertanto esistono solo tre poliedri con stelle triangolari: il tetraedro, il cubo e il dodecaedro, e soltanto i primi due con simboli $\{3,3\}$ e $\{4,3\}$ sono stelle di politopi regolari di dimensione quattro.

Vediamo ora quando $r_2 = 4$:

Se $r_1 = 3$ si ha $\rho(3,4) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.

Se $r_1 = 4$ si ha $\rho(4,4) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\frac{1}{2} = 0$.

Quindi esiste solo l'ottaedro $\{3,4\}$ e può essere stella di politopi regolari in quattro dimensioni.

Vediamo ora quando $r_2 = 5$:

Se $r_1 = 3$ si ha $\rho(3,5) = 1 - 8\frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{5-\sqrt{5}} = 1 - \frac{2}{5-\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} > \frac{1}{4}$.

Se $r_1 = 4$ si ha $\rho(4,5) = 1 - 8\frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{5-\sqrt{5}} = 1 - \frac{4}{5-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} < 0$.

Solo $\{3,5\}$ è un politopo regolare, l'icosaedro, e può essere stella di politopi in dimensione quattro.

Esaminiamo il caso n = 4.

I politopi $\{r_1, r_2, r_3\}$ in quattro dimensioni ammettono come stelle i poliedri $\{3,3\}$, $\{4,3\}$, $\{3,4\}$ $\{3,5\}$.

Vediamo quando $r_2 = 3, r_3 = 3$:

Se $r_1 = 3$ si ha $\rho(3,3,3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{3}{2}\frac{1}{4} = \frac{5}{8} > \frac{1}{4}$.

Se $r_1 = 4$ si ha $\rho(4,3,3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{3}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Se $r_1 = 5$ si ha $\rho(5,3,3) = 1 - \frac{\cos^2\frac{\pi}{5}}{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{3}{2}\frac{1}{8}(3+\sqrt{5}) = \frac{7-3\sqrt{5}}{16} > 0$.
Se $r_1 = 6$ si ha $\rho(6,3,3) = 1 - \frac{\cos^2\frac{\pi}{6}}{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{3}{2}\frac{3}{4} = -\frac{1}{8} < 0$.
Eistono dunque $\{3,3,3\}$, $\{4,3,3\}$, $\{5,3,3\}$, ma solo il primo può essere stella di politopi regolari in cinque dimensioni.
Vediamo ora quando $r_2 = 4, r_3 = 3$:
Se $r_1 = 3$ si ha $\rho(3,4,3) = 1 - \frac{\cos^2\frac{\pi}{3}}{\frac{1}{3}} = 1 - 3\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.
Se $r_1 = 4$ si ha $\rho(4,4,3) = 1 - \frac{\cos^2\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{3}} = 1 - 3\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$.
Quindi solo $\{3,4,3\}$ esiste ma non può essere stella di politopi in cinque dimensioni.
Vediamo ora quando $r_2 = 3, r_3 = 4$:
Se $r_1 = 3$ si ha $\rho(3,3,4) = 1 - \frac{\cos^2\frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.
Se $r_1 = 4$ si ha $\rho(4,3,4) = 1 - \frac{\cos^2\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\frac{1}{2} = 0$.
Esiste in questo caso solo $\{3,3,4\}$, ed è anche stella di politopi superiori.
Vediamo ora quando $r_2 = 3, r_3 = 5$:
Se $r_1 = 3$ si ha $\rho(3,3,5) = 1 - \frac{10\cos^2\frac{\pi}{3}}{5-\sqrt{5}} = 1 - \frac{10\frac{1}{4}}{5-\sqrt{5}} = \frac{15-5\sqrt{5}}{40} < \frac{1}{4}$.
Ma è una quantità positiva; riassumendo quanto visto in quattro dimensioni, esistono sei politopi regolari: $\{3,3,3\}$ $\{4,3,3\}$ $\{5,3,3\}$ $\{3,4,3\}$ $\{3,3,4\}$ $\{3,3,5\}$, ma tra questi solo il simplesso $\{3,3,3\}$ ed il cocubo $\{3,3,4\}$ possono essere stelle di politopi regolari in cinque dimensioni.

