UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI S.M.F.N.

Sintesi della tesi di Laurea Specialistica in Matematica

di

Daniela Camera

I Gruppi Fuchsiani

Relatore

Prof. Andrea Bruno

ANNO ACCADEMICO 2009-2010

Classificazione: 53A35, 53C35

Parole Chiave: Geometria Iperbolica, Gruppi Fuchsiani.

A partire dal 600 a.C. cominciò a svilupparsi, specialmente nel mondo greco, un nuovo modo di pensare la *geometria*, da disciplina utile per operare misure a trattazione più "*astratta*"'. Nei secoli successivi, quelli della cosiddetta Età dell'Oro, la geometria fu una disciplina privilegiata e numerosi teoremi furono dimostrati, così come fu avviata una riflessione sulle tecniche dimostrative. Con l'influsso dei filosofi, specialmente Platone e Aristotele, la geometria piana divenne a quel tempo un campionario di costruzioni con riga e compasso ed il primo oggetto di indagine in un sistema ipotetico-deduttivo. Nel 300 a.C. al culmine di una serie di tentativi volti a raccogliere e ordinare tutte le deduzioni dalla "*natura*" e i risultati conseguenti, compare l'opera degli *Elementi* di Euclide, il primo trattato di geometria pervenutoci, che divenne il testo di riferimento della geometria e tale è tuttora.

Secondo Lucio Russo, autore de "La Rivoluzione dimenticata" (Feltrinelli 1996):
"La scienza esatta è un insieme di teorie scientifiche che hanno le seguenti caratteristiche:

1. le affermazioni scientifiche non riguardano oggetti concreti ma enti specifici,
2. hanno una struttura rigorosamente deduttiva (partendo da pochi enunciati fondamentali si riescono a risolvere un numero illimitato di problemi attraverso dimostrazioni e calcoli),
3. le applicazioni al mondo reale sono basate su regole di corrispondenza tra gli enti teorici e gli oggetti concreti, esse sono invalidate dal metodo sperimentale."

Gli "*Elementi*" di Euclide sono in questo senso la prima opera scientifica dell'umanità. Gli Elementi sono articolati in 13 libri, ognuno dei quali si

apre con i termini che definiscono l'argomento trattato ed in più, nel I libro, compaiono 5 Assiomi e 5 Postulati.
In particolar modo il V Postulato di Euclide afferma che:
Per ogni retta r e per ogni punto P non appartenente ad r, esiste una ed una sola retta s passante per P e parallela ad r.

Generazioni di matematici, fino al XIX secolo, furono convinti che la geometria euclidea fosse l'idealizzazione corretta della proprietà dello spazio fisico e delle figure di questo spazio. Ma una preoccupazione di fondo serpeggiava: i postulati adottati da Euclide erano considerati verità evidente, mentre il V Postulato, nella forma enunciata da Euclide, era considerato meno ″*chiaro*″.
Il **V Postulato di Euclide nella sua formulazione originale** affermava che:
Se una retta intersecando altre due rette forma con esse, da una medesima parte, angoli alterni interni la cui somma è minore di due angoli retti, allora le due rette indefinitamente prolungate finiscono con l'incontrarsi dalla parte detta.

Nessuno ne metteva in dubbio la veriditicità, tuttavia ad esso mancava l'″evidenza″ degli altri postulati. Nel V postulato entra in gioco una proprietà che non è verificabile in una regione finita di spazio, mentre i primi quattro postulati si riferiscono a porzioni limitate di rette e a figure piane di estensione limitata.
Lo stesso Euclide, probabilmente si rendeva conto della particolarità del V postulato, che assomigliava più ad un teorema che ad una affermazione- impressione rinforzata dal fatto che l'enunciato inverso, il Teorema 17, era effettivamente tale. Infatti nel I Libro degli Elementi ordina i teoremi in modo tale che tutti quelli indipendenti dal V postulato- ossia dimostrati senza l'ausilio del V postulato- compaiono per primi (ad eccezione del Teorema

