

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica

di

Antonella Ballabene

**APPLICAZIONI della TEORIA dei VALORI
ESTREMI
al VALORE a RISCHIO**

Relatore

Prof. Sergio Scarlatti

Correlatore

Prof. Brunero Liseo

ANNO ACCADEMICO 2002 - 2003

Ottobre 2003

Classificazione AMS: 60G70, 62G32, 65C60, 91B28, 62A10

Parole Chiave: VaR, Teoria dei Valori Estremi, Massima Verosimiglianza,
Stimatore di Hill, Distribuzione di Pareto Generalizzata.

A partire dagli anni '90 si è diffuso un nuovo strumento per la valutazione del rischio finanziario, il concetto di *Valore a Rischio*, o VaR. Ben presto questo nuovo mezzo ha monopolizzato la scena, sia nel dibattito sulla gestione del rischio sia nell'operatività quotidiana degli intermediari finanziari. Il concetto di Value at Risk è basato in maniera fondamentale su strumenti di calcolo delle probabilità, in quanto è definito come la perdita potenziale di valore di un portafoglio che può insorgere, ad un certo livello di probabilità e in un determinato lasso di tempo, a causa di movimenti avversi nelle variabili finanziarie. In concreto, se l'intervallo di tempo prescelto è un giorno, il VaR è la massima perdita di valore che è probabile osservare nel 99% dei casi in una giornata, ma nel restante 1% dei casi, la perdita potrebbe essere bene maggiore di VaR (euro). Il significato operativo di questa misura è la quota di capitale che l'intermediario deve tenere a disposizione per far fronte a queste perdite eventuali per un certo lasso di tempo.

Gli approcci tradizionali per la stima del Var suppongono che la distribuzione dei rendimenti del portafoglio sia di tipo gaussiano. Ci si è resi conto però, che sempre più spesso tali approcci non risultano adeguati. Statisticamente si è riscontrato, infatti, che i rendimenti risultano caratterizzati da distribuzioni particolarmente asimmetriche e dotate di coda spessa. Sono stati elaborati così, nel corso degli ultimi anni, diversi modelli per il calcolo del Value at Risk. In termini matematici, il VaR, rappresenta un quantile della distribuzione probabilistica dei profitti (e delle perdite) di un portafoglio. E' quindi necessario, per avere un valore affidabile del VaR, ottenere una buona stima di tale distribuzione (in particolare delle code). Per fare ciò, è utile ricorrere ai principi della EVT.

La Teoria dei Valori Estremi è attualmente materia di grande interesse per coloro che si occupano di gestione quantitativa del rischio in ambito bancario, finanziario ed assicurativo. Compito fondamentale di chi si occupa della gestione del rischio è infatti l'implementazione di modelli che permettano la corretta misurazione dell'impatto di eventi rari e catastrofici. L' EVT offre, quindi, un valido supporto tecnico all'attività degli operatori finanziari che

curano profili di rischio nei mercati, avendo come fine ultimo la modellizzazione di eventi che si presentano con una probabilità molto piccola, ma che possono generare disastrose conseguenze. Per questo il linguaggio usato per descrivere tali eventi è quello della probabilità ed in questo campo la parola *estremo* è sempre relazionata con le code della distribuzione del rischio. Tale teoria è ancora in fase di sviluppo, in particolare nel caso multivariato.

In questa tesi abbiamo sviluppato una stima del Valore a Rischio di vari portafogli, costruiti da singoli titoli, attraverso l'uso della *Extreme Value Theory* (EVT). In particolare sono stati considerati titoli per i quali è stato possibile reperire una serie storica sufficientemente ampia dei valori dei rendimenti. Implementando funzioni basate sulla statistica dei valori estremi, tramite il software R, si è riscontrato, anche con il supporto di procedure d'analisi grafiche, che la stima del VaR dipende crucialmente dalla coda della distribuzione dei rendimenti e dal numero di osservazioni su cui è stata effettuata tale stima. In conclusione l' approssimazione con tale approccio risulta più realistica e precisa in entrambe i metodi proposti.

