UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN.

Sintesi della Tesi di laurea in Matematica
di

Stefania Castaldo

Proprietà di concentrazione per misure di probabilità

Relatore

Prof. Fabio Martinelli

Il canditato | Il relatore

ANNO ACCADEMICO 2003 - 2004
LUGLIO 2004

AMS Classification: 60F05, 60B10, 60F10
Parole Chiave: Disuguaglianze di concentrazione, isoperimetria, disuguaglianza di Sobolev logaritmica, Entropia.

Capitolo 1

Sintesi

In questa tesi verranno descritte le proprietà di concentrazione per misure di probabilità. L'esempio più semplice è dato dalla disuguaglianza di Chebyshev, la quale quantifica l'interpretazione intuitiva della varianza come misura della dispersione. Essa afferma che se la variabile aleatoria X ha varianza finita allora

$$\mathbb{P}(\mid X - \mathbb{E}(X) \mid > \eta) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\eta^2}, \qquad \eta > 0 \text{ arbitrario},$$

ovvero più la $\mathrm{Var}(X)$ è piccola, più è piccola la probabilità che X prenda valori lontani dalla sua media. La disuguaglianza di Chebyshev è una maggiorazione grossolana della probabilità $\mathbb{P}\{\mid X - \mathbb{E}(X) \mid > \eta\}$, mostreremo in questa tesi che sotto opportune ipotesi si riescono ad ottenere stime di concentrazione molto più potenti di questa. L'esempio canonico è rappresentato dalla proprietà di concentrazione per la misura Gaussiana γ centrata e con matrice di covarianza la matrice identità. Essa afferma che per ogni insieme Boreliano A su $\mathbb{R}^n$ con misura $\gamma(A) \geq \frac{1}{2}$, per ogni $r \geq 0$

$$\gamma(A_r) \geq 1 - \mathrm{e}^{-r^2/2},$$

dove

$$A_r = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \mathrm{d}(x, A) < r\} \tag{1.1}$$

e d è la metrica Euclidea. Notiamo che la misura di $\gamma(A_r)$ tende molto rapidamente al valore uno al crescere di r.

Tale proprietà di concentrazione può essere equivalentemente descritta sulle funzioni. Se F è una mappa Lipschitz con $\|F\|_{Lip} \leq 1$, per ogni $r \geq 0$

$$\gamma(F \geq \int F d\gamma + r) \leq \mathrm{e}^{-r^2/2}, \tag{1.2}$$

la quale, con la stessa disuguaglianza per $-F$, ci dice che la funzione Lipschitz considerata, con alta probabilità, si concentra intorno al suo valor medio. Tali stime sono indipendenti dalla dimensione e di conseguenza possono essere estese a misure Gaussiane infinito-dimensionali.

La concentrazione è naturalmente collegata all'isoperimetria. Consideriamo una sfera unitaria $\mathbb{S}^n$ su $\mathbb{R}^{n+1}$ equipaggiata con la misura normalizzata invariante σ^n. Consideriamo $\mathbb{S}^n$ come spazio metrico e d la distanza Geodesica. Su tale sfera, le palle geodesiche rappresentano gli insiemi estremali, ovvero gli insiemi con misura massima tra tutti quelli con frontiera di lunghezza fissata. Tale proprietà isoperimetrica può essere trattata come una proprietà di concentrazione, come illustreremo brevemente qui di seguito.

La disuguaglianza isoperimetrica afferma che ogni volta che $\sigma^n(A) = \sigma^n(B)$ con B palla su $\mathbb{S}^n$, per ogni $r \geq 0$ si ha

$$\sigma^n(A_r) \geq \sigma^n(B_r) \tag{1.3}$$

dove A_r e B_r sono definite come in (1.1). E' possibile stimare esplicitamente la misura di una data palla $\sigma^n(B_r)$. Per esempio, nel caso di una palla con $\sigma^n(B) = \frac{1}{2}$, se $\sigma^n(A) \geq \frac{1}{2}$ segue dalla (1.3) che

$$\sigma^n(A_r) \geq 1 - \sqrt{\frac{\pi}{8}}\mathrm{e}^{-(n-1)r^2/2}. \tag{1.4}$$

Perciò se la dimensione è grande basta un piccolo incremento di r (dell'ordine di $\frac{1}{\sqrt{n}}$) affinchè la misura di A_r tende ad uno. La (1.4) descrive il fenomeno della concentrazione della misura σ^n.