31), e successivamente tutti gli altri ed inoltre non ricorre all'uso dello stesso V postulato in dimostrazioni che potrebbero risultare più semplici.
La Geometria Euclidea, indipendente dal V Postulato, viene definita *Geometria neutrale.*

Gli sforzi per eliminare i dubbi intorno al V postulato aprirono la strada ad una nuova Geometria detta *Geometria non euclidea.* Furono tentati due approcci:
• sostituire il V Postulato con un enunciato più evidente
• dedurlo dagli altri postulati di Euclide e renderlo quindi un teorema.

Uno dei più significativi tentativi di dedurre il V postulato dagli altri quattro è da attribuire a G. Saccheri, all'inizio del XVIII secolo, il quale utilizzò il metodo della *dimostrazione per assurdo*, assumendo un'asserzione che contraddiceva il V postulato e tentando di dedurne un "*assurdo*". Se avesse ottenuto un tale risultato il V postulato sarebbe stato una conseguenza logica dei primi quattro (quindi un teorema), in caso contrario sarebbe risultato indipendente da questi ultimi.
Egli considerò un quadrilatero ABCD con i due lati alla base retti ed $AC \cong BD$ (Quadrilatero di Saccheri), con le seguenti proprietà:
• $\widehat{C} \cong \widehat{D}$
• a seconda che tali angoli siano acuti, retti o ottusi, si ha che la somma degli angoli interni di un triangolo è minore, uguale o maggiore di due angoli retti (se ciò vale per un triangolo vale per tutti i triangoli).

Saccheri riuscì in maniera rigorosa ad escludere l'ipotesi dell'angolo ottuso, ma non riuscì a fare altrettanto con l'ipotesi dell'angolo acuto; in questo modo aveva inconsapevolmente costruito una geometria non Euclidea perfettamente coerente. Il V postulato era quindi un'asserzione indipendente (ossia non può essere dedotto dagli altri postulati) e di conseguenza era possibile adottare un postulato che lo contraddicesse, e sviluppare una geometria completamente nuova, una Geometria non euclidea.

Nel XIX secolo uno dei primi matematici ad interessarsi alla Geometria non euclidea fu Jànos Bolyai $(1802-1860)$. Egli pubblicò le sue scoperte su un trattato di matematica *"the Tentament"*, 1831 come appendice di ventisei pagine. Ma le sue scoperte furono evidentemente anticipate da un altro grande matematico Carl Friedrich Gauss $(1777-1855)$. Questi nel 1817 scrisse al suo amico W.Olbers:
"Io mi convinco sempre più che la necessità della nostra geometria Euclidea non può essere provata, almeno non dalla ragione umana nè per la ragione umana. Forse in un'altra vita noi riusciremo a comprendere la natura dello spazio, che ora è inaccessibile."
Gauss, nonostante la sua reputazione, era impaurito nel pubblicare le sue scoperte sulla geometria non euclidea sia perchè le sue teorie rifiutavano la posizione di Immanuel Kant, considerato il supremo filosofo del secolo, secondo il quale lo spazio euclideo è innato nella struttura della nostra mente e sia perchè egli era un perfezionista, una persona che pubblicava solo opere d'arte complete.
Tali studi comunque furono oggetto di interesse anche per altri matematici del tempo; uno di questi fu il russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky $(1792-1856)$, il primo a pubblicare nel 1829 un resoconto di geometria non euclidea. Furono proprio N. Lobacevskij e J. Bolyai a realizzare quella che oggi è nota come *Geometria Iperbolica.*
In essa vale l'assioma:
Assioma Iperbolico: Per ogni retta L e per ogni punto P non su L, esistono almeno due distinte rette parallele ad L passanti per P.
Ovviamente anche in questa geometria si sono dovuti presentare dei modelli

per renderla veritiera tanto quanto quella euclidea ed il primo a fornire un modello fu Beltrami con la pseudosfera. Questo modello però non era soddisfacente; infatti nel 1901 Hilbert dimostrò rigorosamente che non poteva rappresentare interamente il piano non euclideo. I primi modelli soddisfacenti di geometria iperbolica furono dati da Klein $(1849-1925)$ e Poincarè $(1854-1912)$ nel 1882. In questa tesi sono stati studiati questi modelli.
Il nostro obiettivo è quello di studiare i gruppi di trasformazioni iperboliche e in particolar modo i gruppi Fuchsiani.
Dettagliatamente la tesi si sviluppa nel seguente modo.