Nel primo capitolo è stata studiata la Teoria dei Valori Estremi in maniera approfondita (ref[EKM97],[Res87],[Gal87], [Gal87], [Pet95]).

Date X_1, X_2, \dots, X_n variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite (iid) con funzione di distribuzione continua $F(x)$. Definiamo il massimo di un campione aleatorio di rango $n \geq 1$ come:

$$M_1 = X_1, \quad M_n = \max(X_1, \dots, X_n), \quad n \geq 2.$$

La funzione di distribuzione di M_n è:

$$\mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) \dots \mathbb{P}(X_n \leq x) = F^n(x)$$

Si ha che $M_n \xrightarrow{a.s.} x_F$, per $n \rightarrow \infty$, dove $x_F = \sup \{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$.

Ciò non fornisce informazioni rilevanti, che invece possiamo ricavare dallo studio sulla convergenza debole del massimo normalizzato e centrato. Il

problema è determinare se esiste una distribuzione asintotica del massimo, cioè se esistono successioni di costanti a_n e $b_n > 0$ t.c. $(M_n - a_n)/b_n$ ha una qualche distribuzione limite o, equivalentemente, t.c.

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) = \mathbb{P}(M_n \leq a_n + b_n x) = F^n(a_n + b_n x) \xrightarrow{d} H(x)$$

per qualche funzione di distribuzione H .

Il problema è strettamente legato alle distribuzioni *max-stabili*. Tali distribuzioni soddisfano per X, X_1, \dots, X_n v.a. iid, appropriate costanti $b_n > 0$, $a_n \in \mathbb{R}$ e $\forall n \geq 2$ la seguente identità:

$$\max(X_1, \dots, X_n) \stackrel{d}{=} b_n X + a_n$$

Una volta provato che la classe delle distribuzioni max-stabili coincide con la classe di tutte le possibili leggi limite (non degeneri) per il massimo di v.a. iid, abbiamo dimostrato il *Teorema di Fisher-Tippett*:

- Sia (X_n) una successione di v.a. iid. Se esistono delle costanti di normalizzazione $b_n > 0$, $a_n \in \mathbb{R}$ e qualche funzione di distribuzione non degenera H tale che

$$b_n^{-1}(M_n - a_n) \xrightarrow{d} H,$$

allora H appartiene ad una delle seguenti famiglie di f.d.d.:

$$\mathbf{Fréchet} : \quad \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\}, & x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0.$$

$$\mathbf{Weibull} : \quad \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\alpha\}, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0.$$

$$\mathbf{Gumbel} : \quad \Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Al fine di dimostrare questo teorema sono stati necessari altri risultati. (Proposizione 1.1.1, Corollario 1.1.2, Teorema 1.1.3)

Le f.d.d. Φ_α , Ψ_α e Λ sono dette *distribuzioni standard di valori estremi*, e le corrispondenti v.a. sono dette *variabili aleatorie estreme standard*.

In particolare, i tre casi del Teorema di Fisher-Tippett corrispondono a:

Fréchet:	$M_n \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X$
Weibull:	$M_n \stackrel{d}{=} n^{-1/\alpha} X$
Gumbel:	$M_n \stackrel{d}{=} X + \ln n$

Non avendo informazioni su quale sia la famiglia a cui M_n converge, è stato necessario introdurre la definizione di massimo dominio di attrazione di una distribuzione.

- Diciamo che f.d.d. F appartiene al massimo dominio di attrazione della distribuzione ai valori estremi H ($F \in MDA(H)$) se esistono delle costanti $b_n > 0$ e $a_n \in \mathbb{R}$ t.c. vale

$$b_n^{-1} (M_n - a_n) \xrightarrow{d} H.$$

Per caratterizzare il massimo dominio di attrazione delle f.d.d. ai valori estremi, abbiamo utilizzato le proprietà delle funzioni a variazione regolare:

- Sia $\bar{F} = 1 - F$ la coda della f.d.d. $F(x)$, diremo che \bar{F} è a variazione regolare (regularly varying) con indice $-\alpha$, e scriveremo $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$, se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xt)}{\bar{F}(x)} = t^{-\alpha}, \quad t > 0.$$

I risultati di caratterizzazione sono stati fondamentali per lo studio della coda della distribuzione delle osservazioni.

