UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica
presentata da

Armellino Giovanni

GRUPPO DI DIVISIBILITÀ: ESEMPI ED APPLICAZIONI

Relatore

Prof.ssa Stefania Gabelli

ANNO ACCADEMICO 2003 - 2004
Luglio 2004

Classificazione AMS : 13A05, 06F15, 13.98
Parole Chiave : Gruppo di divisibilità, valutazione, completa chiusura integrale.

Sintesi

La divisibilità è un concetto che gioca un ruolo importante in diverse aree di ricerca matematica, come la teoria dei numeri, la teoria degli anelli, la teoria dei gruppi ordinati e le applicazioni di questi campi. Con questo lavoro noi vogliamo esaminare alcuni tra gli aspetti più interessanti della divisibilità dando speciale enfasi alle relazioni tra la teoria degli anelli e la teoria dei gruppi parzialmente ordinati, le quali sono create dalla procedura di assegnare un particolare gruppo ordinato, chiamato *gruppo di divisibilità*, ad un dominio.
Attualmente, la teoria della divisibilità può essere divisa in due parti:

(a) Teoria della divisibilità degli anelli;

(b) Teoria moltiplicativa degli ideali.

I fondamenti storici della parte (a) risalgono ad *Euclide* e sono relativi al problema della fattorizzazione degli elementi di un dominio. Questa teoria tratta, in particolare, speciali classi di domini quali gli MCD-domini, i domini a fattorizzazione unica ed i domini Euclidei.
I fondamenti storici della parte (b) risalgono ai primi lavori di *Kronecker* e *Dedekind* sulla teoria degli ideali. Questi lavori soprattutto quelli di *Dedekind* miravano allo studio di quei domini per i quali valesse una 'sorta' di fattorizzazione degli ideali simile a quella degli elementi, dove l'enfasi è spostata dalla divisibilità degli elementi a quella degli ideali e dagli elementi primi agli ideali primi. Successivamente, l'incompletezza di tale teoria spinse *Arnold*, *Artin* e *Vand der Waerden* a sviluppare la cosiddetta teoria dei *v-ideali*, sebbene, come affermò *Aubert* in una sua prima pubblicazione [Aub83], *Dedekind* aveva scoperto i *v-ideali* più di mezzo secolo prima che essi apparissero nel 1930.
In realtà queste due teorie (a) e (b) non sono radicalmente distinte, benché rappresentino due facce di una stessa medaglia.
Un importante contributo al problema della divisibilità fu dato dai lavori di *Krull* sulla teoria degli anelli di valutazione nei quali per la prima volta il

termine *'gruppo di divisibilità'* appare in una forma esplicita. Da quel momento tra la teoria della divisibilità e la teoria dei gruppi ordinati si sono instaurate molte connessioni. Alcuni dei migliori lavori su questo tema (che trattano specialmente della relazione tra gli anelli di valutazione ed i loro gruppi dei valori) sono quelli di *Ribenboim* [Rib58]-[Rib56].
Un significativo contributo alla parte (a) è il Teorema di *Jaffard* e *Ohm* che stabilisce che ogni gruppo abeliano ordinato reticolato è il gruppo di divisibilità di un dominio di *Bézout*. La realizzazione di questo teorema mostrò un'estesa possibilità di applicare la teoria della divisibilità per risolvere alcuni problemi nella teoria degli anelli; precisamente, si può parafrasare un problema di teoria degli anelli in termini di gruppi ordinati, risolvere il problema nella teoria dei gruppi ordinati, e riportare la soluzione (usando qualche teorema di realizzazione) nella teoria degli anelli. *Lorenzen* [Lor39] applicò in modo originale questa tecnica per risolvere la cosidetta *congettura di Krull* ed alcuni problemi di *Nakayama* relativi ai domini completamente integralmente chiusi. In anni più recenti queste tecniche sono state applicate con successo nei lavori di *Sheldon* [She73], *Hill* [Hil72], *Heinzer-Ohm* [HO71] ed altri per risolvere diversi interessanti problemi di teoria degli anelli. Abbiamo riportato questi problemi nell'ultimo capitolo di questa tesi.
Il processo che abbiamo illustrato sopra può essere invertito, cioè, dai risultati nella teoria degli anelli è possibile ottenere alcuni risulati nella teoria dei gruppi ordinati.
In questa tesi sviluppiamo alcuni risultati che sono connessi alla parte (a) della teoria della divisibilità concentrandoci sullo studio di un particolare gruppo abeliano ordinato, denominato *gruppo di divisibilità*. Per rendere il nostro lavoro autocontenuto abbiamo dedicato il primo capitolo ad alcuni risultati preliminari di teoria dei gruppi ordinati. Successivamente abbiamo introdotto il concetto di gruppo di divisibilità di un dominio D, definito come il gruppo quoziente $K^*/U(D)$ dove K^* è il gruppo moltiplicativo del campo dei quozienti di D e $U(D)$ il gruppo delle unità di D, con l'ordinamento definito da:

$$xU(D) \leq yU(D) \text{ se e soltanto se } yx^{-1} \in D,$$

ed abbiamo mostrato, nei Capitoli $2, 3$ e 4, una serie di risultati che evidenziano connessioni tra le proprietà algebriche di un dominio D e le proprietà algebriche del suo gruppo di divisibilità. Gli ultimi due capitoli invece rappresentano i capitoli centrali del nostro lavoro. Nel Capitolo 5 abbiamo descritto procedure per costruire una vasta classe di gruppi che sono gruppi di divisibilità, e d'altra parte, una classe di gruppi che non possono essere gruppi di divisibilità di alcun dominio. Infine, nel Capitolo 6, abbiamo concluso il nostro lavoro presentando alcuni esempi che mostrano come certi problemi di teoria degli anelli possono essere risolti attraverso i gruppi di divisibilità .