Nel primo capitolo introduciamo quei concetti che ci saranno utili ad una migliore comprensione dell'argomento. In particolar modo definiamo:

Definizione 0.0.1. Una geometria è uno spazio metrico X, dotato di una distanza tra i punti d tale che
(a) $|ab| \geq 0$ ed $|ab| = 0$ se e solo se $a = b$ con $a, b \in X$
(b) $|ab| = |ba|$ con $a, b \in X$
(c) $|ac| \leq |ab| + |bc|$ con $a, b \in X$
(d) Per ogni due punti a e b e ogni due numeri positivi α e β, esistono punti $p_1, p_2, ..., p_n$ tale che $p_1 = a$, $p_2 = b$, e $0 \leq |p_1p_2| + ... + |p_{n-1}p_n| - |ab| < \alpha$, e $|p_ip_{i+1}| < \beta$ per $i = 1, ...n-1$.

Definizione 0.0.2. Sia $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e X uno spazio metrico. Una curva $\gamma : J \to X$ è detta curva geodetica se ogni punto $c \in J$ ha un intorno $U \subset J$ tale che la restrizione di $\gamma : U \to X$ conserva la distanza.

Definizione 0.0.3. Un'isometria è un'applicazione biunivoca e continua del piano in sè che conserva la distanza.

Definizione 0.0.4. Una trasformazione di Möebius è una funzione $f : \widehat{C} \to \widehat{C}$, definita sulla sfera di Riemann $\widehat{C} = C \cup \{\infty\}$ della forma $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in C$ ed $ad - bc \neq 0$.

Le trasformazione di Moebius formano un gruppo indicato con $Aut(\widehat{C})$ di omeomorfismi da $\widehat{C}$ in se stesso.

Nel secondo capitolo presentiamo inizialmente la geometria euclidea con i 5 postulati di Euclide, gli assiomi di Hilbert e l'assioma Iperbolico secondo il quale: ″Esistono una retta r e un punto P non appartenente ad r, tali che per P passino almeno due rette che non incontrino r″, per poi introdurre la geometria iperbolica con le sue nozioni fondamentali. Definiamo:

Definizione 0.0.5. La Geometria Iperbolica è una geometria in cui valgono i primi quattro postulati di Euclide ma non vale il V postulato che viene sostituito con l''Assioma Iperbolico'.

Indicato con H^2 il piano iperbolico definiamo su di esso la distanza iperbolica tra due punti P e Q appartenenti ad esso, come il numero positivo tale che $\cosh d\,(P,Q) = \langle P,Q\rangle$, con $P,Q \in H^2$ e definiamo quelle che sono le geodetiche nel piano iperbolico.

Proposizione 0.0.1. Ogni curva geodetica nel piano iperbolico H^2 può essere scritta nella forma

$$\gamma\,(t) = A\cosh t + T\sinh t; \quad t \in \mathbb{R}$$

dove $A \in H^2$ e T è un vettore tangente unitario ad H^2 in A.

