

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE  
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

# Studio di un particolare reticolo di mappe accoppiate

Sintesi della tesi di Laurea in Matematica  
di Luisa Bruno

Relatore: Prof. Alessandro Pellegrinotti

Lo studio dei sistemi dinamici è uno dei campi di maggior successo della ricerca matematica negli ultimi vent'anni. Da pochi anni è stata introdotta una nuova classe di sistemi dinamici a tempo e spazio discreti, tali sistemi sono stati chiamati Reticoli di Mappe Accoppiate la cui sigla in inglese è CML (Coupled Map Lattices).

Le CML descrivono l'evoluzione di un numero finito, o infinito, di punti di un sistema dinamico, a dimensione finita, che interagiscono tra di loro e che si trovano nei siti di un qualche reticolo in uno spazio fisico.

È di notevole importanza il fatto che per una vasta classe di insiemi di mappe accoppiate si è riusciti a dimostrare, ad opera di Bunimovich - Sinai[BS], che esse presentano il fenomeno del caos spaziotemporale se le singole mappe sono caotiche; naturalmente, il fenomeno del caos spaziotemporale si ha per piccoli valori dell'accoppiamento spaziale, cioè nella situazione in cui le diverse mappe sono debolmente dipendenti.

Le motivazioni che ci inducono allo studio delle CML sono molteplici : da una parte c'è l'esigenza di semplificare il più possibile modelli di evoluzione reali, dall'altra c'è un'interessante analogia con modelli fisici di spin su reticolo. Sembra esistere una corrispondenza tra sistemi di spin su reticolo e le CML; per la precisione l'analogo di una CML di dimensione  $d$  è un reticolo

di spin in dimensione  $d + 1$ .

Nella presente tesi si studia il comportamento di un particolare reticolo di mappe accoppiate unidimensionale mediante simulazione numerica.

Il nostro principale interesse è stato quello di studiare, per determinati valori del parametro di accoppiamento  $\varepsilon$ , la disposizione dei segni delle variabili relative ai punti del reticolo. Si è osservato che per particolari valori del parametro di accoppiamento il sistema manifesta un comportamento piuttosto anomalo in relazione ai segni delle variabili relative ai vari siti. Siamo riusciti a definire, con una certa precisione, un intervallo di valori del parametro di accoppiamento  $\varepsilon$ , per il quale la disposizione dei segni dei siti all'interno del reticolo è sempre del tipo '+ - + - + -'.

Parallelamente a questo studio ci siamo occupati di capire la natura di una misura, legata alla particolare CML, che manifesta cambiamenti strutturali al variare del parametro di accoppiamento  $\varepsilon$ .

Il lavoro è stato ripartito in quattro capitoli. Il primo capitolo contiene tutte le definizioni necessarie per una migliore comprensione del problema. Nel secondo capitolo si definiscono i reticoli di mappe accoppiate, si esaminano alcune loro proprietà e viene presentata la particolare mappa che si è presa in considerazione. Nel terzo capitolo viene affrontato nel dettaglio il problema relativo allo studio dei segni. Nel quarto capitolo invece si affronta il problema relativo alla misura per la CML. In questi ultimi due capitoli della tesi, sono inoltre riportati i listati dei programmi utilizzati nelle simulazioni al computer con relative spiegazioni assieme a tabelle e grafici dei risultati ottenuti.

## 1. Sistemi dinamici

Un sistema dinamico è un modello matematico che descrive sistemi in evoluzione. Prendiamo un qualsiasi numero reale  $x$  ed una generica funzione  $g$ , applichiamo la funzione  $g$  al numero reale  $x$  ed otteniamo  $g(x)$ .

Ripetiamo questo procedimento in maniera iterativa ed otteniamo la successione  $x, g(x), g(g(x)), \dots$ . Questo tipo di successioni sono esempi di sistemi dinamici. L'analisi e lo studio dei sistemi dinamici ci impongono una definizione precisa.

**Definizione 1.** Preso  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  spazio di misura e  $\mathcal{F}$  flusso o semiflusso si definisce **sistema dinamico** la quaterna  $(X, \mathcal{M}, \mu, \mathcal{F})$ .

Un **sistema dinamico a tempo continuo** è un sistema dinamico dove  $\mathcal{F}$  è del tipo  $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  mentre in un **sistema dinamico a tempo discreto**  $\mathcal{F}$  è del tipo:

- $\{T_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  se  $T_n$  è un flusso
- $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  se  $T_n$  è un semiflusso.