Nel primo capitolo abbiamo stabilito alcuni concetti basilari relativi ai gruppi parzialmente ordinati. In particolare abbiamo introdotto qualche breve risultato sulla caratterizzazione dei gruppi reticolati e diretti.
Un gruppo additivo G è parzialmente ordinato (po-gruppo) se è un insieme parzialmente ordinato rispetto ad una relazione $\leq$ tale che $g \leq h$ implica $g+a \leq h+a$ per ogni g, h, $a \in G$. Se G è un po-gruppo, $G_+ = \{g \in G : g \geq 0\}$ denota l'insieme degli elementi positivi di G. Un po-gruppo G è diretto se per ogni $a, b \in G$ esiste un elemento $c \in G$ tale che $a \leq c$ e $b \leq c$. Un po-gruppo G si dice un gruppo ordinato reticolato, scritto l-gruppo, se esiste $\sup\{a, b\}$ in G per ogni $a, b \in G$.

- **Teorema di Clifford**
  Sia G un po-gruppo additivo. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

  (1) *G è diretto;*

  (2) *G è diretto a destra;*

  (3) *Per ogni $g \in G$, esiste un maggiorante per g e 0;*

  (4) *Per ogni g e h in G, esiste $x \geq g$ e $y \geq g$ tale che $x - y = h$.*

Importanti conseguenze di questo risultato sono le seguenti:

- *Un po-gruppo G è diretto se e soltanto se G_+ genera G come un gruppo.*

- *Sia G un po-gruppo. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

  (1) *G è un l-gruppo;*

(2) *G è diretto e G_+ è un reticolo;*

(3) *Per ogni $g \in G$, esiste il* $\sup\{g, 0\}$*;*

(4) *G è un semi-reticolo superiore.*

Abbiamo, inoltre, definito la nozione di omomorfismo tra po-gruppi che preserva l'ordine. Se G e G' sono po-gruppi e $f : G \to G'$, allora f è un *o-omomorfismo* se f è un omomorfismo di gruppi e $g \leq h$ implica $f(g) \leq f(h)$ per ogni $g, h \in G$. Con la stessa notazione f è un o-epimorfismo se f è suriettivo e $f(G_+) = G'_+$; f si dice un o-isomorfismo se f è un isomorfismo tra gruppi e $f(G_+) = G'_+$. Se G e G' sono l-gruppi allora f è un *l-omomorfismo* se f è un omomorfismo di gruppi e $f(\inf\{g, h\}) = \inf\{f(g), f(h)\}$; se f è biettiva, allora f si dice un l-isomorfismo.

Successivamente, per rendere il nostro lavoro autocontenuto, abbiamo introdotto ulteriori nozioni fondamentali.

- *Un sottogruppo H di un po-gruppo G si dice un sottogruppo convesso di G se per ogni $a \in G$, $b \in H$, $0 \leq a \leq b$ implica $a \in H$.*

- *Dato un l-gruppo G, un sottoinsieme proprio F di G_+ si dice un filtro di G_+ se:*

  (1) *Per ogni $a, b \in F$,* $\inf\{a, b\} \in F$.

  (2) *Per ogni $a \in G$, $b \in F$, se $a \geq b$ allora $a \in F$.*

  Inoltre, un filtro F di G_+ si dirà un filtro primo se soddisfa la condizione aggiuntiva:

  (3) *Se $g, h \in G_+ \setminus F$, allora $g + h \in G_+ \setminus F$.*

- *Un filtro F in un l-gruppo G si dice un ultra filtro di G_+ se F è un elemento massimale dell'insieme di tutti i filtri di G_+ ordinato rispetto all'inclusione.*

L'importanza di tali insiemi è stata messa in luce nel Capitolo 3 dove abbiamo mostrato una interconnessione tra l'insieme degli ideali propri di un dominio di valutazione V associato ad un valutazione v, e l'insieme dei filtri di G_+, dove G_+ è l'insieme degli elementi positivi del gruppo dei valori di v.

Nel Capitolo 2 abbiamo trattato il concetto di *gruppo di divisibilità* di un dominio con lo scopo di caratterizzare alcune classi di domini, come gli MCD-domini, i domini di valutazione e gli UFD, attraverso la teoria dei gruppi ordinati, ed abbiamo mostrato che la teoria della divisibilità e della fattorizzazione in un dominio è essenzialmente lo studio di tale gruppo.
Prima di tutto abbiamo introdotto la nozione di *gruppo di divisibilità*. Sia K un campo, sia K^* il gruppo moltiplicativo degli elementi non nulli di K e sia D un sottoanello di K con unità. Il gruppo $U(D)$ delle unità di D è un sottogruppo di K^*. Denotiamo additivamente l'operazione del gruppo quoziente $G := K^*/U(D)$ come $xU(D) + yU(D) := xyU(D)$. Rispetto a tale operazione G diventa un gruppo abeliano additivo con elemento neutro $U(D)$. Per $xU(D)$, $yU(D) \in G$ definiamo la seguente relazione: $xU(D) \leq yU(D)$ se e soltanto se $y/x \in D$. Allora G è un po-gruppo, chiamato *il gruppo di divisibilità di K rispetto a D*. Se K è il campo dei quozienti di D, allora chiameremo $G(D) := G = K^*/U(D)$ il *gruppo di divisibilità di D*. L'insieme degli elementi positivi di G è $G_+ = \{xU(D) : x \in D\}$.
Il caso in cui K è il campo dei quozienti di D è di speciale importanza, poiché in questo caso G è diretto e, quindi, alcune proprietà di G sono determinate dalle proprieta di G_+ e quindi dalle proprietà di divisibilità in D. Successivamente abbiamo caratterizzato gli MCD-domini e i domini di valutazione tramite il gruppo di divisibilità.

