SINTESI
della Tesi di Laurea in Matematica
di
Barbara Betti Schiavone

Alcuni risultati sulla connessione geodetica nelle varietá lorentziane

Relatore
Dott.ssa Flavia Antonacci
Luglio 2001

In questa tesi sono stati raccolti recenti risultati riguardanti il problema della connessione geodetica su varietá lorentziane.

Una **varietá lorentziana** é una coppia $(\mathcal{M}, g)$ dove $\mathcal{M}$ é una varietá differenziabile connessa di dimensione finita e g é una metrica lorentziana, cioé un campo tensoriale $(0, 2)$ simmetrico e regolare che induce sullo spazio tangente ad $\mathcal{M}$ in ogni suo punto una forma bilineare simmetrica di indice costante uguale ad 1, cioé :

$$g(p) \, : \, T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \to \mathbb{R}.$$

L'interesse nello studio delle varietá lorentziane é strettamente connesso allo sviluppo della teoria della Relativitá Generale, dal momento che esse costituiscono il **modello matematico dello spazio-tempo relativistico**. Risale ai primi anni del secolo scorso lo sviluppo di tale teoria, avvenuto in seguito ad evidenze fisiche che hanno mostrato come lo spazio, in presenza di materia, non sia affatto di tipo euclideo. Come conseguenza il tempo e lo spazio, per la prima volta, non vengono considerati come indipendenti, ma come entitá strutturalmente collegate; in tal modo si nega il concetto fondamentale della meccanica classica, per il quale lo spazio soddisfa le leggi della geometria euclidea ed il tempo é universale. Nel continuum spazio-temporale della teoria della Relativitá Generale dunque un evento ha una configurazione tetradimensionale non scindibile in due 'sottospazi'.

Nell'ambito delle geometrie semiriemanniane ed in particolare delle geometrie lorentziane le **geodetiche**, come vedremo, giocano un ruolo centrale; per capire intuitivamente cos'é una geodetica occorre fare un passo indietro. Risale infatti al 300 a.C. il seguente postulato di Euclide:

'Si domanda che da qualsiasi punto si possa condurre una retta ad ogni altro punto'.

Il contenuto di questo postulato appare cosí evidente ed intrinseco alla natura dello spazio che per oltre duemila anni nessuno ha pensato di dubitarne. Con la pubblicazione del libro di Lobacevskij nel 1829 é nata ufficialmente la geometria non euclidea; ma anche nella geometria di Lobacevskij si é assunto che per due punti passasse una ed una sola retta. Invece nella piú recente geometria sferica di Riemann (1854) esistono coppie di punti congiungibili da infinite rette. Un po' di chiarezza viene fatta da Beltrami quando, nel 1868, dimostra che le geometrie non euclidee hanno come modello varietá riemanniane immerse in $\mathbb{R}^N$. In tale modello le 'rette' vengono interpretate

come geodetiche.
Una geodetica é una curva regolare γ tale che

$$\nabla_s \dot{\gamma} = 0, \tag{1}$$

con $\dot{\gamma}$ campo vettoriale lungo la curva e ∇_s derivata covariante lungo γ rispetto alla connessione di Levi-Civita associata alla metrica g.
Un vettore v tangente alla varietá $\mathcal{M}$ in un punto p puó essere classificato in base al segno del prodotto scalare

$$g(p)[v, v]. \tag{2}$$

Diremo che v é rispettivamente di tipo tempo, luce, spazio se la quantitá in (2) é rispettivamente negativa, nulla o positiva.
Tale suddivisione, che assume il nome di carattere causale del vettore tangente, ammette una fondamentale interpretazione fisica e determina l'importanza dello studio della connessione geodetica. Infatti per tali particolari curve si ha che al variare di s nell'intervallo di definizione della geodetica γ la quantitá

$$E_z := g(\gamma(s))[\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)] \tag{3}$$

é **costante** e dunque ha senso parlare del carattere causale di una geodetica.
Piú precisamente l'interpretazione fisica che viene data alla tripartizione é la seguente:

Una **geodetica di tipo tempo** rappresenta la traiettoria di un corpo dotato di massa in caduta libera, cioé sotto l'azione della sola forza gravitazionale. Per esempio l'orbita della terra nello spazio é una geodetica di tipo tempo.