Nel terzo capitolo diamo una rassegna di tutti i modelli del piano iperbolico così come dati per primi da Klein e Poincaré dimostrando l'esistenza di un isomorfismo tra di essi.
I modelli di geometria iperbolica consistono in spazi metrici le cui geodetiche soddisfano gli assiomi (dati da Hilbert) soddisfatti dalle rette del piano. I due modelli più importanti a cui faremo riferimento nel seguito sono il semipiano di Poincaré H^2 e il disco di Poincaré D_2. Il semipiano di Poincaré H^2 consiste

insiemisticamente nell'insieme dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ con $Imz > 0$, con metrica

$$\cosh d(z,w) = 1 + \frac{|w-z|^2}{2Im[w]\,Im[z]}; \quad z,w \in H^2.$$

Le geodetiche in H^2 sono tracciate da cerchi euclidei che hanno centro sull'asse reale e da linee perpendicolari all'asse reale. Il disco di Poincaré D^2 consiste insiemisticamente nell'insieme dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \leq 1$ e con metrica

$$d(P,Q) = arccosh\left(1 + 2\frac{|P-Q|^2}{(1-|P^2|)(1-|Q|^2)}\right);\ P,Q \in D^2.$$

Come ben sappiamo, nella geometria euclidea le rette possono essere incidenti se hanno un punto in comune, o parallele se non si incontrano mai. Nel caso di H^2 le geodetiche hanno questa proprietà:
geodetiche distinte L_1 e L_2, possono essere incidenti, parallele ossia avere distanza arbitrariamente piccola ma non intersecarsi mai, o ultraparallele, cioè disgiunte e con distanza positiva.
Ancora più evidente appare questo fenomeno nel disco di Poincaré, dove le geodetiche possono intersecarsi all'interno, essere disgiunte (ultraparallele) oppure intersecarsi nel bordo all'infinito, cioè parallele. Di conseguenza, così come nella geometria euclidea abbiamo solo due tipi di fasci di rette, uno generato da rette parallele e l'altro da rette incidenti, nella geometria iperbolica abbiamo tre tipi di fasci di geodetiche. Ogni coppia di geodetiche L e L' appartiene ad un'unica famiglia $\mathcal{P}$ di geodetiche chiamato fascio. Mettiamoci nel disco di Poincaré D^2.
Il fascio determinato da L e L' è
(i) parabolico se L e L' sono parallele;
(ii) ellittico se L e L' si intersecano;
(iii) iperbolico se L e L' sono disgiunte, cioè ultraparallele.
Quindi un fascio parabolico è generato da tutte le geodetiche che non hanno punti in comune all'interno del disco, ma sono tangenti sul bordo. Un fascio

ellittico è generato da geodetiche che hanno un punto in comune all'interno del disco di Poincaré mentre un fascio iperbolico è formato da tutte le geodetiche che non hanno un punto in comune. Inoltre presento anche il modello matriciale definendo l'angolo orientato e dimostrando alcune proposizioni più importanti.

Definizione 0.0.6. Angolo orientato
Dati due vettori tangenti S e T ad H^2 nel punto A, l'angolo orientato $\angle_{or}(S,T)$ tra S e T è definito da

$$T = Scos\angle_{or}(S,T) + S \wedge Asin\angle_{or}(S,T) ; \angle_{or}(S,T) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

Proposizione 0.0.2. Due geodetiche distinte h e k in H^2 si intersecano se e solo se i loro vettori normali H e K soddisfano la condizione $|\langle H,K\rangle| < 1$.

Corollario 0.0.1. Le geodetiche h e k in H^2 sono perpendicolari, ovvero si incontrano in un punto $A \in H^2$ formando un angolo di $\frac{\pi}{2}$, se e solo se i loro vettori normali H e K soddisfano $\langle H,K\rangle = 0$.

Teorema 0.0.1. Due distinte geodetiche h e k sono perpendicolari alla stessa geodetica se e solo se i loro vettori normali H e K soddisfano $|\langle H,K\rangle| > 1$. La geodetica in comune è unica.

Il terzo capitolo si conclude facendo vedere alcuni isomorfismi tra i modelli; in particolar modo quello tra il Disco di Klein e il Disco di Poincarè tramite l'uso della proiezione stereografica, e quello tra il Disco e il Semipiano di Poincarè tramite una trasformazione di M$\ddot{o}$ebius.