Descriviamo ora alcune interessanti proprietà dei sistemi dinamici.

**Definizione 2.** Consideriamo  $(X, \mathcal{M}, \mu, \mathcal{F})$  un sistema dinamico e  $f$  una funzione su  $X$ , definiamo la **media temporale** di  $f$  come :

- nel caso discreto, con  $x \in X, n \in \mathbb{N}$

$$f^*(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n(x))$$

- nel caso continuo, con  $x \in X, r \in \mathbb{R}$

$$f^*(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \int_0^M f(T^r(x)) dr .$$

Definite queste quantità possiamo enunciare un importante teorema di ergodicità puntuale :

**Teorema 1. Birkhoff - Khinchin**

Siano  $(X, \mathcal{M}, \mu, \mathcal{F})$  un sistema dinamico e una funzione  $f \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ , allora valgono le seguenti proprietà :

1.  $f^*$  esiste quasi ovunque, cioè esiste dappertutto tranne in al più un insieme di misura nulla
2.  $f^*$  è sommabile ed invariante quasi ovunque per ogni  $r$ , cioè

$$f^* \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu) \quad e \quad f^*(T^r(x)) = f^*(x)$$

3.

$$\int_X f^*(x)d\mu = \int_X f(x)d\mu = \bar{f} .$$

**Definizione 3.** Sia  $(X, \mathcal{M}, \mu, \mathcal{F})$  un sistema dinamico e  $f$  una funzione su  $X$ , definiamo la **media spaziale** di  $f$  come :

$$\bar{f} = \int_X f(x)d\mu .$$

**Definizione 4.** Un sistema dinamico  $(X, \mathcal{M}, \mu, \mathcal{F})$  è **ergodico** se per ogni funzione  $f \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$  si ha che la media temporale è, quasi ovunque, uguale alla media spaziale, ossia :

$$f^*(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n(x)) = \int_X f(x)d\mu = \bar{f} \quad q.o$$

Un altro concetto fondamentale dei sistemi dinamici è il mescolamento.

**Definizione 5.** Un sistema dinamico  $(X, \mathcal{M}, \mu, \mathcal{F})$  è **mescolante** se prese due funzioni  $f, g \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$  si ha che :

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \int_X f(T^n(x))g(x)d\mu = \int_X f(x)d\mu \int_X g(x)d\mu \quad (1)$$

Analizziamo i diversi tipi di caos che si possono osservare nei sistemi dinamici.

**Definizione 6.** Preso un sistema dinamico  $(X, \mathcal{M}, \mu, \mathcal{F})$  esso presenta **caos temporale** se per ogni coppia di funzioni  $f, g \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$  limitate si ha che :

$$\int_{\mathcal{M}} f(T^t(x))g(x)d\mu \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}} f(x)d\mu \int_{\mathcal{M}} g(x)d\mu \quad (2)$$

**Definizione 7.** Il sistema dinamico  $(X, \mathcal{M}, \mu, \mathcal{S}_x^1)$  ha **caos spaziale** se per ogni coppia di funzioni  $f, g \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$  e limitate vale :

$$\int_X f(S_x u)g(u)d\mu \xrightarrow{\|x\| \rightarrow \infty} \int_X f(u)d\mu \int_X g(u)d\mu \quad (3)$$

Consideriamo infine quei sistemi dinamici che presentano, nello spazio delle fasi, sia dinamica temporale che traslazione spaziale.

---

<sup>1</sup> $\mathcal{S}_x = \{S_x\}_{x \in \mathbb{R}}$  gruppo delle traslazioni spaziali

**Definizione 8.** *Il sistema dinamico  $(X, \mathcal{M}, \mu, \mathcal{R}_z^2)$  ha caos spazio-temporale se per ogni coppia di funzioni  $f, g \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$  limitate vale:*

$$\int_X f(R_z u) g(u) d\mu \xrightarrow{\|z\| \rightarrow \infty} \int_X f(u) d\mu \int_X g(u) d\mu \quad (4)$$

## 2. Reticoli di mappe accoppiate

Una classe di sistemi dinamici spazialmente estesi particolarmente importante è costituita da reticoli sui quali è definita una dinamica. Consideriamo il caso in cui i vari siti di questi reticoli interagiscono tra di loro. Sia  $M$  una varietà di Riemann di dimensione  $d$ , regolare e compatta e sia  $f : M \rightarrow M$  una funzione definita su  $M$ .

