UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI S.M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica
di
Chiara Abbadessa

Processi di Cox e Catene di Markov nella finanza del rischio di credito

Relatore
Prof. Sergio Scarlatti

ANNO ACCADEMICO 2001 - 2002
FEBBRAIO 2003

Classificazione AMS: 60G55, 93E11, 90C40.
Parole chiave: processi di Cox, catene di Markov, rischio di credito.

Chi opera sul mercato finanziario, sia essa una banca, una istituzione privata o pubblica, una compagnia assicurativa, o una semplice trader è soggetta a varie tipologie di rischio:

- *Rischio di mercato*: rischio di cambiamenti inaspettati nei prezzi di mercato dei titoli o nei tassi d'interesse.
- *Rischio di liquidità*: rischio di perdere l'accesso a finanziamenti o a nuove linee di credito concesse da altre istituzioni finanziarie o da sottoscrittori.
- *Rischio operazionale*: rischio di frode, cattivo funzionamento dei sistemi con cui si opera, altri rischi riguardanti l'organizzazione interna della società che si rappresenta.
- *Rischio di credito*: rischio di cambiamenti inaspettati nella qualità del credito di una controparte verso la quale si è esposti attraverso un prestito o di cui sono state acquistate obbligazioni (bonds).

Il *rischio di mercato* deriva dalla possibilità che le variabili di mercato, quali ad esempio i tassi d'interesse o i tassi di cambio, si muovano in una direzione sfavorevole rispetto alle posizioni detenute dall'istituzione medesima. I rischi di mercato possono essere attenuati prendendo sul mercato un certo numero di posizioni di segno opposto.
Il *rischio di liquidità* coinvolge la possibilità che la differenza tra i prezzi di acquisto-vendita di beni finanziari diventi molto ampia in un periodo di tempo relativamente breve. Questo comporta per la società o esborsi maggiori o minori incassi producendo quindi per essa problemi di liquidità inattesa.

Il *rischio operazionale* è il rischio di errore o di insuccesso in una operazione di compravendita. Per esempio, può essere calcolato in modo errato il valore sul mercato di un titolo obbligazionario, oppure può essere male interpretato o mal misurato il rischio di mercato.
Infine, una posizione tra due controparti contiene *rischio di credito* se una delle due parti rischia di perdere il capitale impegnato, in tutto o parzialmente. La forma tradizionale di rischio di credito è alla base dell'attività bancaria quotidiana: un intermediario bancario concede un credito ad un'impresa, l'impresa fallisce e l'intermediario perde il capitale dato in prestito. Valutare il rischio di credito è tanto facile in principio quanto complesso in pratica. In teoria si tratta di affrontare tre questioni:

1. Quale sia il rendimento equo di un contratto finanziario (quali ad esempio la concessione di un prestito o l'acquisto di un'obbligazione) stipulato con una controparte non esente da possibile fallimento.

2. Con che probabilità la controparte non sarà in grado di onorare il contratto.

3. Quanta parte dell'investimento sarà possibile recuperare in tal caso.

Ci sono molti aspetti che devono essere considerati assieme a tali questioni. Ad esempio è noto che le obbligazioni emesse da società aventi buon *rating* possono essere collocate a prezzi più elevati rispetto a quelli di titoli analoghi emessi da società con basso rating, dato che le probabilità d'insolvenza sono minori.
Le agenzie di rating come Moody's e Standard and Poor classificano le ob-

bligazioni in base al merito creditizio. Secondo lo schema di Standard and Poor, il miglior rating è AAA. Si ritiene che le obbligazioni con questo rating abbiano una probabilità d'insolvenza quasi nulla. Il miglior rating a seguire è AA, vengono poi A, BBB, BB, B, e CCC. Solo i titoli con rating almeno BBB o migliore vengono considerati di qualità elevati (investment grade).