- $F \in MDA(\Phi_\alpha) \iff \bar{F}(x) \in \mathcal{R}_{-\alpha}$
- $F \in MDA(\Psi_\alpha) \iff x_F < \infty, \quad \bar{F}(x_F - x^{-1}) \in \mathcal{R}_{-\alpha}$
- $F \in MDA(\Lambda) \iff \exists$ qualche $z < x_F$ tale che F abbia la seguente rappresentazione:

$$\bar{F}(x) = b(x) \exp \left\{ - \int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt \right\}, \quad z < x < x_F,$$

dove $b(x)$ e $g(x)$ sono funzioni misurabili t.c. $b(x) \rightarrow b$ e $g(x) \rightarrow 1$ per $x \rightarrow x_F$, mentre $a(x)$ è una funzione positiva assolutamente continua (rispetto alla misura di Lebesgue) con densità $a'(x)$ e con $\lim_{x \uparrow x_F} a'(x) = 0$.

Abbiamo concluso questo primo capitolo con lo studio della *distribuzione di Pareto generalizzata* (GPD), in quanto, oltre allo studio del massimo abbiamo voluto approfondire il comportamento delle osservazioni “large” che eccedono una data soglia.

Una volta definita la funzione di distribuzione degli eccessi $F_u(y)$ della v.a. X oltre una data soglia u nel modo seguente

$$F_u(y) = \mathbb{P}(X - u \leq y \mid X > u)$$

abbiamo sfruttato il Teorema di Balkema e de Haan (1974) e Pickands (1975) che mostra, per grandi u , che la funzione di distribuzione degli eccessi può essere approssimata dalla (GPD) $G_{\xi, \beta}$, ovvero

$$F_u(y) \approx G_{\xi, \beta}, \quad u \rightarrow \infty,$$

Dove, in generale, la GPD è definita nel modo seguente:

$$G_{\xi, \beta, \nu}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{x - \nu}{\beta}\right)^{-1/\xi}, & \text{se } \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-(x-\nu)/\beta}, & \text{se } \xi = 0, \end{cases}$$

con

$$x \in \begin{cases} [\nu, \infty], & \text{se } \xi \geq 0, \\ [\nu, \nu - \beta/\xi], & \text{se } \xi < 0, \end{cases}$$

e dove ξ è il parametro di *forma*, β è il parametro di *scala* e ν è quello di *locazione*.

Nel secondo capitolo abbiamo studiato in un primo momento, alcuni metodi per la stima dei parametri della coda \overline{F} . L'attenzione si è concentrata su funzioni di distribuzione appartenenti al massimo dominio di attrazione della Fréchet, quindi f.d.d. tali che $\overline{F}(x) = x^{-\alpha}c(x)$. Attraverso il metodo di

massima verosimiglianza abbiamo trovato lo *Stimatore di Hill*, le stime della coda e del p -quantile della f.d.d. F (ref[Hil75], [DdHR00]):

$$\begin{aligned}
 - \hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} &= \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln X_{j,n} - \ln X_{k,n} \right)^{-1} \\
 - \hat{F}(x) &= \frac{k}{n} \left(\frac{x}{X_{k,n}} \right)^{-\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)}} \\
 - \hat{x}_p &= \left(\frac{n}{k} (1-p) \right)^{-1/\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)}} X_{k,n}.
 \end{aligned}$$

Similmente, sempre tramite verosimiglianza, abbiamo poi trovato, lo stimatore del p -quantile di una Pareto generalizzata, calcolando, questa volta numericamente, le stime dei parametri ξ e β (ref[Col01], [EKM97]).

Nel terzo capitolo è stata data una definizione di Valore a Rischio, presentando nel primo paragrafo il metodo di calcolo tradizionale Delta-Normal (ref[Hul02]).