- *Sia D un dominio integro con campo dei quozienti K, e sia $G(D)$ il gruppo di divisibilità di D. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

  (1) *$G(D)$ è un l-gruppo;*

  (2) *D è un mcm-dominio;*

  (3) *D è un MCD-dominio;*

  (4) *Per ogni $a, b \in D$, $aD \cap bD$ è un ideale principale di D;*

  (5) *Ogni v-ideale di D di tipo finito è principale.*

- *Sia D un dominio di integrità con campo dei quozienti K, e sia $G(D)$ il gruppo di divisibilità di D. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

    (1) *$G(D)$ è totalmente ordinato;*

    (2) *L'insieme degli ideali interi di D è linearmente ordinato per inclusione;*

    (3) *D è un dominio di valutazione su K.*

Questi risultati ci hanno permesso di dare una rapida occhiata su alcune interessanti connessioni tra la teoria dei gruppi abeliani parzialmente ordinati e la teoria degli anelli. Di certo, a questo punto, solo una minima quantità di pezzi del puzzle che esprime tali interconnessioni è stata collocata. Abbiamo così cercato, introducendo ulteriori nozioni di teoria dei gruppi ordinati, di descrivere altre interessanti relazioni tra le due teorie.

- *Sia G un po-gruppo abeliano additivo, un elemento x di G si dice estremale se $x > 0$ e se non esiste alcun elemento y di G tale che $0 < y < x$. Inoltre, x si dice fortemente estremale se $x > 0$ e se x ha la proprietà che $x \leq y + z$, con $y, z \geq 0$, implica $x \leq y$ oppure $x \leq z$.*

Il seguente risultato ci ha permesso di notare come le proprietà degli elementi e degli ideali di D possono essere tradotte letteralmente nelle proprietà del gruppo di divisibilità $G(D)$ di D.

- *Sia D un dominio con campo dei quozienti K, e sia $G(D) = \dfrac{K^*}{U(D)}$ il gruppo di divisibilità di D. Allora valgono le seguenti proprietà:*

    (1) *Siano $a, b \in D$ entrambi non nulli, esiste $MCD\,(a, b) = d$ in D se e soltanto se esiste $\inf\,(aU(D), bU(D)) = dU(D)$ nel cono positivo di $G(D)$;*

    (2) *Siano $a, b \in D$ entrambi non nulli, esiste $mcm\,(a, b) = m$ in D se e soltanto se esiste $\sup\,(aU(D), bU(D)) = mU(D)$ nel cono positivo di $G(D)$;*

(3) *Sia x un elemento non nullo e non invertibile di D, l'elemento $xU(D)$ di $G(D)$ è estremale se e soltanto se xD è massimale nell'insieme degli ideali propri principali di D; cioè, se e soltanto se x è un elemento irriducibile di D.*

(4) *Sia x un elemento non nullo e non invertibile di D, l'elemento $xU(D)$ di $G(D)$ è fortemente estremale se e soltanto se xD è un ideale primo di D; cioè, se e soltanto se x è un elemento primo di D.*

(5) *Vale la condizione della catena ascendente (a.c.c.) per gli ideali principali di D se e soltanto se vale la condizione della catena discendente (d.c.c) sugli elementi positivi di $G(D)$.*

Abbiamo osservato che gli elementi fortemente estremali sono estremali. Nel linguaggio della teoria degli anelli questo corrisponde al risultato che gli elementi primi di un dominio sono irriducibili. In un MCD-dominio, gli elementi irriducibili sono primi; quindi l'affermazione corrispondente nella teoria dei gruppi ordinati è: in un gruppo abeliano ordinato reticolato G, gli elementi estremali sono fortemente estremali.
Abbiamo infine caratterizzato i domini a fattorizzazione unica attraverso il gruppo di divisibilità. Se D è un UFD allora il suo gruppo di divisibilità è un l-gruppo, ma il viceversa non è vero. Il nostro scopo è stato quello di determinare condizioni sul gruppo di divisibilità di un dominio affinché tale dominio fosse un UFD.

- *Un dominio di integrità D è un UFD se e soltanto se il gruppo di divisibilità $G(D)$ è o-isomorfo alla somma cardinale di copie del gruppo ciclico infinito $\mathbb{Z}$.*

I risultati fin ora ottenuti ci hanno permesso di vedere come il gruppo di divisibilità $G(D)$ di un dominio D rifletta molte delle proprietà di fattorizzazione degli elementi di D. Nel Capitolo 3, per evidenziare tali relazioni, abbiamo guardato la situazione da una diversa angolazione, precisamente dal punto di vista delle *semi-valutazioni*. Abbiamo introdotto il concetto di *semi-valutazione*, ed abbiamo dimostrato che lo studio dei gruppi di divisibilità si riduce allo studio delle semi-valutazioni con gruppo dei semivalori diretto.