**Definizione 9.** *Un attrattore per la funzione  $f$  è un sottoinsieme  $\Lambda$  di  $M$ ,  $\Lambda \subset M$  per il quale esiste un intorno  $U \subset M$  tale che :*

- $\overline{f(U)} \subset U$
- $\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^n(U)$
- $\Lambda$  è invariante rispetto a  $f$ .

Consideriamo una quantità numerabile di copie degli insiemi  $M$ ,  $U$ ,  $\Lambda$  e dell'applicazione  $f$ , poniamo allora :

$$M_i \equiv M, \quad V_i \equiv V, \quad \Lambda_i \equiv \Lambda, \quad f_i \equiv f \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

e consideriamo :

$$\mathcal{M} = \bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} M_i, \quad \mathcal{V} = \bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} V_i, \quad \Lambda_{\mathcal{F}} = \bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} \Lambda_i, \quad \mathcal{F} = \bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} f_i.$$

**Definizione 10.** *Una trasformazione  $\mathcal{G} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$  è detta **interazione** se si può scrivere nel seguente modo :*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x) &= \mathcal{G}(\dots, x_{-k}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \\ &= (\dots, \mathcal{G}_{-k}(x), \dots, \mathcal{G}_{-1}(x), \mathcal{G}_0(x), \mathcal{G}_1(x), \dots, \mathcal{G}_n(x), \dots). \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup> $\mathcal{R}_z = \{R_z\}_{x \in \mathbb{R}^{n+1}}$  il gruppo di spostamenti spazio-temporali che agiscono nello spazio delle fasi  $\mathcal{M}$ , dove  $\mathcal{R}_z = T^t S_x$  e  $z = (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$

**Definizione 11.** *Un reticolo di mappe accoppiate, CML, è un sistema dinamico su  $\mathcal{M}$  generato dalla trasformazione  $\Phi = \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ .*

Riportiamo il primo risultato rigoroso riguardante i sistemi di mappe accoppiate, dovuto a Bunimovich - Sinai[BS]. Consideriamo uno spazio delle fasi  $M$  costituito da sequenze bilatere  $\{x_i\}$ , dove  $i \in \mathbb{Z}$  e  $x_i \in [0, 1]$ . Tale spazio ammette la naturale topologia del prodotto diretto di segmenti indotta dalla  $\sigma$ -algebra di Borel  $\beta$ . Consideriamo una funzione  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che :

1.  $f(0) = 0, f(1) = r$ , dove  $r \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$
2.  $f \in C^{1+\gamma}([0, 1])$ , per qualche  $\gamma > 0$  e  $\min_{x \in [0, 1]} f' \geq \lambda > 1$ .

Osserviamo che  $f$  ha un'unica misura invariante, che è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue ed è tale che la sua densità è continua e strettamente positiva. Per definire le interazioni spaziali dobbiamo introdurre una funzione  $\alpha$  sull'intervallo  $[0, 1]$  tale che :

1.  $\alpha(y) = \varepsilon$ , per  $\delta \leq y \leq 1 - \delta$ ,  $\varepsilon \geq 0$ ,  $\delta \leq 1$  e  $\alpha(0) = \alpha(1) = 0$
2.  $\alpha'(y) \geq 0$ , per  $0 \leq y \leq \delta$  e  $\alpha'(y) \leq 0$ , per  $1 - \delta \leq y \leq 1$
3.  $\alpha \in C^2([0, 1])$ .

**Definizione 12.** *Una interazione spaziale si definisce come :*

$$(\mathcal{G}x)_i = (1 - \alpha(x_i))x_i + \frac{\alpha(x_i)}{2}(x_{i-1} + x_{i+1}).$$

Nel modello usato nei nostri calcoli e in molti altri esperimenti al computer  $\alpha(x)$  è esattamente uguale a  $\varepsilon$  e  $\delta = 0$ .