- *Il Valore a Rischio $V^* > 0$ ad un certo livello di confidenza $p \in (0, 1)$ (spesso $p \approx 0.99$) nell'intervallo di tempo $(0, t)$ è per definizione la soluzione dell'equazione:*

$$\mathbb{P}(\Delta V \leq -V^*) = 1 - p.$$

Dove ΔV è la variazione del nostro portafoglio \mathcal{P} . Assumendo che $\Delta V \sim N(0, V_0^2 \sigma^2 t)$ otteniamo l'approssimazione del VaR attraverso il quantile z_p di una gaussiana standard.

$$\text{VaR}_p = z_p V_0 \sigma \sqrt{t}.$$

Nelle sezioni successive abbiamo applicato la EVT al calcolo del VaR, sfruttando le stime delle code nel caso di Hill e nel modello GPD ottenendo rispettivamente:

$$\text{VaR}_{p;\hat{\alpha}} = \left[\left(\frac{n}{k} (1-p) \right)^{-1/\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)}} X_{k,n} \right] V_0. \quad (1)$$

$$\text{VaR}_{p;\widehat{\xi},\widehat{\beta}} = \left[u + \frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\xi}} \left(\left(\frac{n}{N_u} (1-p) \right)^{-\widehat{\xi}} - 1 \right) \right] V_0. \quad (2)$$

I punti cruciali per tali stime, in entrambe i modelli, sono stati:

1. non considerare brutalmente tutti i dati disponibili, ma solo i rendimenti negativi in valore assoluto, in quanto l'interesse del VaR cade solo sulla coda sinistra della distribuzione. In questo modo si è ovviato al problema dell'asimmetria della f.d.d. dei rendimenti.
2. tagliare ulteriormente il dataset considerandone solo le eccedenze.

Nel quarto capitolo sono stati affrontati dei metodi di analisi grafica sui dati: QQ-plot e ME-plot (ref[Cha77][EKM97]). Analisi per noi fondamentali, in quanto non sempre i dati presentano valori estremi e code pesanti. Cosa invece necessaria, per l'utilizzo della EVT.

Nel quinto ed ultimo capitolo abbiamo applicato i due modelli di VaR (Hill e GPD) ad un portafoglio costituito da 100 azioni BMW¹, con periodo di riferimento 2 gennaio 1973, 23 luglio 1996.

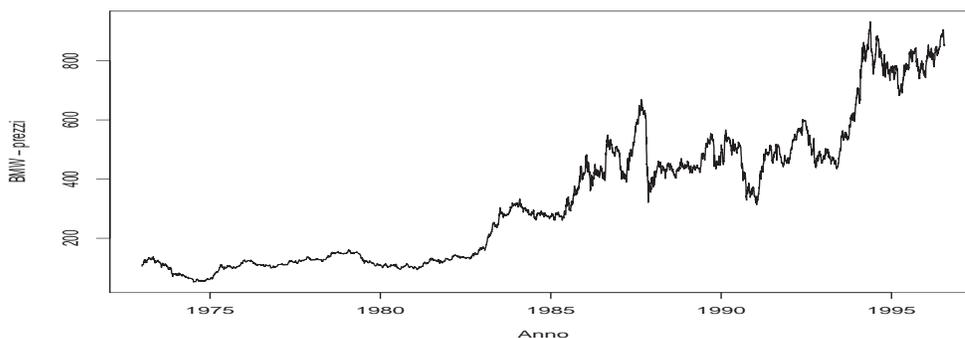


Figura 1: Chiusure giornaliere in euro del titolo BMW dal 2-01-1973 al 23-07-1996.

Dopo un'analisi approfondita dei dati in nostro possesso abbiamo riscontrato la presenza di code più pesanti di una normale e di valori estremi.

¹I dati sono stati forniti dalla Bloomberg l.t. di Londra.