La concentrazione è inoltre collegata a stime coercitive di tipo Sobolev logaritmiche. Se μ è una misura di probabilità diremo che essa soddisfa la disuguaglianza di Sobolev logaritmica se per qualche $C > 0$ e per tutte le funzioni regolari f su $\mathbb{R}^n$

$$\int f^2 \log f^2 d\mu - \int f^2 d\mu \log \int f^2 d\mu \leq 2C \int \mid \nabla f \mid^2 d\mu. \tag{1.5}$$

Anche quì non c'è dipendenza dalla dimensione. La misura Gaussiana γ soddisfa tale disuguaglianza con costante $C = 1$.

Inoltre se μ soddisfa la (1.5) allora si può dimostrare che vale l'integrabilità esponenziale:

$$\int \mathrm{e}^{\alpha|x|^2} d\mu(x) < \infty$$

per ogni $\alpha < \frac{1}{C}$. Inoltre, per ogni funzione Lipschitz F su $\mathbb{R}^n$ con $\|F\|_{Lip} \leq 1$, e per ogni reale λ, si ha

$$\int \mathrm{e}^{\lambda F} d\mu \leq \mathrm{e}^{\lambda \int F d\mu + C\lambda^2/4}.$$

Utilizzando la disuguaglianza di Markov tale disuguaglianza implica stime di concentrazione del tipo di quella vista per la Gaussiana (1.2).

La disuguaglianza di Sobolev logaritmica è stata introdotta da Gross [Gro75] che ne ha mostrato l'equivalenza con una proprietà di iper-contrattività del semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck. L'estensione di queste disuguaglianze a misure non Gaussiane ha permesso negli ultimi decenni di utilizzare le disuguaglianze di Sobolev logaritmiche per stimare il tempo di convergenza all'equilibrio di sistemi dinamici stocastici a molte componenti interagenti.

Riporterò nella seguente sintesi solo i risultati più importanti.

Primo capitolo. Nel primo capitolo abbiamo introdotto la funzione di concentrazione, la concentrazione normale ed esponenziale.

Definizione 1.0.1. *Sia (X, d) uno spazio metrico equipaggiato con la misura di probabilità μ sugli insiemi Boreliani di (X, d). Definiamo la funzione di concentrazione $\alpha_{(X,d,\mu)}$ o anche α_μ come*

$$\alpha_{(X,d,\mu)}(r) = \sup\{1 - \mu(A_r); A \subset X; \mu(A) \geq \frac{1}{2}\} \tag{1.6}$$

dove $A_r = \{x \in X; d(x, A) < r\}$.

Definizione 1.0.2. *Diremo che μ ha una concentrazione normale su (X, d) se esistono due costanti c, $C >$ 0 tale che per ogni $r > 0$*

$$\alpha_{(X,d,\mu)}(r) \leq Ce^{-cr^2}. \tag{1.7}$$

Definizione 1.0.3. *Diremo che μ ha una concentrazione esponenziale se*

$$\alpha_{(X,d,\mu)}(r) \leq Ce^{-cr}. \tag{1.8}$$

In seguito abbiamo connesso la nozione di funzione di concentrazione con la disuguaglianza di concentrazione per funzioni Lipschitz attraverso la seguente proposozione.

Proposizione 1.0.4. *Sia μ una misura di probabilità sugli insiemi Boreliani di (X, d). Sia F una funzione continua a valori reali su (X, d) con modulo di continuità ω_F e sia m_F una mediana di F per μ. Allora, per ogni $\eta > 0$,*

$$\mu(\{F > m_F + \omega_F(\eta)\}) \leq \alpha_\mu(\eta).$$

In particolare, se F è Lipshitziana, per ogni $r > 0$,

$$\mu(\{F \geq m_F + r\}) \leq \alpha_\mu(r/ \parallel F \parallel_{Lip})$$

e

$$\mu(\{|F - m_F| \geq r\}) \leq 2\alpha_\mu(r/ \parallel F \parallel_{Lip}). \tag{1.9}$$

Viceversa, se per qualche funzione non negativa α di $\mathbb{R}_+$,

$$\mu(\{F \geq m_F + r\}) \leq \alpha(r)$$

per ogni funzione F 1-Lipschitz con mediana m_F e per ogni $r > 0$, si ha che $\alpha_\mu \leq \alpha$.