La dimensione della perdita in caso d'insolvenza dell'emittente non è necessariamente pari al 100 per cento, anzi nella maggior parte dei casi è possibile recuperare parte dell'investimento. Vi sono vari modelli matematici che considerano tale possibilità. Due tra i più importanti sono il modello di *Jarrow-Turnbull* [JT95] e quello di *Duffie-Singleton* [DS99] e verranno discussi dettagliatamente in questa tesi. Nel primo si suppone di conoscere o almeno di poter stimare in partenza quanto recupererà un eventuale creditore, nel secondo, invece, si assume che il recupero (recovery) possa essere quantificato solo al momento del fallimento.

Uno degli obiettivi principali di questa tesi è illustrare alcuni dei modelli matematici più recenti utilizzati per spiegare e determinare i prezzi di obbligazioni emesse da società che non sono ritenute esenti da possibile fallimento. Considereremo dapprima il caso in cui il prezzo di un titolo obbligazionario non tenga conto del rating creditizio dell'emittente e più avanti quello in cui il prezzo dello stesso è strettamente legato alla sua classificazione nella scala dei ratings creditizi.

Da un punto di vista strettamente finanziario si può pensare che il fallimento di una società ha luogo nel momento in cui il suo valore complessivo (compreso quello degli assets che detiene) scende al di sotto di una certa soglia critica rappresentata dal valore di tutte le sue passività. In altri termini una società è costretta al fallimento quando anche vendendo sul mercato il suo portafoglio e dismettendo tutte le sue attività, non riuscirebbe ad avere un saldo positivo nei confronti dei suoi creditori. Questo approccio, proposto da Merton in [Me74], va sotto il nome di **modello strutturale** e non verrà perseguito in questa tesi. Nel presente lavoro si utilizzerà una modellistica alternativa che prende il nome di **modello in forma ridotta** in cui è il processo stesso di bancarotta ad essere considerato come un fenomeno aleatorio: in tale ottica il fallimento della società costituisce un evento del tutto imprevedibile. Più specificatamente, l'idea è quella di modellizzare l'istante di fallimento come l'istante in cui un processo di Poisson d'intensità non costante compie il primo salto. E' conveniente assumere l'intensità stessa come funzione di alcune variabili fondamentali del mercato che seguono anch'esse una dinamica aleatoria (tassi, indici, etc...). Questo porta alla considerazione di processi noti nella letteratura metematica col nome di processi di Cox, o processi di Poisson doppiamente stocastici [Br81].

Cominciamo con una considerazione di base. Se $P(t,T)$ denota il prezzo al tempo t di una obbligazione esente da rischio che paga F Euro ad una data futura (scadenza) $T > t$ e $P^d(t,T)$ denota il prezzo di una obbligazione completamente equivalente alla precedente ma rischiosa, nel senso che la società che l'ha emessa ha una probabilità non nulla di fallire nel periodo di validità del contratto, dovrà necessariamente essere verificata la condizione

$$P^d(t,T) < P(t,T).$$

Infatti, se un investitore acquista un prodotto finanziario a rischio più elevato rispetto ad un altro che offre la stessa remunerazione finale, il mercato deve ricompensare la sua scelta offrendogli un prezzo più basso.

Nel primo capitolo di questa tesi presentiamo alcuni modelli per il prezzo di un titolo obbligazionario nel caso in cui l'emittente può fallire prima della scadenza dell'obbligazione senza però far entrare nelle nostre considerazioni il rating creditizio della medesima. Più specificatamente studiamo il modello introdotto da Lando nel 1998 [La98], che si basa par l'appunto sull'utilizzo dei processi doppiamente stocastici. A tal fine richiamiamo la seguente definizione:

Definizione 1. *Consideriamo uno spazio di probabilità filtrato* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. *Sia* $N = (N_t)_{t\geq 0}$ *un processo di conteggio non esplosivo di intensità* λ_t *adattata ad una filtrazione* $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ *definita in modo tale che* $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$. $N = (N_t)_{t\geq 0}$ *è detto* ***processo di Cox****, o doppiamente stocastico, associato alla filtrazione* $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$*, se* λ_t *è* $(\mathcal{G}_t)-$*predicibile non negativo e se, per ogni* t *e* $s > t$*, l'incremento* $N_s - N_t$ *condizionato alla* $\sigma-$*algebra* $\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_s$ *(generata da* $\mathcal{F}_t \cup \mathcal{G}_s$*) si distribuisce come una Poisson di parametro* $\int_t^s \lambda(u)du$*, ovvero*

$$\mathbb{P}[N_s - N_t = k | \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_s] = \frac{(\int_t^s \lambda(u)du)^k}{k!} e^{-\int_t^s \lambda(u)du} \tag{1}$$

per $k = 0, 1, \ldots$.