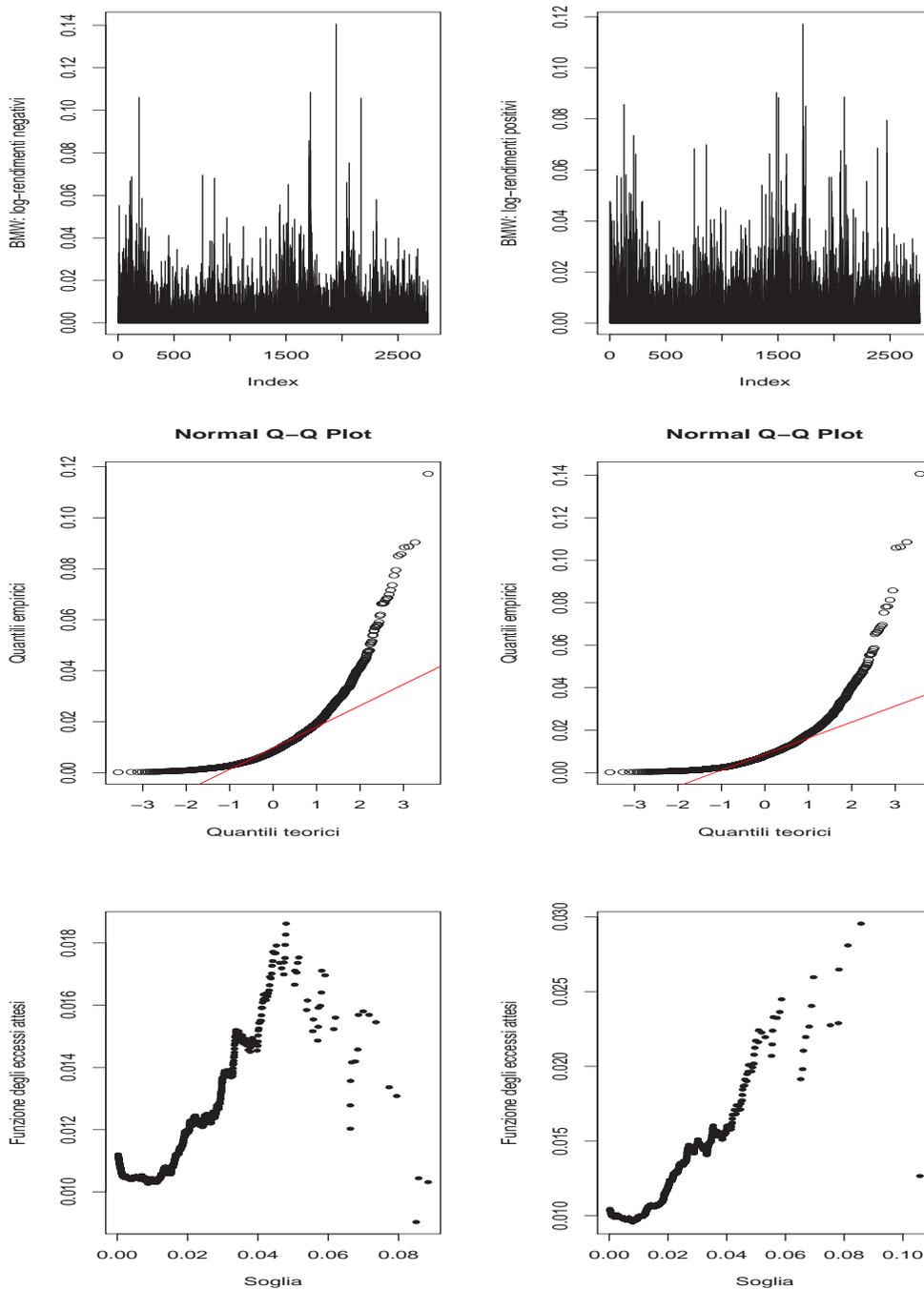


Figura 2: *Analisi completa dei rendimenti giornalieri del titolo BMW dal 2-01-1973 al 23-07-1996, ordinati come segue: a destra i rendimenti positivi, a sinistra quelli negativi (in valore assoluto). Al centro i QQ-plot “contro” una normale. In basso i ME-plot.*