Consideriamo infine la dinamica generata dalla trasformazione  $\Phi = \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$

$$(\Phi x)_i = (1 - \alpha(f(x_i)))f(x_i) + \frac{\alpha(f(x_i))}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_{i+1})).$$

Si dimostra che vale il seguente teorema :

**Teorema 2. Bunimovich - Sinai[BS]**

*Per  $\varepsilon$  ed  $\alpha^{(1)} = \max_{y \in [0, 1]} |\alpha'(y)|$  sufficientemente piccoli, esiste una misura  $\mu$  definita sullo spazio misurabile  $(M, \beta)$  tale che :*

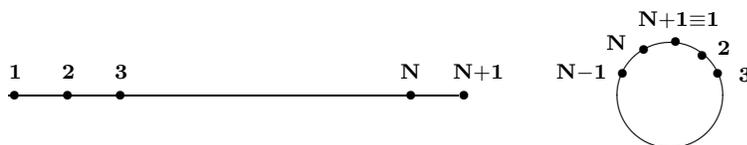
1.  $\mu$  è invariante rispetto a  $\Phi$  e ad  $S$
2. per ogni scelta di  $m, n \in \mathbb{Z}$  con  $m \leq n$ , la misura  $\mu_{m,n}$  indotta da  $\mu$  su  $M_{m,n}$  è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue
3. il sistema dinamico  $(M, \beta, \mu, (\Phi, S))$  è mescolante, quindi presenta caos spaziotemporale.

Questo risultato ammette la seguente evidente interpretazione. Se  $\mathcal{G} = Id$ , oppure  $\varepsilon = 0$ , allora non è presente alcuna interazione.

In questo caso quindi il sistema dinamico manifesta caos spaziotemporale, infatti tutte le correlazioni sono identicamente nulle ad ogni istante di tempo. In più il teorema afferma che tale caos spaziotemporale viene preservato anche quando la CML viene sottoposta all'azione di piccole perturbazioni.

Lo studio dell'evoluzione di un reticolo di mappe accoppiate per tempi lunghi ci impone l'uso di tecniche di simulazione al computer.

Si deve considerare un reticolo unidimensionale di  $N$  siti, su ciascuno dei quali agisce la stessa funzione  $f$ , tra questi punti stabiliamo un accoppiamento che dipende da un parametro  $\varepsilon$ . Gli  $N$  siti si possono immaginare disposti su di una retta, o meglio su di un cerchio visto che devono soddisfare la condizione di periodicità al bordo, il sito  $N + 1$  deve essere identificato con il primo sito.



**Figura 2.1** Rappresentazione grafica del reticolo di  $N$  siti

Ad ogni sito è associata una variabile che assume valori nell'intervallo  $[-1, 1] \in \mathbb{R}$  e che si evolve nel tempo, assunto come discreto.

Al generico tempo  $t$  la situazione dell'intero reticolo sarà rappresentata quindi dal vettore :

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$$

e d'ora in poi indicheremo con  $x_i(t)$  la variabile relativa al  $i$ -esimo sito al tempo  $t$ . Applichiamo ad ognuna delle  $n$  variabili una particolare mappa  $f$ , che verrà descritta di seguito esplicitamente, e studiamone l'evoluzione del sistema. In più si deve considerare un accoppiamento tra i punti del reticolo, nel nostro caso l'accoppiamento sarà di tipo locale in quanto il sito  $i$ -esimo sentirà l'influenza solo dei suoi primi vicini, cioè del sito  $i - 1$ -esimo e del sito  $i + 1$ -esimo. La funzione che descrive questo accoppiamento è :

$$(\mathcal{G}x)_i = (1 - \varepsilon)x_i + \frac{\varepsilon}{2}(x_{i-1} + x_{i+1})$$

$\varepsilon$  è detto **parametro di accoppiamento** e varia nell'intervallo  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ . Possiamo quindi formulare l'espressione completa della CML :

$$(\Phi x)_i = \mathcal{G} \circ f(x_i) = (1 - \varepsilon)f(x_i) + \frac{\varepsilon}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_{i+1})).$$

Notiamo che per  $\varepsilon = 0$  i punti del reticolo evolvono in maniera indipendente l'uno dall'altro, quindi siamo in assenza di accoppiamento.

Il tipo di comportamento che dobbiamo riscontrare in questi reticoli unidimensionali è il cosiddetto passaggio dal caos all'ordine.