- *Sia w una semi-valutazione su un campo K con anello di semi-valutazione D_w, allora $w(K^*)$ è o-isomorfo al gruppo di divisibilità di D_w se e soltanto se $w(K^*)$ è un po-gruppo diretto.*

- *Sia w una semi-valutazione su un campo K con anello di semi-valutazione D_w e gruppo dei semivalori G, allora G è un l-gruppo se e soltanto se il gruppo di divisibilità $G(D_w)$ di D_w è un l-gruppo se e soltanto se D_w è un MCD-dominio con campo dei quozienti K.*

Abbiamo, poi, cercato di stabilire delle relazioni tra gli ideali di D e particolari sottoinsiemi del gruppo di divisibilità di D; specificatamente abbiamo mostrato l'esistenza di una corrispondenza biunivoca, dovuta a *Yakabe*[Yak63] e *Sheldon*[She73], tra gli ideali primi di un dominio D di *Bézout* ed i filtri primi del cono positivo di $G(D)$.

- **Teorema di Yakabe-Sheldon**
  Sia D un dominio di Bézout con campo dei quozienti K e gruppo di divisibilità $G(D)$. Sia $w : K \to G(D) \cup \{\infty\}$ la demi-valutazione su K associata a D. Allora esiste una corrispondenza biunivoca che preserva l'inclusione tra gli ideali primi propri di D ed i filtri primi di $G(D)_+$, che manda ogni ideale primo proprio P in $w(P \setminus \{0\})$ e ogni filtro primo F in $w^{-1}(F) \cup \{0\}$.

La corrispondenza di *Yakabe-Sheldon* in realtà dice qualcosa di più, ossia che gli ideali propri I di D corrispondono ai filtri $w(I \setminus \{0\})$ di $G(D)_+$ e viceversa, mentre gli ideali massimali di D agli ultra filtri di $G(D)_+$.
Inoltre, se D è un dominio di valutazione, la corrispondenza si stabilisce tra gli ideali primi di D ed i sottogruppi convessi del gruppo totalmente ordinato $G(D)$ [Kru31]. A questo punto, ci siamo chiesti:

- Esiste una simile corrispondenza per domini integri qualsiasi? E se qualche corrispondenza esiste, si riduce alle corrispondenze note per i domini di valutazione e per i domini di *Bézout*?

Il Teorema di *Mott* [Mot74] risponde a queste questioni:

- **Teorema di Mott**
  Sia D un dominio di integrità con campo dei quozienti K e sia $G(D)$ il suo gruppo di divisibilità. Esiste una corrispondenza biunivoca tra i sistemi moltiplicativi saturati di D ed i sottogruppi diretti convessi (o-ideali) di $G(D)$. Inoltre, se S è un sistema moltiplicativo saturato di D e G_S è il corrispondente sottogruppo convesso diretto in $G(D)$, allora il gruppo di divisibilità di D_S è $\dfrac{G(D)}{G_S}$.

Inoltre, abbiamo visto come il Teorema di *Mott* generalizza le corrispondenze precedentemente osservate per i domini di valutazione ed i domini di *Bézout*. Infine abbiamo definito la PF-dimensione di un l-gruppo ed abbiamo mostrato che per un dominio di *Bézout* la dimensione di *Krull* è determinata dalla PF-dimensione dei filtri primi del cono positivo del suo gruppo di divisibiltità.

- *Sia G un l-gruppo abeliano. Sia*

  $$F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n \subset F_{n+1}$$

  una catena finita di $n+1$ filtri primi di G_+. Diremo che una siffatta catena ha lunghezza n. Inoltre, se esiste un intero non negativo n tale che G_+ contiene una catena di filtri primi di lunghezza n, ma nessuna siffatta catena di lunghezza $n+1$, diremo che G_+ ha PF-dimensione n. Se non esiste tale intero n diremo che la PF-dimensione di G_+ è infinita.

- *Se D è un domini di Bézout, allora la dimensione di Krull di D è uguale alla PF-dimensione di $G(D)_+$.*

L'importanza dei filtri primi e della PF-dimensione verrà messa in luce nella costruzione di alcuni esempi di domini nell'ultimo capitolo.

Il Capitolo 4 è dedicato ad uno dei più importanti e cruciali risultati nella teoria della divisibilità, precisamente, al cosidetto teorema di *Krull-Kaplansky-Jaffard-Ohm*. Questo teorema può essere definito come il principale lavoro nel tentativo di creare delle connessioni tra la teoria dei gruppi ordinati e quella degli anelli. Inizialmente abbiamo riportato un interessante risultato dovuto a *Krull* [Kru31]:

- **Teorema di Krull**
  Se G è un gruppo abeliano additivo totalmente ordinato, allora G è il gruppo dei valori di una valutazione.

Questo risultato rappresenta il primo passo significativo nella teoria dei gruppi di divisibilità. Noi abbiamo fornito una dimostrazione leggermente diversa da quella originaria di *Krull*. Successivamente, la prova di *Krull*, fu generalizzata da *Jaffard* [Jaf53] al caso in cui G è un l-gruppo. Da questo, *Jaffard*, seguendo i passi principali della dimostrazione di *Krull*, provò che un l-gruppo abeliano G può essere realizzato come il gruppo di divisibilità di un dominio integro. Qui il dominio costruito è necessariamente un MCD-dominio. In seguito, *Ohm* [Ohm69] astutamente osservò che il dominio in questa costruzione è un dominio di *Bézout*. In realtà, secondo *Mott*[Mot73], *Kaplansky* aveva fatto la stessa osservazione 12 anni prima in una parte non pubblicata della sua dissertazione all'Università di Harvard. Abbiamo dato una dimostrazione esauriente di questo risultato (composto), designato come il Teorema di *Krull-Kaplansky-Jaffard-Ohm*, senza esplicitare formalmente le sue varie fasi storiche.