Attraverso il software R è stata implementata una funzione che si basa sullo stimatore di Hill, restituendo in output i valori stimati dell'indice di coda $\xi = 1/\alpha$, della costante C e del p -quantile. Ricordiamo che in questo modello abbiamo assunto che la f.d.d. dei rendimenti appartenga al massimo dominio di una Fréchet, ovvero che la coda sia $\bar{F}(x) = Cx^{-\alpha}$, per $x > u$. La funzione è stata chiamata `hillestimator` e riceve in input i log-rendimenti su cui effettuare le stime, la soglia u rispetto alla quale tagliamo i nostri dati, e la probabilità p per il calcolo del quantile. Per una buona scelta della soglia è stata utilizzata una funzione di R, che ha poi trovato verifica grafica nel ME-plot dei dati. Dal punto di vista grafico, infatti, la scelta di u cade nel valore in cui la funzione degli eccessi attesi inizia a crescere, pur lasciando un numero di eccedenze non troppo elevato. Controllando il grafico di destra della Figura 2 scegliamo come soglia il valore 0.038.

Il comando `hillestimator (datibmw, 0.038, 0.99)` ci ha restituito l'output:

```
$soglia
[1] 0.038
$cost
[1] 3.288705e-07
$eccedenze
[1] 77
$xi
[1] 0.2880412
$alpha
[1] 3.471726
$quantile
[1] 0.05113502
```

Come vediamo in Figura 3, l'andamento del grafico dell'Hill-plot delle stime del quantile $x_{0.99}$ per $k \in (60, 110)$ mantiene un andamento stabile intorno al valore 0.051.