La (1.9) descrive una delle proprietà della concentrazione delle funzioni Lipschitz F intorno alla mediana m_F. Nella seguente proposizione abbiamo sostituito la mediana con il valor medio di F.

Proposizione 1.0.5. *Sia μ una misura di probabilità Boreliana su uno spazio metrico (X, d). Assumiamo che per qualche funzione non negativa α su $\mathbb{R}_+$ e per ogni funzione limitata 1-Lipschitz F su (X, d),*

$$\mu\left(\{F \geq \int F d\mu + r\}\right) \leq \alpha(r) \tag{1.10}$$

per ogni $r > 0$. Allora

$$1 - \mu(A_r) \leq \alpha(\mu(A)r)$$

per ogni insieme Boreliano A con $\mu(A) > 0$ e per ogni $r > 0$. In particolare,

$$\alpha_{(x,d,\mu)}(r) \leq \alpha\left(\frac{r}{2}\right), \quad r > 0.$$

Inoltre se α è tale che $\lim_{r \longrightarrow \infty} \alpha(r) = 0$, ogni funzione 1-Lipschitz è integrabile rispetta a μ e, se α è continua, soddisfa la (1.10).

Nella parte finale di questo capitolo abbiamo ottenuto i primi risultati sulla concentrazione normale e esponenziale. Una descrizione della concentrazione normale è stata ottenuta attraverso la dimostrazione del seguente teorema.

Proposizione 1.0.6. *Sia μ una misura di probabilità su uno spazio metrico (X, d). (X, d, μ) ha una concentrazione normale $\alpha_\mu(r) \leq C e^{-cr^2}, r > 0$, se e solo se esiste una costante $K > 0$ (dipendente solo da C) tale che per ogni $q \geq 1$ e per ogni funzione F 1-Lipshitz su (X, d),*

$$\| F - \int F d\mu \|_q \leq K\sqrt{\frac{q}{c}}$$

dove $\| \cdot \|_q$ è la norma L^q rispetto a μ.

Invece un risultato sulla concentrazione esponenziale è stato ricavato con l'introduzione del concetto di espansione dei coefficienti

Definizione 1.0.7. *Sia μ una misura di probabilità su insiemi Boreliani di uno spazio metrico (X, d). Definiamo l'espansione dei coefficienti di μ su (X, d) di ordine $\varepsilon > 0$ come*

$$Exp_\mu(\varepsilon) = inf\{e \geq 1; \mu(B_\varepsilon) \geq e\ \mu(B), B \subset X, \mu(B_\varepsilon) \leq \frac{1}{2}\} \tag{1.11}$$

dove abbiamo indicato con B_ε l'aperto di raggio ε di B rispetto a d.

Proposizione 1.0.8. *Se per qualche $\varepsilon > 0$, $Exp_\mu(\varepsilon) \geq e > 1$, allora (X, d, μ) ha concentrazione esponenziale*

$$\alpha_\mu(r) \leq \frac{e}{2}\, e^{\frac{-r(loge)}{\varepsilon}}, \quad r > 0.$$

Infine il funzionale di Laplace ci ha permesso di ottenere utili proprietà di concentrazione.