Nel quarto capitolo abbiamo visto come si classificano le isometrie nei vari modelli; abbiamo così trovato che si classificano sia in termini di fasci di geodetiche che tramite l'invariante tr^2. Spieghiamo meglio questo concetto. Diciamo intanto che il gruppo delle isometrie di H^2 è dato dal gruppo $PGl_2(\mathbb{R})$. Tale identificazione è data dall'azione di $Gl_2(\mathbb{R})$ su H^2 così definita:

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad{-}bc>0 \quad \text{e} \quad z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad{-}bc<0 \quad \text{per}\, a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

Le isometrie pari sono quelle con determinante positivo e si identificano con quelle in $Sl_2(\mathbb{R})$. Sia $\sigma \in Sl_2(\mathbb{R})$ una isometria pari. Risolvendo l'equazione $z = \frac{(az+b)}{(cz+d)}$, troviamo i punti fissi; infatti si tratta di un'equazione di secondo grado $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ le cui soluzioni sono

$$Z_\pm = \frac{a - d \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c}$$

dove z_+ corrisponde alla soluzione con il segno positivo della radice quadrata e z_- è la soluzione con il segno negativo della radice quadrata. Il numero delle soluzioni dipende dal valore del determinante, possiamo scrivere

$$(d-a)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4ad + 4bc = (a+d)^2 - 4(ad-bc)$$

Poichè $ad - bc = 1$, abbiamo che il discriminante è uguale a

$$(a+d)^2 - 4$$

Se

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{R})$$

ricordiamo che la traccia di σ è l'invariante $tr\sigma := a + d$, abbiamo dunque

$$z_\pm = \frac{a - d \pm \sqrt{(tr\sigma)^2 - 4}}{2c}$$

Quindi in base al valore della traccia di σ si classificano le trasformazioni.

Se $(tr\sigma)^2 < 4$ in questo caso si parla di trasformazioni ellittiche e σ ha un punto fisso in H^2; queste trasformazioni sono analoghe alle rotazioni euclidee.

Se $(tr\sigma)^2 > 4$ la trasformazione ha due soluzioni reali e quindi σ ha due punti fissi distinti A e B su ∂H^2; si tratta in questo caso di trasformazioni iperboliche che sono analoghe alle traslazioni.
Se $tr^2\sigma = 4$ la trasformazione ha due soluzioni coincidenti, quindi σ ha un solo punto fisso P su ∂H^2. In questo caso parliamo di trasformazioni paraboliche che non hanno alcuna relazione con alcuna trasformazione euclidea. Analogamente al caso euclideo possiamo anche classificare le isometrie pari tramite i fasci di geodetiche. Un' isometria g è ellittica se e solo se può essere rappresentata come $g = \sigma_2\sigma_1$, dove σ_j è la riflessione in L_j per $j = 1, 2$ e L_1 e L_2 stanno in un fascio ellittico. Il fascio ellittico associato è il fascio contenente tutte le geodetiche passanti per un punto fisso v di g nel piano iperbolico. Possiamo scegliere in modo arbitrario L_1 o L_2 da questo fascio e le altre L_j sono unicamente determinate da g. Un'isometria ellittica g è determinata completamente dal suo punto fisso v e determina nel piano iperbolico un numero reale θ in $[0, 2\pi)$ perchè è una rotazione. Un'isometria g è iperbolica se e solo se può essere rappresentata come $g = \sigma_2\sigma_1$ dove σ_j è la riflessione in L_j e dove L_1 e L_2 determinano un fascio iperbolico. L'asse di g nel piano iperbolico è l'asse del fascio, cioè l'unica geodetica ortogonale a tutte le linee che si trovano nel fascio che finiscono nel punto fisso di g. Naturalmente, l'asse di g è l'unica geodetica g-invariante. Possiamo scegliere in modo arbitrario L_1 o L_2 e l'altra L_j è determinata da g. Il fascio di cerchi passante per il punto P e tangente all'asse x è invariante rispetto a σ. Un cerchio di questo fascio che è contenuto in H^2 è chiamato orociclo con centro Q che può essere caratterizzato come orbita di un punto per il gruppo di trasformazioni paraboliche che fissano il punto $P \in \partial H^2$. Un'isometria g è parabolica se e solo se può essere espressa come $g = \sigma_2\sigma_1$ dove σ_j è una riflessione rispetto a L_j; L_1 e L_2 determinano un fascio parabolico, quindi sono geodetiche parallele. Il fascio parabolico associato è il fascio contenente tutte le geodetiche che hanno come punto fisso il punto fissato da g sul bordo. L_1 o L_2 possono