- **Teorema di Krull-Kaplansky-Jaffard-Ohm**
  Se G è un l-gruppo abeliano, allora G è, a meno di o-isomorfismi, il gruppo di divisibilità di un dominio di Bézout.

Questo risultato è forse uno dei più importanti nella teoria dei gruppi di divisibilità, che si è sviluppato in un periodo di circa 30 anni. La realizzazione di questo teorema mostrò un'estesa possibilità di applicare la teoria dei gruppi di divisibilità per risolvere alcuni problemi di teoria degli anelli, come abbiamo mostrato nell'ultimo capitolo.

Il principale risultato del Capitolo 5 ci permette di derivare un metodo per costruire il gruppo di divisibilità di una ben nota costruzione, la cosiddetta *composizione (o composto) di due anelli.* Inizialmente abbiamo introdotto le seguenti nozioni di successione o-esatta e lex-esatta di po-gruppi;

- *Una successione esatta corta di po-gruppi*

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} J \longrightarrow 0$$

  si dice o-esatta se $\alpha(H_+) = \alpha(H) \cap G_+$ *e* $\beta(G_+) = J_+$. *La notazione* (α, β) *sarà usata per indicare la successione esatta corta precedentemente descritta. La successione esatta corta* (α, β) *si dice lex-esatta (lexicograficamente esatta) se* $G_+ = \{g \in G : \beta(g) > 0$ *oppure* $g \in \alpha(H_+)\}$.

Diremo che un po-gruppo G è una o-estensione di un po-gruppo H in un po-gruppo J oppure una lex-estensione di H in J, a seconda che la successione (α, β) sia o-esatta oppure lex-esatta. Un caso particolarmente importante di successione lex-esatta è la *somma diretta lexicografica inversa.* Se H e G sono po-gruppi, ordiniamo la somma diretta $H \oplus G$ nel modo seguente:

$$(H \oplus G)_+ = \{(a, b) : b > 0 \text{ oppure } b = 0 \text{ e } a \geq 0\}.$$

Il po-gruppo $H \oplus G$ si dice *la somma diretta lexicografica inversa* di H e G ed è denotato con $H \oplus_L G$.
Abbiamo osservato che la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow H \oplus_L G \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

è lex-esatta. Di particolare interesse, per il nostro scopo, è stata la seguente definizione dovuta a *Ohm.*

- *Una successione o-esatta* (α, β) *si spezza (si spezza lexicograficamente) se esiste un diagramma commutativo*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{\alpha} & G & \xrightarrow{\beta} & J & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle id} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho} & & \Big\downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{i_1} & H \oplus_L J & \xrightarrow{\pi_2} & J & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dove ρ è un isomorfismo (o-isomorfismo), i_1 e π_2 sono le usuali applicazioni iniettive e proiettive tra H, J e $H \oplus J$. Se (α, β) è lex-esatta e si spezza, allora si spezza lexicograficamente.

Dalla definizione di o-estensione oppure di lex-estensione, segue che un gruppo di divisibilità $G(B)$ di un dominio B, essendo un po-gruppo, può essere interpretato come un'estensione di un gruppo di divisibilità $G(A)$ di un dominio A in un altro gruppo di divisibilità $G(C)$ di un dominio C. Il problema, allora, per molti esempi sulla costruzione di $G(B)$ è quello di fare una giusta scelta degli anelli A e C cosicché la struttura di $G(B)$ sia prontamente rivelata. Per fare ciò, abbiamo seguito la nozione classica del *composto* di due anelli di valutazione e l'utilizzo di *Ohm* di questa nozione in [Ohm69].

- *Siano C un anello, I un ideale di C e A un sottoanello di C/I. Sia φ l'omomorfismo canonico di C su C/I. Allora $B = \varphi^{-1}(A)$ si dice il composto di C e A su I. (In notazione moderna B si dice il pull-back di A in C.)*

Successivamente abbiamo visto il vantaggio di questa costruzione analizzando il gruppo di divisibilità $G(B)$ quando B è il composto di C e A, dove C è un dominio quasi-locale con campo dei quozienti K e campo residuo $\Delta = C/M$. In particolare abbiamo mostrato il seguente risultato.

- *Indicando con u, v, w le semi-valutazioni canoniche associate ai domini A, B, C, rispettivamente, esistono omomorfismi α, β che rendono il seguente diagramma commutativo e tale che (α, β) sia un successione lex-esatta.*

$$\begin{tikzcd}
& U(C) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "u\circ\varphi'"] & K^* \arrow[d, "v"] \arrow[dr, "w"] & & \\
0 \arrow[r] & \dfrac{\Delta^*}{U(A)} \arrow[r, "\alpha"] & \dfrac{K^*}{U(B)} \arrow[r, "\beta"] & \dfrac{K^*}{U(C)} \arrow[r] & 0\,(1)
\end{tikzcd}$$

dove i è l'immersione e φ' è la restrizione di φ a $U(C)$.

Questo risultato ci ha permesso di costruire un nuovo gruppo di divisibilità a partire da due gruppi di divisibilità.