Nel modello di Lando il tempo del primo salto di tale processo viene interpretato come l'istante di fallimento τ; in altri termini, assumendo $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $N_0 = 0$, τ è la variabile aleatoria tale che $\mathbb{P}(\tau > 0) = 1$ di distribuzione condizionata

$$\mathbb{P}(\tau > t | \mathcal{G}_t) = e^{-\int_0^t \lambda(u)du}. \tag{2}$$

Vediamo ora come vengono scelte in concreto le filtrazioni $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ ed $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Supponiamo che l'attuale stato del mercato sia riassumibile attraverso una serie di indicatori o fattori quali il livello dei tassi, l'andamento degli indici, etc... Poiché la loro evoluzione temporale è incerta l'idea è di modellizzarli per mezzo di un processo stocastico $X = (X_t)_{t\geq 0} \in \mathbb{R}^d$, dove d è il numero dei fattori presi in considerazione. Nel modello di Lando $X = (X_t)_{t\geq 0}$ viene pensato come la soluzione di un'equazione differenziale stocastica (SDE) di tipo diffusivo

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \tag{3}$$

dove B_t è un moto Browniano standard d-dimensionale, mentre il coefficiente di drift $\mu : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ e il coefficiente di diffusione $\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ verificano condizioni di regolarità tali da assicurare l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione (3). A questo punto la filtrazione $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ viene fissata essere quella generata nel tempo dal processo soluzione $(X_t)_{t\geq 0}$:

$$\mathcal{G}_t = \sigma\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$$

ed è detta $\sigma-$algebra delle **informazioni di mercato** relative all'arco temporale $[0, t]$. Inoltre la $\sigma-$algebra $\mathcal{F}_t$, tale che $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$ per ogni t, può essere concretamente realizzata in vari modi; per una scelta specifica, molto usata nella letteratura finanziaria si rimanda alla sezione 1.2 della presente tesi. L'utilizzo del modello presentato al fine dello studio dei prezzi di obbligazioni emesse da società non esenti da fallimento, fa perno su un importante risultato matematico dovuto a Lando [La98] e ridimostrato in dettaglio nella sezione 1.2 di questo lavoro (Teorema 1.2.1). Per semplicità consideriamo $d = 1$ (un solo fattore) e supponiamo che la soluzione $(X_t)_{t\geq 0}$ dell'equazione differenziale stocastica (3) sia tale che $\mathbb{P}(X_t > 0, \forall t > 0) = 1$. Sia $\mathcal{G}_t = \sigma\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$ ed $\mathcal{F}_t \supset \mathcal{G}_t$ per ogni t.

Teorema 1. ***(ref.[La98])***

Consideriamo lo spazio di probabiltà filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\mathbb{P})$, Siano $t, T > 0$ con $T > t$ e sia τ il primo tempo di salto di un processo di Cox d'intensità λ_t adattata alla filtrazione $\mathcal{G}_t$. Per ogni variabile aleatoria $F : \Omega \to \mathbb{R}^+$ $\mathcal{G}_T-$misurabile e tale che $\boldsymbol{E}[F] < +\infty$ vale la seguente identità:

$$\boldsymbol{E}\left[e^{-\int_t^T X_u du} 1_{\{\tau > T\}} F | \mathcal{F}_t\right] = 1_{\{\tau > t\}} \boldsymbol{E}\left[e^{-\int_t^T (X_u + \lambda_u) du} F | \mathcal{G}_t\right]. \qquad (4)$$

Il processo positivo X_t è interpretato in finanza come il processo descrivente l'andamento del tasso d'interesse a breve (o tasso spot) e pertanto denotato d'ora in poi come $X_t = r_t$ (dall'inglese rate).