essere scelte in modo arbitrario dal fascio. Questa classificazione risulta pertanto assolutamente analoga al caso euclideo. Nel caso iperbolico si affianca però un nuovo tipo trasformazioni dato dalle orolazioni. Abbiamo mostrato alcuni esempi di trasformazioni: come esempio di trasformazione parabolica non banale, si può considerare la mappa

$$\sigma : z \rightarrow \frac{z}{\lambda z+1} \text{ con } \lambda > 0.$$

Questa mappa è associata alla matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}$ ed in quanto elemento di $sl_2(\mathbb{R})$, è un'isometria di H^2. Evidentemente ha come unico punto fisso l'origine e come ci si dovrebbe aspettare, $tr^2\sigma = 4$. Mentre se consideriamo il gruppo di tutte le rotazioni iperboliche attorno al punto i nel semipiano superiore, esso è dato da tutti i movimenti diretti che fissano i:

$$i = \frac{a+b}{c+d}$$

così $a = d$ e $b = -c$, con $1 = ad - bc = a^2 + b^2$.
Se consideriamo $a = cos\vartheta$, $b = -sin\vartheta$, le rotazioni attorno ad i sono rappresentate da:

$$z \rightarrow \frac{(cos\theta)z - sin\theta}{(sin\theta)z + cos\theta}$$

Abbiamo enunciato quindi il teorema che sta alla base di questa classificazione, valido per qualsiasi modello di geometria iperbolica.

Teorema 0.0.2 (Teorema di classificazione). Una trasformazione del piano iperbolico nel modello H^2

$$z = \frac{az+b}{cz+d} \text{ con } ad - bc = 1 \text{ ed } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

dispari è o una glissoriflessione o una riflessione mentre
pari è o una rotazione o una orolazione o una traslazione.

Avremo quindi nel caso pari :
una trasformazione parabolica, ovvero una orolazione, se fissa un punto in ∂H^2 ed $(a+d)^2 = 4$,
una trasformazione iperbolica , ovvero una traslazione, se fissa due punti in ∂H^2 ed $(a+d)^2 > 4$,
una trasformazione ellittica, ovvero una rotazione, se fissa un punto in H^2 ed $(a+d)^2 < 4$.

Il quarto capitolo si conclude con lo studio del gruppo delle isometrie del piano iperbolico sul modello matriciale $sl_2(\mathbb{R})$, rappresentato dal gruppo di Lorentz.

Nel quinto capitolo studiamo i sottogruppi discreti del piano iperbolico. Lo scopo di questa tesi, infatti, è quello di studiare i gruppi di trasformazioni iperboliche perchè i gruppi Fuchsiani sono gruppi discreti di isometrie pari. Le isometrie pari sono le rotazioni, traslazioni e orolazioni; quelle dispari sono le glissoriflessioni. L'insieme di punti ellittici, che sono i punti fissati dalle trasformazioni ellittiche di un gruppo discreto Γ, forma un sottoinsieme discreto di H^2. Quello che abbiamo studiato in questo capitolo è che vale il viceversa; l'abbiamo visto infatti con il teorema di Jacob Nielsen. L'asserto infatti dice questo:

Teorema 0.0.3 (Teorema di Jacob Nielsen). Un sottogruppo non elementare Γ di $PGl_2(\mathbb{R})$ è discreto se e solo se l'insieme P di punti ellittici fissati su H^2 è discreto.