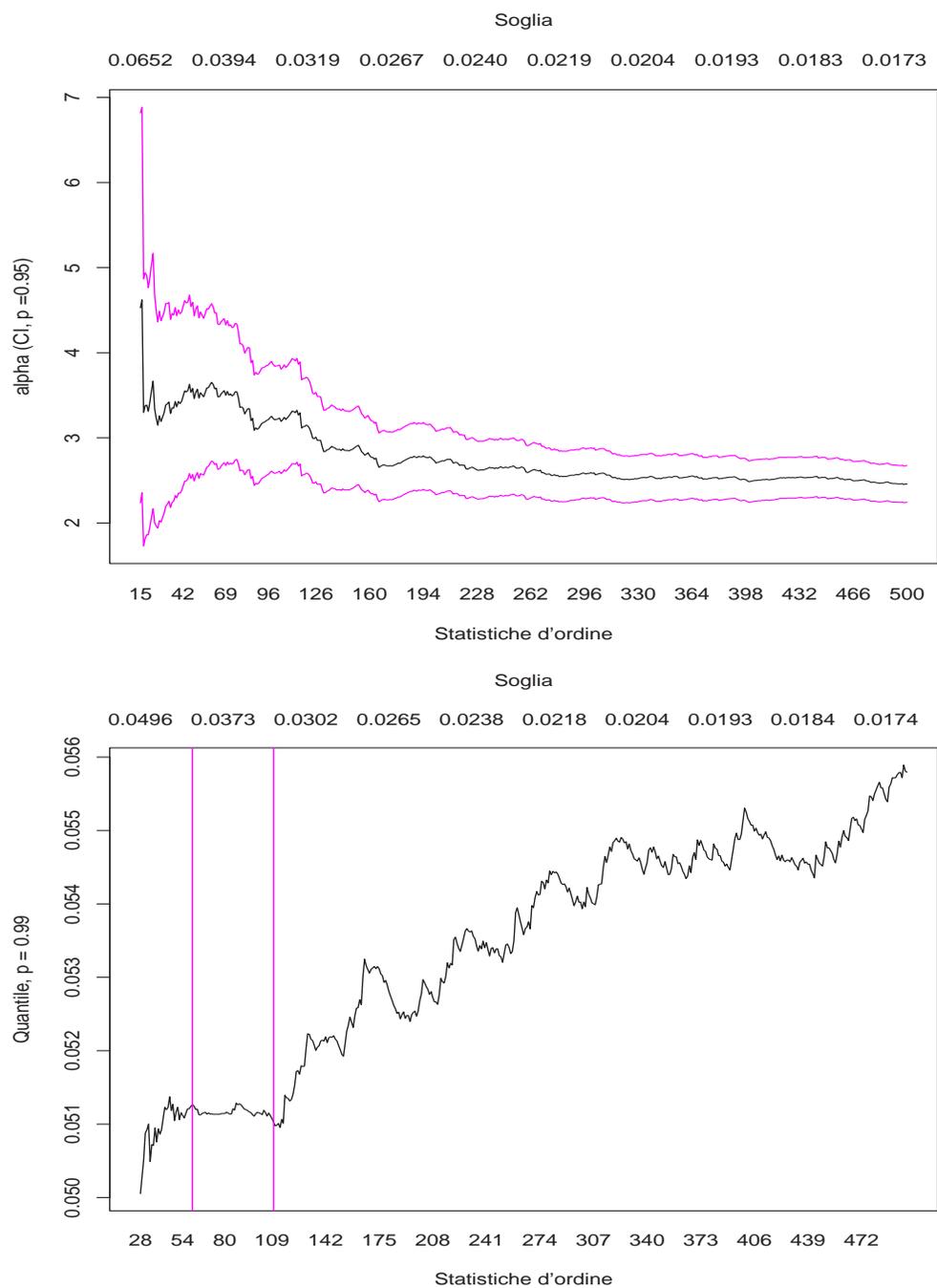


Figura 3: Hill-plot del parametro $\hat{\alpha}$ e del quantile $\hat{x}_{0.99}$. Nel grafico in basso abbiamo evidenziato la regione in cui il valore è abbastanza stabile.

Supponendo ad esempio di avere un portafoglio costituito da 100 titoli BMW e di aver acquistato in data 2 gennaio 1973 ogni singolo titolo per il valore $S_0 = 105$ euro, avremo un valore nominale al tempo $t = 0$ pari a $V_0 = 105 * 100 = 10500$ euro. Una volta eseguite tutte le stime, applichiamo la formula del VaR trovata nel modello Hill (vedi equazione (1)),

$$\text{VaR}_{0.99;\hat{\alpha}} = (0.0511 * 10500) \text{ euro}$$

$$\text{VaR}_{0.99;\hat{\alpha}} = 536.6 \text{ euro}$$

Abbiamo calcolato il Valore a Rischio anche con il modello GPD, assumendo che la coda della distribuzione dei rendimenti si approssimi dopo una certa soglia u con una Pareto generalizzata di parametri $\hat{\xi}$ e $\hat{\beta}$, ovvero gli stimatori di massima verosimiglianza di ξ e β . Le stime sono state ottenute tramite una funzione implementata con il software statistico R, che, come nella `hillestimator` prende in input i dati e la soglia u . In questo caso, in output vengono restituite le stime, il numero di eccedenze, e gli errori di stima.

Per poter confrontare i due modelli è stata scelta la stessa soglia $u = 0.038$, ottenendo con il comando `gpd.fit (datibmw, 0.038)`:

```
$soglia
[1] 0.038
$n.eccedenze
[1] 77
$convc
[1] 0
$nllh
[1] -247.7029
$stima.parametri.xi.beta
[1] 0.25442025 0.01143701
$rate
[1] 0.02780787
$se
[1] 0.002102576 0.151523638
```

I valori così calcolati sono stati inseriti in un'ultima funzione capace di stimare il p -quantile della nostra GPD (“`quant.gpd(u, xi, beta, n, Nu, p)`”). Scelto $p = 0.99$ abbiamo dunque ottenuto

$$\hat{x}_{0.99} = 0.0514$$

e quindi, sfruttando l'equazione (2)

$$\text{VaR}_{0.99; \hat{\xi}, \hat{\beta}} = 0.0514 * 10500 = 539.3 \text{ euro.}$$

Come ultima considerazione abbiamo infine proposto, una tabella comparativa, allo scopo di valutare la coerenza dei risultati delle stime ottenute tramite i modelli Hill e GPD, ma anche per farne risaltare le evidenti distanze dal modello Delta-Normal.