Lando utilizza la formula (4) per valutare il prezzo di un titolo obbligazionario rischioso. A tal fine ricordiamo brevemente qual è lo schema classico in finanza per la determinazione dei prezzi di prodotti finanziari. La prima richiesta è che tali prezzi non diano luogo ad opportunità di arbitraggio. Per un risultato generale della finanza teorica, noto con il nome di Primo Teorema fondamentale dell'asset pricing (si veda Appendice B), un mercato è libero da opportunità di arbitraggio se i prezzi di prodotti che promettono futuri pagamenti sono determinati mediante aspettazioni prese rispetto ad una particolare misura di probabilità detta misura neutrale al rischio o misura di martingala. Sia $\mathbb{Q}$ una tale misura. Dal Primo Teorema fondamentale dell'asset pricing, segue ancora che il prezzo al tempo t di un titolo finanziario che promette un pagamento certo di F Euro ad una prefissata data futura T

è dato da:

$$P(t,T) \equiv \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_u du} F | \mathcal{G}_t\right] \tag{5}$$

dove la variabile aleatoria r_u è il tasso a breve, $e^{-\int_t^T r_u du}$ è detto fattore di sconto, F è il payoff finale e $\mathcal{G}_t$ è la $\sigma-$algebra generata dal processo $(r_u)_{u\geq 0}$ fino al tempo t. In maniera analoga, il prezzo al tempo t di un'obbligazione, emessa da una società che promette di pagare al tempo T F Euro soltanto se la società non fallisce (ovvero soltanto se $\tau > T$), sarà dato da

$$P^d(t,T) \equiv \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_u du} 1_{\{\tau > T\}} F | \mathcal{F}_t\right] \tag{6}$$

dove $\mathcal{F}_t$ è ora la $\sigma-$algebra che contiene sia le informazioni sull'andamento del tasso, che quelle relative al fallimento. E' immediata conseguenza del precedente teorema che in tal caso il prezzo $P^d(t,T)$ può essere riscritto come

$$P^d(t,T) = 1_{\{\tau > t\}} \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T (r_u + \lambda_u^{\mathbb{Q}}) du} F | \mathcal{G}_t\right]. \tag{7}$$

La formula (7) è molto interessante perché del tutto simile alla (5). Infatti, il prezzo di un titolo obbligazionario rischioso $P^d(t,T)$ può essere interpretato come il prezzo di un titolo non rischioso $P(t,T)$ con tasso a breve dato da $\bar{r}_u = r_u + \lambda_u$. Nella terza sezione studiamo i due più importanti modelli finanziari che considerano l'opportunità di un recupero parziale del pagamento promesso. Il primo modello che analizziamo è quello di *Jarrow-Turnbull* ideato nel 1995 [JT95] che prevede un tasso di recupero δ, costante e maggiore di zero, percepibile alla maturità del contratto. Ipotesi restrittiva di tale modello è la seguente assunzione di indipendenza condizionata alla $\sigma-$algebra

$\mathcal{G}_t$: siano ϕ e ψ funzionali regolari, allora

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}^{\mathbb{Q}}\left[\phi(r_u : t \leq u \leq T)\psi(\lambda_u : t \leq u \leq T)|\mathcal{G}_t\right] = \\ &\mathbf{E}^{\mathbb{Q}}\left[\phi(r_u : t \leq u \leq T)|\mathcal{G}_t\right]\mathbf{E}^{\mathbb{Q}}\left[\psi(\lambda_u : t \leq u \leq T)|\mathcal{G}_t\right] \end{aligned} \tag{8}$$

Il loro principale risultato è contenuto nella seguente:

Proposizione 1. ***(ref.[JT95])***

Consideriamo lo spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{Q})$. *Supponiamo che valga (8) e che il tasso di recupero sia un numero* $0 < \delta < 1$, *allora il prezzo di un titolo obbligazionario rischioso al tempo* t *è dato da*

$$P^d(t,T) = 1_{\{\tau > t\}} P(t,T)\left[\delta + (1-\delta)\mathbb{Q}(\tau > T|\mathcal{G}_t)\right]. \tag{9}$$

La quantità $\mathbb{Q}(\tau > T|\mathcal{G}_t)$ è la probabilità di sopravvivenza condizionata a $\mathcal{G}_t$, ovvero la probabilità che il fallimento avvenga dopo la scadenza T del titolo obbligazionario date le informazioni storiche di mercato fino ad oggi t. Nel caso in cui vi sia zero-recovery, ovvero $\delta = 0$, osserviamo che applicando le assunzioni di Jarrow-Turnbull al modello di Lando si ottiene la stessa formula per il prezzo di un titolo obbligazionario.