Definizione 1.0.9. *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia μ una misura di probabilità sugli insiemi Boreliani di (X, d). Definiamo per $\lambda \geq 0$, il funzionale di Laplace per μ su (X,d) come*

$$E_{(X,d,\mu)}(\lambda) = \sup \int e^{\lambda F} d\mu$$

dove il sup *è preso su tutte le funzioni 1-Lipschitz F di media zero su (X, d).*

Proposizione 1.0.10. *Con la precedente notazione,*

$$\alpha_{(X,d,\mu)}(r) \leq \inf_{\lambda \geq 0} e^{-\lambda r/2} E_{(X,d,\mu)}(\lambda), \quad r > 0.$$

In particolare, se

$$E_{(X,d,\mu)}(\lambda) \leq e^{\lambda^2/2c}, \quad \lambda \geq 0,$$

allora, ogni funzione 1-Lipschitz $F : X \to \mathbb{R}$ è integrabile e per ogni $r \geq 0$,

$$\mu\left(\{F \geq \int F d\mu + r\}\right) \leq e^{-cr^2/2}$$

e (X, d, μ) ha concentrazione normale

$$\alpha_{(X,d,\mu)}(r) \leq e^{-cr^2/8}, \quad r > 0.$$

Se $E_{(X,d,\mu)}(\lambda_0) < \infty$ per qualche $\lambda_0 > 0$, allora (X, d, μ) ha concentrazione esponenziale.

Secondo capitolo. Nel secondo capitolo abbiamo utilizzato sia l'isoperimetria che le disuguaglianze di Brunn-Minkowski per stimare la funzione di concentrazione

Definiamo prima di tutto la misura limite di Minkowski

Definizione 1.0.11. *Sia (X, d) uno spazio metrico equipaggiato con una misura Boreliana μ (non necessariamente finita). La misura limite o il contenuto di Minkowski sull'insieme Boreliano A in X rispetto a μ è definito come*

$$\mu^+(A) = \liminf_{r \to 0} \frac{1}{r} \mu(A_r \backslash A) \tag{1.12}$$

dove $A_r = \{x \in X; d(x, A) < r\}$ (rispetto a d).

Abbiamo in seguito dimostrato la seguente Proposizione, la quale connette l'isoperimetria con le proprietà di concentrazione:

Proposizione 1.0.12. *Sia μ una misura Boreliana definita su uno spazio metrico (X, d). Assumiamo che $I_\mu \geq v' \circ v^{-1}$ per qualche funzione differenziabile strettamente crescente $v : I \subset \mathbb{R} \to [0, \mu(X)]$. Allora, per ogni $r > 0$,*

$$v^{-1}(\mu(A_r)) \geq v^{-1}(\mu(A)) + r.$$

La precedente Proposizione è stata utilizzata nella dimostrazione del seguente Corollario, il quale ci ha permesso di determinare risultati di concentrazione per diverse misure di probabilità.

Corollario 1.0.13. *Sia μ una misura di probabilità su (X, d) per la quale possiamo applicare la Proposizione 2.1.1, e assumiamo che $I_\mu \geq v' \circ v^{-1}$. Allora,*

$$\alpha_{(X,d,\mu)} \leq 1 - v\left(v^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + r\right), \quad r > 0.$$

Abbiamo ottenuto risultati per la sfera standard $\mathbb{S}^n$ equipaggiata con la metrica Geodesica, per la misura Gaussiana γ su $\mathbb{R}^k$ equipaggiata con la metrica Euclidea, per la misura uniforma su $[0, 1]^n$ ed infine per la misura uniforme su $\{0, 1\}^n$ equipaggiata con la metrica di Hamming.

Teorema 1.0.14. *Per la sfera standard $\mathbb{S}^n, n \geq 2$, equipaggiata con la metrica geodesica ed elemento di volume normalizzato μ,*

$$\alpha_{(\mathbb{S}^n,d,\sigma^n)} \leq e^{-(n-1)r^2/2, \quad r>0}$$

(dove $0 < r \leq \pi$).

Corollario 1.0.15. *La misura canonica Gaussiana γ su $\mathbb{R}^K$ equipaggiata con la sua metrica Euclidea ha concentrazione normale*

$$\alpha_{(\mathbb{R}^K,\gamma)}(r) \leq e^{-r^2/2}, \quad r > 0.$$

Proposizione 1.0.16. *Sia $\mu_{[0,1]^n}$ la misura uniforme su $[0, 1]^n$. Allora*

$$\alpha_{([0,1]^n,\mu_{[0,1]^n})}(r) \leq e^{-\pi r^2}, \quad r > 0.$$

Proposizione 1.0.17. *Per una misura uniforme $\mu = \mu^n$ su $\{0,1\}^n$ equipaggiata con la metrica normalizzata di Hamming,*

$$\alpha_{(\{0,1\}^n,\mu)}(r) \leq e^{-2nr^2}, \quad r > 0.$$

Terzo capitolo. Nel terzo capitolo capitolo abbiamo mostrato come molte proprietà della concentrazione derivino dalle disuguaglianze di Sobolev logaritmiche e dalla disuguaglianza di Poincaré. Inoltre utilizzando la proprietà prodotto dell'entropia e della varianza abbiamo ottenuto risultati di concentrazione per misure prodotto, e per spazi discreti.