- *Sia J il gruppo di divisibilità di un dominio quasi-locale C con campo residuo Δ e sia H il gruppo di divisibilità di un sottoanello A di Δ. Se J è libero (come uno $\mathbb{Z}$-modulo), allora $H \oplus_L J$ è un gruppo di divisibilità.*

Un esempio al quale questo risultato si applica è $C = K[X,Y]_{(X,Y)}$. Poiché la localizzazione di un UFD è un UFD, segue che, essendo $K[X,Y]$ un UFD, anche C lo è. Ora, sia J il gruppo di divisibilità di C e H il gruppo di divisibilità di un qualche sottoanello A del campo residuo Δ di C. Poiché J è o-isomorfo alla somma diretta ordinata di copie di $\mathbb{Z}$, allora esso è libero. Per cui $H \oplus_L J$ è un gruppo di divisibilità.
Da questo risultato abbiamo notato che è importante sapere quando accade che la successione (α, β) di (1) si spezza. Abbiamo così mostrato un risultato che risolve completamente questo problema senza porre nessuna condizione particolare su J.

- *La successione (α, β) di (1) si spezza se e soltanto se esiste un insieme $\mathcal{M} = \{x_c : x_c \in K^*, c \in G(C)\}$, tale che $w(x_c) = c$ e $(x_d \cdot x_d)/x_{c+d} \in U(B)$, per ogni $c, d \in G(C)$.*

Questa caratterizzazione ci ha permesso di dimostrare che:

- *Se H è un gruppo di divisibilità e J è un o-gruppo, allora $H \oplus_L J$ è un gruppo di divisibilità.*

In virtù di ciò, è sembrato ragionevole porsi la seguente domanda:

- Se H è un gruppo di divisibilità e J è un l-gruppo (ma non un o-gruppo), allora $H \oplus_L J$ è un gruppo di divisibilità?

Abbiamo osservato che ciò non è necessariamente vero. Questo ci ha permesso, usando le successioni lex-esatte, di costruire una vasta classe di gruppi diretti che non sono gruppi di divisibilità.
In particolare abbiamo mostrato il seguente interessante fatto:

- *Ogni po-gruppo H è un sottogruppo ordinato di un po-gruppo G che non è un gruppo di divisibilità.*

Quindi esistono po-gruppi diretti che non sono gruppi di divisibilità. Ma il primo esempio di un tale po-gruppo è dovuto a *Jaffard*[Jaf56]. Egli osservò originariamente che il sottogruppo J della somma diretta ordinata $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ definito

$$J = \{(a, b) : a \text{ e } b \text{ sono interi tali che } a + b \text{ è pari}\}$$

con l'ordinamento indotto, non può essere un gruppo di divisibilità.
In questo contesto abbiamo menzionato e mostrato il seguente risultato, il cui analogo nella teoria degli anelli è dovuto a *Cohen-Kaplansky*[CK46], che fornisce un interessante metodo per costruire esempi di po-gruppi diretti che non sono gruppi di divisibilità.

- *Sia G un po-gruppo abeliano additivo. Supponiamo che G non sia un l-gruppo e che G_+ soddisfi la d.c.c.. Se G è il gruppo di divisibilità di un qualche dominio D, allora G_+ contiene più di due elementi estremali. Se G_+ contiene esattamente tre elementi estremali α_1, α_2 e α_3, allora $\alpha_i + \alpha_j = 2\alpha_k$ per ogni permutazione possibile (i, j, k) di $1, 2$ e 3.*

Abbiamo chiuso il capitolo mostrando un esempio di applicazione di questo metodo ed abbiamo osservato come tale criterio può essere applicato all'esempio di *Jaffard*.

Il Capitolo 6 è il fine ultimo di questo lavoro. In questo capitolo abbiamo riportato alcuni tra gli esempi più interessanti di applicazioni della teoria dei gruppi di divisibilità alla teoria degli anelli. Le applicazioni basilari della teoria dei gruppi di divisibilità consistono nel seguente metodo: formulare (se è possibile) un problema di teoria degli anelli in termini di gruppi di divisibilità, risolvere il problema nella teoria dei gruppi ordinati e riportare la soluzione ogni qualvolta sia possibile ai domini di integrità. Il principale lavoro che ci permette di applicare questo metodo è il Teorema di *Krull-Kaplansky-Jaffard-Ohm.* La costruzione di esempi tramite questo teorema segue la seguente linea generale:

1. Costruzione di un appropriato l-gruppo G;

2. Applicazione del Teorema di *Krull-Kaplansky-Jaffard-Ohm* per costruire un dominio di *Bézout* che ha G come gruppo di divisibilità;

3. Traduzione delle proprietà di G in alcune opportune proprietà del dominio di *Bézout*.

Uno dei vantaggi di tale processo è la sua capacità nel produrre interessanti esempi di domini, poichè risulta più semplice costruire un po-gruppo con opportune proprietà che un dominio con le proprietà corrispondenti. Molti di questi esempi sono contro-esempi per confutare congetture di teoria degli anelli. I contributi per la diffusione di queste tecniche sono dovuti ad *Ohm*. Ci siamo inizialmente interessati alle problematiche relative alla completa chiusura intergrale. Il problema di caratterizzare i domini completamente integralmente chiusi ci ha condotti a diverse questioni. Indicando con D_c la completa chiusura integrale di un dominio D e con D_c^n la completa chiusura integrale di D_c^{n-1}, la prima questione sorta è stata la seguente:

- D_c è completamente integralmente chiuso per ogni D?