Il secondo modello che consideriamo è quello formulato da *Duffie-Singleton* nel (1999) [DS99], che prevede un recovery W_τ aleatorio. In particolare tale quantità è definita come un processo predicibile limitato, $\mathcal{G}_\tau$-misurabile. Inoltre il recupero dell'investimento può avvenire nel momento stesso in cui l'ente finanziario fallisce. Nel caso in cui il recovery assume la forma

$$W_\tau = (1-\ell_\tau)P^d(\tau-, T)$$

dove $\ell_\tau \in [0,1]$ è un processo aleatorio $\mathcal{G}_\tau-$misurabile limitato e predicibile e $P^d(\tau-,T)$ denota il prezzo di un titolo obbligazionario un istante prima del fallimento, Duffie e Singleton dimostrano che il prezzo di un titolo obbligazionario rischioso è

$$P^d(t,T) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T (r_s+\ell_s\lambda_s^{\mathbb{Q}})ds} F|\mathcal{G}_t\right]. \tag{10}$$

Anche in questo caso è interessante osservare che l'unica differenza tra il prezzo di un titolo non rischioso (5) e quello rischioso (10) sta nel considerare il tasso spot modificato $\tilde{r}_s = r_s + \ell_s\lambda_s^{\mathbb{Q}}$. Il primo capitolo si conclude mostrando una modellizzazione del processo $(X_t)_{t\geq 0}$ come processo affine, che permette di ottenere un'espressione esplicita del prezzo di un titolo obbligazionario rischioso.In particolare l'evoluzione del tasso a breve r_t è di tipo CIR ad un fattore e l'intensità $\lambda_t^{\mathbb{Q}}$ è una funzione affine di r_t. Nel modello di Lando il prezzo del titolo è dato da

$$P^d(t,T) = e^{\alpha(T-t)+\beta(T-t)\cdot r_t},$$

dove i coefficienti $\alpha(\cdot)$ e $\beta(\cdot)$ soddisfano delle specifiche equazioni differenziali ordinarie, con opportune condizioni al bordo.

Nel secondo capitolo analizziamo una famiglia di modelli in cui il prezzo di un bond rischioso viene strettamente legato alla classe di rating dell'istituzione emettitrice. Anche qui il prezzo di un titolo obbligazionario rischioso è analizzato sia nel caso di zero recovery, studiato da Lando [La98], che in quello di recovery posititvo, formulato da Jarrow-Lando-Turnbull [JLT97]. In questi modelli il possibile cambiamento del rating creditizio viene descritto come una catena di Markov a tempi continui $(\tilde{R}_t)_{t\geq 0}$, con spazio degli stati finito $E = \{1, 2, \ldots, K\}$. L'insieme E rappresenta le possibili classi di credito, dove la 1 equivale alla classe di miglior rating, ovvero AAA, $K-1$ quella di peggior rating CCC e l'ultimo stato K rappresenta il fallimento. Inoltre $(\tilde{R}_t)_{t\geq 0}$ è costruita in modo tale che lo stato di fallimento K sia assorbente. Il modello di Lando precedentemente descritto è dapprima riformulato come una catena di Markov $(\tilde{R}_t)_{t\geq 0}$ non omogenea nel tempo con intensità aleatoria e soli due stati: sopravvivenza e fallimento. Quindi viene descritto il caso generale con K possibili stati, per il quale si dimostra il seguente risultato:

Proposizione 2. ***(ref.[La98])*** *Supponiamo che la matrice delle intensità $\mathcal{A}(t)$ della catena di Markov $(\tilde{R}_t)_{t\geq 0}$ abbia la seguente rappresentazione*

$$\mathcal{A}(t) = B\Lambda(t)B^{-1}$$

dove B è una matrice $K \times K$, a valori costanti, le cui colonne sono formate da K autovettori di $\mathcal{A}(t)$ e $\Lambda(t)$ è una matrice diagonale tale che $\Lambda(t) = diag(-\lambda_t^{1,\mathbb{Q}}, \ldots, -\lambda_t^{K-1,\mathbb{Q}}, 0)$. Supponiamo inoltre, che ogni elemento della $K-$esima riga di $\mathcal{A}(t)$ sia identicamente uguale a zero, ovvero $\lambda_{Ki}^{\mathbb{Q}} \equiv 0$ per $i = 1, \ldots, K$ (che corrisponde allo stato di fallimento inteso come stato assorbente). Allora il prezzo al tempo t di un titolo obbligazionario rischioso a maturità T, emesso da un ente in classe di rating i e con zero recovery in caso di fallimento è

$$P_i^d(t,T) = \sum_{j=1}^{K-1} \beta_{ij} \boldsymbol{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{(-\int_t^T (r_u + \lambda_u^{j,\mathbb{Q}})du)} | \mathcal{G}_t \right], \tag{11}$$

dove $\beta_{ij} := -b_{ij} b_{jK}^{-1}$ per ogni $i, j = 1, \ldots, K$.

Nella seconda sezione presentiamo il modello di Jarrow-Lando-Turnbull (1997) che mantiene sia l'ipotesi di indipendenza (8) che l'ipotesi di recovery costante considerando, a differenza del modello originario di Jarrow-Turnbull, le classi di merito creditizio. Consideriamo quindi il caso di una catena di Markov a tempi continui $(\tilde{R}_t)_{t\geq 0}$, ma di intensità costante, rispetto allo spazio degli stati $E = \{1, 2, \ldots, K\}$, definito come nella sezione precedente. E' chiaro dunque che tale modello è un caso particolare di quello presentato da Lando, tuttavia la sua maggiore semplicità permette di ottenere dei risultati più dettagliati. Possiamo infatti esplicitare la probabilità di sopravvivenza come segue

Lemma 1. ***(ref.[JLT97])***
Supponiamo che una società stia al tempo t nella classe di credito i, ovvero $\tilde{R}_t = i$. Allora, la probabilità che il fallimento avvenga dopo il tempo T è

$$\mathbb{Q}(\tau_i > T|\mathcal{G}_t) = \sum_{j\neq K} q_{ij}(t,T) = 1 - q_{iK}(t,T), \tag{12}$$

dove $q_{ij}(t,T)$ sono gli elementi della matrice di transizione $\mathcal{Q}(t,T)$ della catena di Markov $(\tilde{R}_t)_{t\geq 0}$ e il tempo di fallimento è
$\tau_i \equiv \inf_{t>0}\{t : \tilde{R}_t = K|\tilde{R}_0 = i\}$.

Otteniamo dunque che, in questo modello, il prezzo di un bond rischioso emesso da una società appartenente alla classe di rating i è

$$P_i^d(t,T) = 1_{\{\tau_i>t\}}P(t,T)(\delta + (1-\delta)\mathbb{Q}(\tau_i > T|\mathcal{G}_t)). \tag{13}$$

Nel terzo e ultimo capitolo riconsideriamo il modello di *Jarrow-Lando-Turnbull* in un mercato finanziario a tempo discreto. Infatti, è in questa forma che i modelli presentati vengono implementati e calibrati sui dati di mercato.