Sia ora n > 4.

Dimostriamo, per induzione su n, che esistono solo tre politopi regolari per n ≥ 5, e sono $\{3,...,3,3\}$ $\{3,...,3,4\}$ $\{4,3,...,3\}$. Sia Et(P) $= \{3,3,3\}$; vogliamo far vedere che, dato un politopo α_n, si ha $\rho(\alpha_n) = \frac{n+1}{2n}$.
Se n $= 5$ $\rho(\alpha_{n-1}) = \rho(3,3,3) = \frac{5}{8}$, ed è vero, per quanto visto prima. Sia vero per $n-1$, e cioé $\rho(\alpha_{n-1}) = \frac{n}{2(n-1)}$; allora:

$$\rho(\alpha_n) = \rho(3,...,3,3) = 1 - \frac{\cos^2\frac{\pi}{3}}{\rho(\alpha_{n-1})} = 1 - \frac{1}{4}\frac{2(n-1)}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

Poichè n ≥ 5 allora $\frac{n+1}{2n} > \frac{1}{4}$, quindi $\alpha_n = \{3,...,3,3\}$ esiste e può essere stella di politopi regolari di dimensione n+1.

Sia γ_n un politopo di simbolo $\{4, 3, ..., 3\}$, avremo

$$\rho(\gamma_n) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\rho(\alpha_{n-1})} = 1 - \frac{1}{2}\frac{2(n-1)}{n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4}$$

dunque γ_n esiste ma non potrà essere stella di politopi in dimensione superiore. Dimostriamo ora che non ci sono altri politopi regolari $\{n, 3, ..., 3\}$ con $n \geq 5$; infatti si ha:

$$\rho(5, 3, ..., 3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{5}}{\rho(\alpha_{n-1})} = 1 - \frac{(n-1)3 + \sqrt{5}}{4n} < 0$$

Prendiamo ora l'altro politopo in quattro dimensioni che può essere stella di politopi in cinque dimensioni, Et(P) = $\{3, 3, 4\}$. Sappiamo che $\rho(\{3, 3, 4\}) = 1/2$. Sia $\beta_n = \{3, ..., 3, 4\}$ e dimostriamo per induzione che $\rho(\beta_n) = 1/2$; se $n = 4$ lo abbiamo verificato, supponiamo sia vero per n-1 e vediamo:

$$\rho(\beta_n) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{1/2} = 1 - 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Quindi il politopo $\beta_n = \{3, ..., 3, 4\}$ esiste ed è stella di politopi regolari in dimensione n+1.Non esistono politopi regolari di simbolo $\{m, 3, ..., 3, 4\}$, infatti:

$$\rho(4, 3, ..., 3, 4) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{1/2} = 1 - 2\frac{1}{2} = 0$$

Concludendo, in dimensione $n \geq 5$ i soli politopi regolari sono l'n-simplesso $\{3, 3, ..., 3\}$, l'ipercubo $\{4, 3, ..., 3\}$ ed il cocubo $\{3, ..., 3, 4\}$. $\square$

4.5 Sottogruppi discreti di isometrie dell'iperspazio

Il gruppo di simmetria di un n-politopo P si definisce in modo analogo al caso di poligoni e poliedri come l'insieme Iso($\mathbb{R}^n$) di tutte le isometrie di $\mathbb{R}^n$ che lasciano invariata la figura.
In uno spazio Euclideo n-dimensionale la riflessione rispetto ad un iperpiano **w** é la trasformazione che preserva ogni punto di **w** e scambia i due semi-spazi nei quali **w** divide lo spazio stesso. Ogni sottospazio perpendicolare a **w** é lasciato invariato; quindi il prodotto di due riflessioni rispetto a due iperpiani intersecanti **w1** e **w2**, può essere studiato considerando cosa succede in ogni piano perpendicolare ad entrambi gli iperpiani. Il prodotto di due riflessioni rispetto a due rette intersecanti é una rotazione attorno al loro punto comune; il prodotto di due riflessioni rispetto a due iperpiani **w1** e **w2** intersecanti é una rotazione attorno all' (n - 2)-spazio ($\mathbf{w1} \cdot \mathbf{w2}$) di un angolo doppio di quello fra **w1** e **w2**.