Questo non è vero, infatti in [GH66, Esempio 1, p. 354], è mostrato un esempio di un dominio integro D tale che $D_{c^2} \neq D_c$, sebbene in questo esempio D non sia un dominio di *Prüfer*, e quindi non un dominio di *Bézout*. Questo naturalmente ci ha portato alla questione:

- Se D è un dominio di *Prüfer*, D_c è completamente integralmente chiuso?

La risposta è ancora no, con il contro-esempio dovuto a *W. Heinzer* ([Hei69] oppure [Gil72, Esempio 19.13]). La costruzione usa il Teorema di *Krull-Kaplansky-Jaffard-Ohm*, e fornisce un dominio di *Bézout* con dimensione di *Krull* infinita. Questo ci ha condotti alla seguente questione:

- Se D è un dominio di *Prüfer* di dimensione di *Krull* finita, D_c è completamente integralmente chiuso?

La risposta è ancora no, con il contro-esempio dovuto a *P. Sheldon* [She73, Esempio 1]. La costruzione usa il Teorema di *Krull-Kaplansky-Jaffard-Ohm*

e la biiezione di *Sheldon*, e fornisce un dominio D di *Bézout* di dimensione di *Krull* 2, la più piccola possibile, per il quale D_c non è completamente integralmente chiuso.
Gli ultimi due esempi citati hanno la proprietà che $D \subsetneq D_c \subsetneq D_{c^2} = (D_{c^2})_c$, cioè, D_{c^2} è completamente integralmente chiuso. Questo ci ha condotti alla questione:

- D_{c^2} è sempre completamente integralmente chiuso?

La risposta è no, con il contro-esempio dovuto a *P. Hill* [Hil72, Teorema 1]. Usando la costruzione del Teorema di *Krull-Kaplansky-Jaffard-Ohm*, egli mostra che per $n \in \mathbb{N}$ esiste un dominio D di *Bézout* tale che $D \subsetneq D_c \subsetneq \cdots \subsetneq D_{c^n} = D_{c^{n+1}}$. Questo conduce facilmente ad un altro esempio di *P. Hill* il quale asserisce che esiste un dominio D di *Bézout* tale che $D_{c^n} \subsetneq D_{c^{n+1}}$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$. Prima di mostrare questi esempi abbiamo fornito un metodo per determinare quando un dominio è completamente integralmente chiuso in termini del suo gruppo di divisibilità, in particolare abbiamo cercato di mettere in relazione il concetto di elemento quasi intero di un dominio con le proprietà del gruppo di divisibilità.
Successivamente abbiamo posto il nostro interesse su una famosa congettura, la cosiddetta *congettura di Krull*.

- *Se F è un campo e se D è un sottoanello di F, è vero che la completa chiusura integrale di D in F è uguale all'intersezione della famiglia $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ di anelli di valutazione su F che contengono D ed hanno rango al più uguale a 1?*

Krull in [Kru31] congetturò che la risposta a questa domanda fosse affermativa, almeno nel caso in cui F sia il campo dei quozienti di D e D sia completamente integralmente chiuso. Cioè egli ipotizzò che D è completamente integralmente chiuso se e soltanto se D è un'intersezione di anelli di valutazione di rango al più uguale a 1. *Nakayama* [Nak46, Nak42a, Nak42b] diede un notevole contro-esempio alla congettura di *Krull*: un dominio D di *Bézout* completamente integralmente chiuso con campo dei quozienti $K \neq D$

che non ha nessun sovranello di valutazione di rango 1 (e quindi nessun sovranello di valutazione di rango finito). Noi abbiamo dato un contro-esempio più semplice dovuto a *J.Ohm*.
Nell'esempio di *Ohm* il dominio D è un dominio di *Bézout* di dimensione infinita, dunque era naturale chiedersi se la congettura valesse per domini di dimensione finita. Ma la risposta è no, come mostra il seguente esempio:

Esempio(P. Sheldon [She73, Esempio II])
Esiste un dominio D di Bézout di dimensione di Krull uguale a 2*, completamente integralmente chiuso, che non è un'intersezione di sovranelli di valutazione di dimensione di Krull uguale a* 1.

La nozione di gruppo di divisibilità non solo è importante per esibire una confutazione di congetture di teoria degli anelli, ma permette di determinare esempi di domini con opportune proprietà studiando soltanto il rispettivo gruppo di divisibilità.
Abbiamo concluso il capitolo costruendo attraverso il gruppo di divisibilità un esempio di un anello localmente Noetheriano che non è Noetheriano. Il primo esempio di questo tipo fu dato da *Nakano* [Nak53] senza usare il gruppo di divisibilità. L'esempio che noi abbiamo mostrato è dovuto a *Heinzer-Ohm* [HO71] ed è più semplice di quello originario.

Esempio(W. Heinzer e J. Ohm [HO71, Esempio 2.2])
Esiste un dominio D tale che ogni D_P è un anello di valutazione Noetheriano ma D non è esso stesso Noetheriano.

Bibliografia

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[Aub83] Karl Egil Aubert. Divisors of finite character. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 133:327–361, 1983.

[CK46] I. S. Cohen and Irving Kaplansky. Rings with a finite number of primes. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 60:468–477, 1946.

[Cli38] A. H. Clifford. Arithmetic and ideal theory of commutative semigroups. *Ann. of Math. (2)*, 39(3):594–610, 1938.

[Cli40] A. H. Clifford. Partially ordered abelian groups. *Ann. of Math. (2)*, 41:465–473, 1940.