Una **geodetica di tipo luce** rappresenta la traiettoria di un corpo con massa a riposo nulla soggetto alla sola azione della forza gravitazionale. Sono di tipo luce per esempio le traiettorie dei fotoni e (forse!) dei neutrini.

Una **geodetica di tipo spazio** ha una interpretazione fisica piú delicata: rappresenta infatti un insieme di eventi che localmente appaiono simultanei ad un osservatore appropriato.

Dal punto di vista matematico il problema della connessione geodetica costituisce un classico argomento di geometria differenziale e di analisi non lineare infatti, anche se apparentemente potrebbe sembrare un problema strettamente geometrico, in veritá strumenti recentemente sviluppati nell'ambito

della teoria dei punti critici su varietá infinito dimensionali permettono di ottenere risultati molto interessanti. Lo scopo di questa tesi é stato quello di studiarne alcuni abbastanza recenti. Il punto di partenza é stata una **formulazione variazionale** del problema della connessione geodetica in varietá semiriemanniane.
Se $(\mathcal{M}, g)$ é una varietá semiriemanniana e se p e q sono due eventi in $\mathcal{M}$, allora la (1) rappresenta l'equazione di Eulero-Lagrange dell'integrale azione:

$$f(\gamma) := \frac{1}{2}\int_0^1 g(\gamma(s))[\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)] \tag{4}$$

definito su una varietá infinito dimensionale di curve sufficientemente regolari $\gamma : [0,1] \to \mathcal{M}$ con $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Pertanto le geodetiche che congiungono p e q in $\mathcal{M}$ sono i punti critici del funzionale f.

Nel caso delle varietá di Riemann il problema dell'esistenza di una geodetica che congiunge due punti qualunque della varietá ammette una soluzione globale che si ottiene come conseguenza di un importante risultato, noto come Teorema di Hopf-Rinow. Questo Teorema garantisce la connessione geodetica in ogni varietá riemanniana finito dimensionale, connessa e completa.
Naturalmente si puó sperare di estendere il teorema di Hopf-Rinow al caso lorentziano, tuttavia tale prevedibile congettura risulta essere falsa. Esistono infatti numerosi esempi di varietá di Lorentz geodeticamente complete (nelle quali cioé ogni geodetica massimale é definita sull'intero asse reale) ma non geodeticamente connesse. Uno di questi é rappresentato dalla varietá Anti-De Sitter (cfr. l'esempio **??**) dove $\mathcal{M} := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$ é la metrica é data da

$$ds^2 := \frac{dx^2 - dt^2}{\cos^2 x}.$$

Il problema della connessione geodetica nelle varietá lorentziane é molto piú complesso rispetto allo stesso problema nelle varietá riemanniane. Da un punto di vista tecnico questa complessitá si traduce nel fatto che il funzionale azione f definito in (4) non é limitato né superiormente né inferiormente a causa della indefinitezza della struttura lorentziana.
A partire dagli inizi degli anni $'90$ numerosi contributi allo studio di questo problema sono stati portati utilizzando tecniche tipiche della Teoria dei Punti Critici. Gran parte di questi risultati riguardano il caso in cui

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}_0 \times \mathbb{R}, \tag{5}$$

dove $\mathcal{M}_0$ é una varietá di Riemann dotata della metrica g_0, ed inoltre richiedono (**caso stazionario standard**) che:

$$g(z)[\zeta,\zeta] := g_0(x)[\xi,\xi] + 2g_0(x)[\delta(x),\xi]\tau - \beta(x)\tau^2 \tag{6}$$

oppure (**caso splitting**) che:

$$g(z)[\zeta,\zeta] := g_0(x)[\alpha(z)\xi,\xi] - \beta(z)\tau^2 \tag{7}$$

dove

$$z = (x,t) \in \mathcal{M} \qquad e \quad \zeta = (\xi,\tau) \in T_z\mathcal{M}.$$

Di recente lo stesso tipo di tecniche é stato applicato in un contesto pienamente **intrinseco** al caso in cui la varietá lorentziana $\mathcal{M}$ é stazionaria. Questo significa che esiste un campo di vettori Y su $\mathcal{M}$ tali che:

$$g(z)[Y(z),Y(z)] < 0 \quad \forall\, z \in \mathcal{M}.$$

Nel caso stazionario standard si sceglie $Y = \frac{\partial}{\partial t}$.