Abbiamo quindi prima studiato quali sono i sottogruppi elementari. Sono un tipo di sottogruppi di $PGl_2(R)$, in particolar modo sono gruppi che fissano un punto del piano iperbolico o un punto sul bordo del piano iperbolico o stabilizzano una geodetica. Quindi sono rispettivamente gruppi di trasformazioni tutte ellittiche, tutte paraboliche o tutte iperboliche. Per i sottogruppi non elementari valgono le seguenti proposizioni.

Proposizione 0.0.3. Sia G un sottogruppo non elementare di $PGl_2(\mathbb{R})$. Se G non è composto solo da isometrie pari, allora G contiene una glissoriflessione.

Proposizione 0.0.4. Un sottogruppo non-elementare G di $PGl_2(\mathbb{R})$ contiene una traslazione.

Il quinto capitolo si conclude con lo studio dell'azione di gruppi discreti Γ su punti del bordo del piano iperbolico. Diciamo che un punto $S \in \partial H^2$ è cuspide per H^2 se è fissato da trasformazioni paraboliche $\beta \in \Gamma$. Lo stabilizzatore Γ_S di una cuspide $S \in \partial H^2$ è formato da orolazioni e riflessioni rispetto a geodetiche passanti per il punto S.

Nell'ultimo capitolo abbiamo studiato la regione fondamentale dei gruppi Fuchsiani Γ dandone la definizione.

Definizione 0.0.7. Sia X uno spazio metrico e Γ un gruppo Fuchsiano. La regione chiusa $F \subset X$ (la chiusura di un insieme aperto non vuoto F°, chiamata l'interiore di F) è definita una regione fondamentale per Γ se:
- $\bigcup_{\sigma\in\Gamma}\sigma(F) = X$
- $F^\circ \cap \sigma(F^\circ) = 0$, per tutti i $\sigma \in \Gamma - \{Id\}$.

Inoltre abbiamo mostrato qualche esempio e definito la regione di Dirichlet per Γ centrata in un punto p appartenente al piano iperbolico, non fissato da alcun elemento di $\Gamma - \{Id\}$, come l'insieme
$D_p(\Gamma) = \{z \in H^2 | \rho(z,p) \leq \rho(z,\sigma(p)), \forall\sigma \in \Gamma\}$, dimostrando che questa regione è localmente finita. Ad esempio di tale argomento abbiamo analizzato la figura modulare.

Siamo così giunti alla conclusione del nostro obiettivo che era quello di studiare i gruppi Fuchsiani.

Bibliografia

[1] Greenberg M.J.
Euclidean and non-Euclidean geometries
Freeman and Company , fourt edition (2008)

[2] Katok S.
Fuchsian groups
The University of Chicago Press Chicago and London, (1992)

[3] Bearton A.F.
The geometry of discrete groups
Springer, vol. 91 of Graduate Texts in Mathematics (1983)

[4] Iversen B.
Hyperbolic geometry
Cambridge University, vol 25 of London Mathematical Society Student Texts (1992)

[5] Poincaré H.
Théorie des groupes fuchsiens
Mathematische Annalen,(1882)

[6] Nikulin V.V.- Shafarevich I.R.
Geometries and groups
Springer-Verlag,(1987)

[7] Anderson J.W.
Hyperbolic Geometry
Springer, (2007)

[8] Maracchia S..
Dalla geometria Euclidea alla geometria Iperbolica: il modello di Klein
Liguori, (...)

[9] Barker W. - Howe R.
Continuos Symmetry From Euclidean To Klein AMS- Americal Mathematical Society, (...)

[10] Jones A.G. - Singerman D.
Complex functions an algebraic and geometric viewpoint
Cambridge University, (1987)

[11] Keen L.- Lakic N.
Hyperbolic geometry from a local viewpoint
Cambridge University, (2007)

[12] Enciclopedia interattiva
www.wikipedia.it