Perciò il primo passo ai fini della risoluzione del problema è la scelta di una particolare mappa. Per avere un'analogia con il modello di Ising abbiamo considerato la mappa nell'intervallo  $[-1, 1]$ . La mappa di evoluzione del sistema, da noi scelta, è una funzione  $f : I \rightarrow I$ , dove  $I$  è l'intervallo chiuso  $[-1, 1] \in \mathbb{R}$ , tale che  $f$  è continua,  $f$  è dispari, cioè  $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in I$  ed  $f$  è lineare a tratti, cioè esiste una partizione dell'intervallo  $I$ ,  $[x_0, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$ , ...,  $[x_{n-1}, x_n]$  con  $n \in \mathbb{N}$ , tale che la restrizione di  $f$  ad ognuno degli intervalli della partizione risulti lineare. Visto che la funzione da noi presa in esame è una funzione dispari, basta descriverla per  $x \leq 0$  o per  $x \geq 0$ . Per  $x \leq 0$ , tale mappa è rappresentata dalla seguente equazione cartesiana :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{-a_1 + \frac{1}{2}} & \text{se } -\frac{1}{2} + a_2 \leq x \leq 0 \\ -\frac{h}{a_2}x + h(1 - \frac{1}{2a_2}) - 1 & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2} + a_2 \\ \frac{h}{a_1}x + h(1 + \frac{1}{2a_1}) - 1 & \text{se } -\frac{1}{2} - a_1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ \frac{b+1}{a_1 - \frac{1}{2}}x + (b+1)(\frac{\frac{1}{2} + a_1}{-\frac{1}{2} + a_1}) - 1 & \text{se } -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} - a_1 \end{cases}$$

dove ai parametri sono stati dati i seguenti valori :

$a_1 = a_2 = 0.3$ ,  $h = 0.8$ ,  $b = 0.1$ . Il grafico della funzione è, per  $x \in [-1, 1]$  :

**Figura 2.2** Grafico della funzione evoluzione

### 3. Studio dei cambiamenti di segno

Lo scopo di questa simulazione è l'individuazione dell'intervallo dei valori di  $\varepsilon$  per cui si ha una struttura del tipo '+ - + - + -'.

Si sono eseguiti diversi esperimenti per riuscire ad individuare con precisione il valore di  $\varepsilon$  al quale si verifica la transizione, passaggio da una situazione disordinata ad una situazione di segni alterni per l'intero reticolo.

Per accertarsi che la struttura sia esattamente di questo tipo abbiamo ideato un programma in grado di far evolvere il sistema analizzandone la configurazione finale. Questo programma calcola una quantità molto interessante ed utile al fine di capire l'orientamento, positivo o negativo, dei vari siti del reticolo variando il numero di siti, il parametro di accoppiamento, il tempo di evoluzione ed il numero delle prove.

La quantità presa in considerazione è :

$$Cambi(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{sgn}(x_i(t) \cdot x_{i+1}(t)).$$

Vengono studiati in questo modo i cambiamenti di segno dei siti del reticolo.

Riportiamo in un'unica tabella, per gli stessi valori del parametro di accop-

piamento, i vari cambiamenti di segni rispettivamente per ogni reticolo di 400, 600, 800 e 1000 siti.

$eps$	N=400	N=600	N=800	N=1000
0.0184	-1	-1	-0.997	-0.997
0.0185	-1	-1	-1	-1
0.0189	-1	-1	-1	-1
0.019	-1	-1	-1	-1
0.0195	-1	-1	-1	-1
0.02	-1	-1	-1	-1

**Tabella 3.1** Risultati delle simulazioni relative a reticoli di 400, 600, 800 e 1000 siti.

Riportiamo in un grafico i valori del parametro di accoppiamento ed i rispettivi cambiamenti di segno per tutti i reticoli esaminati.

**Grafico 3.1** Grafico degli  $eps$  e dei rispettivi cambiamenti di segno per i reticoli di 400, 600, 800 e di 1000 siti

Sull'asse delle  $x$  abbiamo riportato i valori di  $\varepsilon$  e sull'asse delle  $y$  i relativi cambiamenti di segno.

Possiamo concludere questa sperimentazione asserendo che l'intervallo dei valori del parametro di accoppiamento per cui si ha una struttura del tipo '+ - + - + -' cambia lievemente a seconda del numero dei siti, nel seguente modo :

- per un reticolo di 400 siti l'intervallo è [0.0184, 0.02]
- per un reticolo di 600 siti l'intervallo è [0.0184, 0.02]
- per un reticolo di 800 siti l'intervallo è [0.0185, 0.02]
- per un reticolo di 1000 siti l'intervallo è [0.0185, 0.02].