Risulta inoltre necessario specificare il passaggio dalla misura di martingala equivalente $\mathbb{Q}$ alla misura $\mathbb{P}$ rispetto alla quale si suppone evolvano i processi osservati. In questo lavoro si ipotizza che la relazione che lega le probabilità di transizione neutrali al rischio $\tilde{p}_{ij}(t, t+1)$ alle probabilità di transizione empiriche p_{ij} sia la seguente

$$\tilde{p}_{ij}(t, t+1) = \begin{cases} \pi_i(t) p_{ij}, & i \neq j \\ 1 - \pi_i(t)(1 - p_{ii}), & i = j \end{cases}$$

dove $\pi_i(t)$ è, per ogni $i \in E$, una funzione deterministica del tempo ed è detta *premio per il rischio*. In questo ambito è possibile dare una formulazione esplicita del premio per il rischio ad ogni tempo t in funzione dei prezzi osservati dei titoli obbligazionari, delle probabilità di transizione p_{ij} e del tasso di recupero δ. Tale modello mostra dei problemi numerici quando applicato ai dati reali di mercato dovuti al fatto che talvolta nessun emittente di un dato rating fallisce nel periodo di tempo considerato. Per ovviare a questi problemi *Kijima-Komoribayashi* nel (1998) [KK98] propongono un differente premio per il rischio definito dalla relazione

$$\tilde{p}_{ij}(t, t+1) = \begin{cases} \ell_i(t) p_{ij}, & j \neq K \\ 1 - \ell_i(t)(1 - p_{iK}), & j = K \end{cases}$$

dove $\ell(t)$ è una funzione deterministica del tempo. Anche in questo caso è possibile ottenere la formulazione esplicita del premio per il rischio. Secondo gli autori, il loro modello rispecchia maggiormente i dati reali del mercato economico superando quindi gli ostacoli incontrati dal modello di Jarrow-Lando-Turnbull.

Bibliografia

[Ba00] P. Baldi (2000). *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni*, Pitagora Editrice, Bologna 2000.

[Bi00] T. Bijork (2000). *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford.

[Br81] P. Brémaud (1981). *Point Processes and Queues*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

[CIR85] J. Cox, J. Ingersoll, S. Ross (1985). A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica* 53, pp 385-408.

[DS99] D. Duffie, K. Singleton (1999). Modelling Term Structures of Defaultable Bonds, *Review of Financial Studies*, Vol. 12, No. 4, pp 687-720.

[Du02] D. Duffie (2002). *A Short Course on Credit Risk Modelling with Affine Processes*, Stanford University and Scuola Normale Superiore, Pisa.

[Gi01] R.D. Gill (2001). *Product Integration*, Mathematical Institute, University of Utrecht, Netherlands.

[GJ90] R. Gill, S. Johansen (1990). A Survey of Product-Integration with a view towards application in survival analysis, *Annals of Statistics*, Vol. 18, No. 4, pp 1501-1555.

[Hu01] B. Huge (2001). *On defaultable claims and credit derivatives*, University of Copenhagen.

[IRW01] R.B. Israel, J.S. Rosenthal, J.Z. Wei (2001). Finding Generators for Markov Chains Via Empirical Transition Matrices, with Applications to Credit Ratings, *Mathematical Finance*, Vol. 11, No. 2, pp 245-265.

[JLT97] R. Jarrow, D. Lando, S. Turnbull (1997). A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads, *Review of Financial Studies*, Vol. 10, No. 2, pp 481-523.

[JT95] R. Jarrow, S. Turnbull (1995). Pricing options on financial securities subject to credit risk, *Journal of Finance*, Vol. 50, pp 53-85.

[KK98] M. Kijima, K.Komoribayashi (1998). A Markov Chain Model for Valuing Credit Risk Derivatives, *The Journal of Derivatives*, Vol. 6, pp 97-108.

[La98] D. Lando (1998). On Cox Processes and Credit Risky Securities, *Review of Derivatives Research* 2, pp 99-120.

[Me74] D. Merton (1974). On the Pricing of Corporate Debt: the Risk Structure of Interest Rates, *Journal of Finance* 29, pp 449-470.

[Ro00] L.C.G. Rogers (2000). *Modelling Credit Risk*, University of Bath.

[Sc00] P.J. Schonbucher (2000). *The Pricing of Credit Risk and Credit Risk Derivatives*, University of Bonn.

[Va77] O. Vasicek (1977). An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics* 5, pp 177-188.

[Wi91] D. Williams (1991). *Probability with Martingales.* Cambridge University Press.