In questa tesi sono raccolti risultati relativi all'**esistenza** di geodetiche che congiungono due punti qualunque in una varietá lorentziana della forma

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}_0 \times \mathbb{R}$$

sia nel caso splitting, per il quale presentiamo due risultati che si devono rispettivamente a V. Benci, D. Fortunato e A. Masiello ed a F. Antonacci e R. Sampalmieri, sia nel caso stazionario, per il quale si dimostrano due risultati. Uno relativo alla connessione geodetica su varietá lorentziane stazionarie di tipo standard, l'altro che si ottiene seguendo l'approccio intrinseco sviluppato da F.Giannoni e P.Piccione nel 1999.

La tesi é divisa in tre capitoli. Il primo raccoglie alcuni prerequisiti, tutti ben noti in letteratura.
Il secondo si occupa delle varietá lorentziane di tipo splitting: presentiamo un teorema di connessione geodetica ed una sua variante, che si ottiene alleggerendo le ipotesi sul comportamento asintotico dei coefficienti della metrica. In particolare si dimostra che la varietá lorentziana $(\mathcal{M}, g)$, con $\mathcal{M}$ e g come in (5) e (7), é geodeticamente connessa se sono soddisfatte le seguenti condizioni:
(i) $(\mathcal{M}_0, g)$ é una varietá riemanniana completa;

(ii) $< \alpha(x,t)\xi, \xi > \geq c_1$;

(iii) $c_2 \leq \beta(x,t) \leq c_3$;

(iv) α_t e β_t sono limitate;

(v) $\limsup_{t\to+\infty} < \alpha_t(x,t)\xi, \xi > \leq 0$ e $\liminf_{t\to-\infty} < \alpha_t(x,t)\xi, \xi > \geq 0$;

con c_1, c_2 e c_3 opportune costanti positive.
Viene dimostrata inoltre una variante di questo risultato.
La dimostrazione di entrambi i teoremi segue grosso modo lo stesso schema che consiste nell'applicazione del Teorema del Punto di Sella di Rabinowitz. A tal fine introduciamo un'approssimazione di Galerkin della 'componente temporale' dello spazio. Inoltre ricorriamo ad un funzionale perturbato che ha il pregio di verificare la condizione di (PS). Infine attraverso stime a priori sui punti critici di questo opportuno funzionale risaliamo ai punti critici per il funzionale iniziale f.
Il terzo capitolo é dedicato al problema della connessione geodetica nelle varietá lorentziane stazionarie standard e non. Nel caso stazionario standard, dove cioé $\mathcal{M}$ e g sono definite come in (5) e (6), si dimostra che $(\mathcal{M}, g)$ é geodeticamente connessa se:
(i) $\mathcal{M}_0$ é una varietá di Riemann completa;

(ii) $\sup\{\langle\delta(x), \delta(x)\rangle \;\; x \in \mathcal{M}_0\} < +\infty$;

(iii) $c_1 \leq \beta(x) \leq c_2$;

con c_1 e c_2 opportune costanti positive.

La dimostrazione si basa su un principio variazionale che riconduce la ricerca di punti critici per il funzionale azione f alla ricerca di punti critici per un opportuno funzionale J di tipo 'riemanniano'.
Infine il problema della connessione geodetica per le varietá lorentziane stazionarie (dotate cioé di un campo vettoriale continuo Y di tipo tempo e Killing) viene affrontato mediante un approccio intrinseco, senza far ricorso all'espressione esplicita della varietá né della metrica. La dimostrazione in questo caso si basa su una legge di conservazione per la quale se z é una geodetica allora la quantitá

$$\langle \dot{z}, Y(z) \rangle_L$$

é costante. Questo ci permette di cercare le geodetiche in uno spazio funzionale, $\mathcal{N}$, che ha la proprietá di essere c-precompatto. A partire da questa ipotesi di completezza si dimostra, mediante un principio variazionale, la connessione geodetica.