	$p = 0.999$	$p = 0.99$	$p = 0.97$	$p = 0.95$
VaR_{Hill}	1042.2	536.6	391.3	337.7
VaR_{GPD}	1026.9	539.3	389.9	333.5
VaR_{Norm}	478.8	360.4	291.4	254.8

Bibliografia

- [BGT89] N. H. Bingham, C. M. Goldie, and J. L. Teugels. *Regular variation*, volume 27 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [Cha77] John M. Chambers. *Computational methods for data analysis*. John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane, 1977. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.
- [Col01] Stuart Coles. *An introduction to statistical modeling of extreme values*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag London Ltd., London, 2001.
- [DdHR00] Holger Drees, Laurens de Haan, and Sidney Resnick. How to make a Hill plot. *Ann. Statist.*, 28(1):254–274, 2000.
- [DHM88] Paul Deheuvels, Erich Haeusler, and David M. Mason. Almost sure convergence of the Hill estimator. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 104(2):371–381, 1988.
- [DSS98] Francis X. Diebold, Til Schuermann, and John D. Stroughair. Pitfalls and opportunities in the use of extreme value theory in risk management. Technical report, 'The Wharton School' University of Pennsylvania, Financial Institutions Center, March 1998.
- [EKM97] Paul Embrechts, Claudia Klüppelberg, and Thomas Mikosch. *Modelling extremal events*, volume 33 of *Applications of Math-*

- ematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997. For insurance and finance.
- [ER99] Paul Embrechts and Sidney I. Resnick. Extreme value theory as a risk management tool. *North American Actuarial Journal*, 3(2):30–41, April 1999.
- [Fer96] Thomas S. Ferguson. *A course in large sample theory*. Texts in Statistical Science Series. Chapman & Hall, London, 1996.
- [Gal87] Janos Galambos. *The asymptotic theory of extreme order statistics*. Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., Melbourne, FL, second edition, 1987.
- [Hil75] Bruce M. Hill. A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *Ann. Statist.*, 3(5):1163–1174, 1975.
- [Hsi91] Tailen Hsing. On tail index estimation using dependent data. *Ann. Statist.*, 19(3):1547–1569, 1991.
- [Hul02] John C. Hull. *Opzioni Futures e altri derivati*. Prentice Hall, Inc., 2002. Finanza e Mercati.
- [Mas82] David M. Mason. Laws of large numbers for sums of extreme values. *Ann. Probab.*, 10(3):754–764, 1982.
- [MGB74] Alexander M Mood, Franklin A. Graybill, and Duane C. Boes. *Introduction to the Theory of Statistics*. McGraw-Hill, Inc., New York, third edition, 1974.
- [Pet95] Valentin V. Petrov. *Limit theorems of probability theory*, volume 4 of *Oxford Studies in Probability*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995. Sequences of independent random variables, Oxford Science Publications.

-
- [Rei89] R.-D. Reiss. *Approximate distributions of order statistics*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1989. With applications to nonparametric statistics.
- [Res87] Sidney I. Resnick. *Extreme values, regular variation, and point processes*, volume 4 of *Applied Probability. A Series of the Applied Probability Trust*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [RLdH98] Holger Rootzén, M. Ross Leadbetter, and Laurens de Haan. On the distribution of tail array sums for strongly mixing stationary sequences. *Ann. Appl. Probab.*, 8(3):868–885, 1998.
- [RS95] Sidney Resnick and Cătălin Stărică. Consistency of Hill’s estimator for dependent data. *J. Appl. Probab.*, 32(1):139–167, 1995.
- [RS97] Sidney Resnick and Cătălin Stărică. Asymptotic behavior of Hill’s estimator for autoregressive data. *Comm. Statist. Stochastic Models*, 13(4):703–721, 1997. Heavy tails and highly volatile phenomena.
- [Sen76] Eugene Seneta. *Regularly varying functions*. Springer-Verlag, Berlin, 1976. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 508.