Definizione 4.3. *Un gruppo di Coxeter é un sottogruppo discreto di isometrie di $\mathbb{R}^n$ generato da riflessioni in iperpiani (punti, se $n = 1$; rette, se $n = 2$; piani, se $n = 3$; ecc.). Un gruppo di Coxeter $G \subseteq Iso(\mathbb{R}^n)$ é riducibile se é isomorfo al prodotto diretto di altri due gruppi $G' \subseteq Iso(\mathbb{R}^k)$ e $G'' \subseteq Iso(\mathbb{R}^s)$ (con $k + s = n$) e l'azione di G su $\mathbb{R}^n$ si spezza come il prodotto delle due azioni di G' su $\mathbb{R}^k$ e di G" su $\mathbb{R}^k$: cioè, se $g = (g', g''), x = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ e $y = (y_1, ..., y_s) \in \mathbb{R}^s$, allora $g(x, y) = (g'(x), g''(y))$. Un gruppo di Coxeter G si dice irriducibile altrimenti. [5]*

La regione fondamentale o camera del gruppo di Coxeter é una regione finita o infinita delimitata da iperpiani; le regioni fondamentali sono le componenti connesse del complementare del sistema completo di iperpiani associato al gruppo, cioè dell'insieme di iperpiani tali che la riflessione su uno di essi é un elemento del gruppo.
Si può dimostrare che ogni gruppo generato da riflessioni é prodotto diretto di gruppi le quali regioni fondamentali sono simplessi; inoltre la regione fondamentale di un gruppo finito generato da riflessioni é un politopo illimi-

tato, che si può ottenere come cono su un (n - 1)-simplesso contenuto in un iperpiano.
Si può associare al gruppo di Coxeter G un grafo etichettato, ed in questa maniera riuscire a classificarli in maniera completa.
Uno dei motivi per cui i gruppi di Coxeter sono importanti é che dato che con uno specchio si visualizza una riflessione, si possono visualizzare mediante sistemi di specchi; nonostante la ovvia limitazione sulla dimensione, già la casistica in dimensione $n \leq 3$ é sufficientemente ricca perchè questa possibilità sia significativa.

Bibliografia

[1] M. Berger. *Géométrie. Volume I* Cedic Nathan Parigi 1977, pp. 1-10

[2] M. Berger. *Géométrie. Volume I* Cedic Nathan Parigi 1977, pp. 23-24

[3] H. S. M. Coxeter. *Regular polytopes.* Dover publications, inc. New York third edition of 1973, pp. 1

[4] M. Dedò *Forme simmetria e topologia* Zanichelli editore 1999, pp. 7-30

[5] M. Dedò *Forme simmetria e topologia* Zanichelli editore 1999, pp. 284

[6] M. Dedò *Forme simmetria e topologia* Zanichelli editore 1999, pp. 69

[7] P. Favro A. Zucco. *Appunti di geometria convessa.* Dipartimento di matematica dell'Università di Torino, Torino 2005 pp. 53

[8] P. Favro A. Zucco. *Appunti di geometria convessa.* Dipartimento di matematica dell'Università di Torino, Torino 2005 pp. 61-66

[9] G. E. Martin. *Trasformation geometry. An introduction to symmetry.* Springer Verlag New York 1982, pp. 200

[10] G. E. Martin. *Trasformation geometry. An introduction to symmetry.* Springer Verlag New York 1982, pp. 203

[11] G. M. Piacentini Cattaneo *Algebra un approccio algoritmico* Roma 1996

[12] E. Sernesi *Geometria 1 seconda edizione* Bollati Boringhieri Torino 2000, pp. 279-280

[13] E. Sernesi *Geometria 1 seconda edizione* Bollati Boringhieri Torino 2000, pp. 283-284

[14] E. Sernesi *Geometria 1 seconda edizione* Bollati Boringhieri Torino 2000, pp. 277-279