#### 4. Misura stazionaria su CML

Supponiamo che il sistema, costituito da un reticolo di  $N$  siti, si evolva a partire da una qualche condizione iniziale. Fotografiamo l'evoluzione ad intervalli di tempo discreti e guardiamo il valore di ognuna delle variabili all'interno di  $[-1, 1]$ .

Consideriamo la funzione  $\mu : ([-1, 1], \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$  che assegna ad ogni boreliano  $\mathcal{B} \in \beta^3$  la frequenza con cui viene visitato, durante un tempo di evoluzione  $t$ , dalle  $N$  variabili relative ai siti del reticolo.

In formula al tempo  $t$  si ha :

$$\mu(\mathcal{B}) = \frac{\text{numero visite in } \mathcal{B}}{N \cdot t}.$$

Per simulare numericamente tale funzione abbiamo agito nel seguente modo. Abbiamo suddiviso l'intervallo  $[-1, 1]$  in  $D$  parti uguali (nella nostra simulazione  $D=6000$ ), ottenendone una partizione :

$$[x_0 = -1, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{D-1}, x_D = 1].$$

Ogni cella  $[x_{k-1}, x_k]$  ha ampiezza, cioè misura di Lebesgue, pari a  $\frac{1}{D}$ .

Abbiamo poi calcolato il numero di occupazioni in ogni cella della suddivisione. Indichiamo allora con :

---

<sup>3</sup>con  $\beta$  indichiamo qui la  $\sigma$ -algebra di Borel su  $[-1, 1]$

- $m_k(N, D, t)$  = numero di visite nel tempo  $t$  della  $k$ -esima cella relativa alla suddivisione in  $D$  parti, con  $k = 1, 2, \dots, D$ .

Dopo un tempo di evoluzione  $t$ , avremo :

$$\mu([x_{k-1}, x_k]) = \frac{m_k(N, D, t)}{N \cdot t} \quad k = 1, 2, \dots, D.$$

In generale per ogni  $\mathcal{B} \in \beta$ , se la partizione è abbastanza fine, avremo :

$$\mu(\mathcal{B}) = \lim_{D \rightarrow \infty} \sum_{[x_{k-1}, x_k] \subset \mathcal{B}} \frac{m_k(N, D, t)}{N \cdot t} \quad k = 1, 2, \dots, D.$$

Consideriamo ora la densità di misura :

$$d_k(N, D, t) = \frac{m_k(N, D, t) \cdot D}{N \cdot t} \quad k = 1, 2, \dots, D.$$

Da un precedente lavoro è emerso il sospetto che esista un valore particolare di  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon = 10^{-9}$ , per il quale accade che :

- per  $0 \leq \varepsilon \leq 10^{-9}$  la densità della misura risulta non essere regolare
- per  $\varepsilon > 10^{-9}$  la densità si regolarizza

dove  $m$  è la misura di Lebesgue su  $[-1, 1]$ .

Sia  $\varepsilon > 10^{-9}$ . Quello che la simulazione numerica dovrebbe mostrare è che :

$$\mu(E) = \int_E f(x) dx = \int_E (D\mu)(x) dx \quad \forall E \subset \beta$$

con  $f$  funzione non negativa ed integrabile. Consideriamo la derivata simmetrica :

$$(D_{\text{simm}}\mu) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{m(B(x, r))}$$

dove  $B(x, r)$  è il disco o meglio l'intervallo contenuto in  $[-1, 1]$  centrato in  $x$  e di ampiezza  $2r$ . Noi abbiamo considerato :  $B(x, r) = [x_{k-1}, x_k]$  dove  $x = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$  e  $r = \frac{x_k - x_{k-1}}{2} = \frac{1}{2D}$ .

Quello che dovremmo poter vedere nel lavoro di simulazione è quindi che il limite :

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \frac{\mu([x_{k-1}, x_k])}{\frac{1}{D}} = \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{m_k(N, D, t) \cdot D}{N \cdot t} = \lim_{D \rightarrow \infty} d_k(N, D, t)$$

dove  $k = 1, 2, \dots, D$ , esiste ed è una funzione  $L^1$ .