[Dar95] Michael R. Darnel. *Theory of lattice-ordered groups*, volume 187 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker Inc., New York, 1995.

[FS01] L. Fuchs and L. Salce. *Modules over non-Noetherian domains*, volume 84 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[GH66] Robert W. Gilmer, Jr. and William J. Heinzer. On the complete integral closure of an integral domain. *J. Austral. Math. Soc.*, 6:351–361, 1966.

[Gil72] R. Gilmer. *Multiplicative ideal theory,*. Marcel Dekker Inc., New York, 1972. Pure and Applied Mathematics, No. 12.

[GO64] Robert Gilmer and Jack Ohm. Integral domains with quotient overrings. *Math. Ann.*, 153:97–103, 1964.

[GP74] Robert Gilmer and Tom Parker. Divisibility properties in semigroup rings. *Michigan Math. J.*, 21:65–86, 1974.

[Hei69] William Heinzer. Some remarks on complete integral closure. *J. Austral. Math. Soc.*, 9:310–314, 1969.

[Hen56] Melvin Henriksen. Some remarks on elementary divisor rings. II. *Michigan Math. J.*, 3:159–163, 1955–1956.

[Hil72] Paul Hill. On the complete integral closure of a domain. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 36:26–30, 1972.

[HO71] William Heinzer and Jack Ohm. Locally noetherian commutative rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 158:273–284, 1971.

[Jaf53] Paul Jaffard. Comtribution à l'étude des groupes ordonnés. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 32:203–280, 1953.

[Jaf54] Paul Jaffard. Extension des groupes réticulés et applications. *Publ. Sci. Univ. Alger. Sér. A.*, 1:197–222 (1955), 1954.

[Jaf56] Paul Jaffard. Un exemple concernant les groupes de divisibilité. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 243:1264–1266, 1956.

[Jaf60a] Paul Jaffard. *Les systèmes d'idéaux*. Travaux et Recherches Mathématiques, IV. Dunod, Paris, 1960.

[Jaf60b] Paul Jaffard. *Théorie de la dimension dans les anneaux de polynomes*. Mémor. Sci. Math., Fasc. 146. Gauthier-Villars, Paris, 1960.

[Kru31] Wolfang Krull. Allgemeine bewertungstheorie. *J. Reine Angew. Math.*, 167:160–196, 1931.

[Kru36] Wolfgang Krull. Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. I, II. *Math. Z.*, 41:544–577, 665–679, 1936.

[Lev43] F. W. Levi. Contributions to the theory of ordered groups. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A.*, 17:199–201, 1943.

[Lor39] P. Lorenzen. Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie. *Math. Z.*, 45:533–553, 1939.

[Mat89] H. Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.

[Moč83] JiříMočkoř. *Groups of divisibility*. Mathematics and its Applications (East European Series). D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1983.

[Mot73] Joe L. Mott. The group of divisibility and its applications. In *Conference on Commutative Algebra (Univ. Kansas, Lawrence, Kan., 1972)*, pages 194–208. Lecture Notes in Math., Vol. 311. Springer, Berlin, 1973.

[Mot74] Joe L. Mott. Convex directed subgroups of a group of divisibility. *Canad. J. Math.*, 26:532–542, 1974.

[MS76] Joe L. Mott and Michel Schexnayder. Exact sequences of semi-value groups. *J. Reine Angew. Math.*, 283/284:388–401, 1976.

[Nag62] Masayoshi Nagata. *Local rings*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 13. Interscience Publishers a division of John Wiley & Sons New York-London, 1962.

[Nak42a] Tadasi Nakayama. On Krull's conjecture concerning completely integrally closed integrity domains. II. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 18:233–236, 1942.

[Nak42b] Tadasi Nakayama. On Krull's conjecture concerning completely integrally closed integrity domains. I. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 18:185–187, 1942.

[Nak46] Tadasi Nakayama. On Krull's conjecture concerning completely integrally closed integrity domains. III. *Proc. Japan Acad.*, 22(8):249–250, 1946.

[Nak53] Noboru Nakano. Idealtheorie in einem speziellen unendlichen algebraischen Zahlkörper. *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A.*, 16:425–439, 1953.

[Ohm66] Jack Ohm. Some counterexamples related to integral closure in $D[[x]]$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 122:321–333, 1966.

[Ohm69] Jack Ohm. Semi-valuations and groups of divisibility. *Canad. J. Math.*, 21:576–591, 1969.

[Rib56] P. Ribenboim. Anneaux normaux réels à caractère fini. *Summa Brasil. Math.*, 3:213–253, 1956.

[Rib58] Paulo Ribenboim. Sur les groupes totalement ordonnés et l'arithmétique des anneaux de valuation. *Summa Brasil. Math.*, 4:1–64, 1958.

[She71] Philip B. Sheldon. How changing $D[[x]]$ changes its quotient field. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 159:223–244, 1971.

[She73] Philip B. Sheldon. Two counterexamples involving complete integral closure in finite-dimensional Prufer domains. *J. Algebra*, 27:462–474, 1973.

[She74] Philip B. Sheldon. Prime ideals in GCD-domains. *Canad. J. Math.*, 26:98–107, 1974.

[Yak63] Iwao Yakabe. On semi-valuations. II. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A*, 17:10–28, 1963.

[ZS75] O. Zariski and P. Samuel. *Commutative algebra. Vol. II.* Springer-Verlag, New York, 1975. Reprint of the 1960 edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 29.