Per poter simulare numericamente il comportamento al limite sopra citato, dovremmo considerare valori di  $D$  molto grandi, ma il procedimento risulta essere molto costoso, in termini di tempo, già per  $D = 6000$ .

I risultati della simulazione sono stati comunque incoraggianti e possiamo dire con una certa sicurezza che il limite che stavamo cercando esiste, che è una funzione non negativa, integrabile ed in alcuni casi anche continua. Proponiamo ora alcuni dei risultati della simulazione per i valori di  $\varepsilon$  più significativi. Prendiamo  $\varepsilon = 0$ . Quando  $\varepsilon$  è nullo, il sistema si comporta come  $N$  oscillatori indipendenti, infatti non essendoci accoppiamento, il comportamento di ogni sito è indipendente da quello degli altri  $N-1$ .

Le celle visitate vengono occupate ognuna un numero di volte differente. Nel grafico, infatti i valori oscillano fortemente, nel senso che c'è una grande differenza nei numeri di occupazione di celle contigue.

**Grafico 4.5.1** Grafico della densità per  $\varepsilon = 0$ . Parametri dell'evoluzione  $N = 500$ ,  $T = 1.800.000$  e numero di prove 10.

Per  $\varepsilon = 10^{-6}$  non ci sono più salti tra celle adiacenti della partizione, nel senso che esse vengono occupate dal sistema pressochè lo stesso numero di volte, fatta eccezione per quegli intervallini che si trovano a cavallo dei punti di discontinuità della funzione densità. Essa infatti è in questo caso una funzione discontinua, costante a tratti nell'intervallo  $[-1, 1]$ .

**Grafico 4.5.6** Grafico della densità per  $\varepsilon = 10^{-6}$  . Parametri dell'evoluzione  $N = 500$ ,  $T = 1.800.000$  e numero di prove 10.

Per  $\varepsilon = 0.1$  la funzione densità si è regolarizzata, è diventata una funzione continua.

Chiaramente quando si dice che la funzione densità è continua si intende sempre al limite per  $D \rightarrow \infty$  cioè quando la griglia dei punti della suddivisione tende ad assumere tutti i valori continui tra -1 e 1.

Tutte le celle del sistema vengono visitate sistematicamente, nel senso che

celle adiacenti vengono occupate lo stesso numero di volte.  
Non sono più presenti salti tra i valori del numero di occupazione delle celle, infatti la funzione densità assume con continuità tutti i valori compresi tra 0 e 1.

**Grafico 4.5.12** Grafico della densità per  $\varepsilon = 0.1$  . Parametri dell'evoluzione  $N = 500$ ,  $T = 1.800.000$  e numero di prove 10.

La situazione per i valori di  $\varepsilon$  maggiori a questo non è molto differente, cambia semplicemente il profilo della funzione densità.

# Bibliografia

- [K] K. Kaneko *Theory and applications of coupled map lattices*, K. Kaneko Jhon Wiley & Sons, Ltd., Chichester (1993).
- [B] C. Boldrighini, L. A. Bunimovich, G. Cosimi, S. Frigio e A. Pellegrinotti, *Ising-Type Transitions in Coupled Map Lattices*, Journal of Statistical Physics **80** (5/6) (1995) pag. 1185 - 1205.
- [BL] L. A. Bunimovich, A. Lambert e R. Rima, *The emergence of coherent structures in coupled map lattices*, Journal of Statistical Physics **61** (1/2) (1990) pag. 253 - 262.
- [BS] L. A. Bunimovich, Ya. G. Sinai, *Spacetime chaos in coupled map lattices*, Nonlinearity **1** (1988) pag. 491 - 516.
- [D] R. L. Devaney, *An introduction to Chaotic Dynamical System*, Seconda Edizione (1989).
- [G] J. Gleick, *Una nuova scienza : il caos*, Rizzoli editore (1988).
- [K] G. Keller, M. Künzle e T. Nowicki, *Some phase transitions in coupled map lattices*, Phis. D **59** (1992) pag. 39 - 51.
- [KK] G. Keller e M. Künzle, *Transfer operators for coupled map lattices*, Ergodic Theory Dynamical System **12** (1992) pag. 297 - 318.
- [R] D. Ruelle, *Caso e Caos*, Bollati Boringhieri (1992).
- [V] A. Vulpiani, *Determinismo e caos*, La Nuova Italia Scientifica (1994).