Diamo prima di tutto la definizione di disuguaglianza di Poincaré e disuguaglianza logaritmica di Sobolev.

Definizione 1.0.18 (Disuguaglianza di Poincarè). *Una misura di probabilità μ sugli insiemi Boreliani di $\mathbb{R}^n$ soddisfa la disuguaglianza di Poincarè se per qualche costante $C > 0$ e per tutte le funzioni f regolari su $\mathbb{R}^n$,*

$$Var_\mu(f^2) \leq C \int |\nabla f|^2 d\mu \tag{1.13}$$

dove

$$Var_\mu(f) = \int f^2 d\mu - (\int f d\mu)^2$$

è la varianza della funzione f.

Definizione 1.0.19 (Disuguaglianza logaritmica di Sobolev). *Una misura di probabilità μ sugli insiemi Boreliani di $\mathbb{R}^n$ soddisfa la disuguaglianza logaritmica di Sobolev se per qualche costante $C > 0$ e per tutte le funzioni f regolari su $\mathbb{R}^n$,*

$$Ent_\mu(f^2) \leq 2C \int |\nabla f|^2 d\mu. \tag{1.14}$$

Con ∇f abbiamo indicato il gradiente di f e con $|\nabla f|$ la sua lunghezza Euclidea.

In seguito abbiamo dimostrato il seguente Teorema, il quale afferma che se una misura soddisfa la disuguaglianza di Sobolev logaritmica allora ha concentrazione normale.

Teorema 1.0.20. *Sia μ una misura di probabilità su insiemi Boreliani di uno spazio metrico (X, d) tale che per qualche $C > 0$ e per tutte le funzioni f su X,*

$$Ent_\mu(f^2) \leq 2C \int |\nabla f|^2 d\mu.$$

Allora, ogni funzione 1-Lipschitz $F : X \to \mathbb{R}$ è integrabile e tale che per ogni $r \geq 0$,

$$\mu(\{F \geq \int F d\mu + r\}) \leq e^{-r^2/2C}.$$

In particolare,

$$\alpha_{(X,d,\mu)}(r) \leq e^{-r^2/8C},\ r > 0.$$

Come abbiamo detto prima un importante risultato dell'entropia (e della varianza) è la sua proprietà prodotto. Insieme con l'argomento di Herbst, abbiamo ora uno strumento potente per poter studiare la concentrazione quando trattiamo con la misura prodotto $P = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$.

Illustriamo tale proprietà:

Proposizione 1.0.21. *Per ogni funzione non negativa f sullo spazio prodotto X,*

$$Ent_P(f) \leq \sum_{i=1}^{n} \int Ent_{\mu_i}(f_i) dP.$$

L'affermazione continua ad essere vera anche quando consideriamo la varianza: vale a dire che per ogni funzione f sullo spazio prodotto

$$Var_P(f) \leq \sum_{i=1}^{n} \int Var_{\mu_i}(f_i) dP. \tag{1.15}$$

Uno dei risultati più importanti che abbiamo ottenuto è il seguente:

Teorema 1.0.22. *F una funzione 1-Lipschitz separatamente convessa su $\mathbb{R}^n$. Allora per ogni misura di probabilità prodotto P su $[0, 1]^n$ e per ogni $r \geq 0$,*

$$P\left(\left\{F \geq \int FdP + r\right\}\right) \leq e^{-r^2/4}.$$

Diamo ora un risultato di concentrazione per catene di Markov su spazi discreti:

Sia (Π, μ) una catena di Markov reversibile con misura invariante μ su insieme finito o numerabile X che soddisfa

$$\Pi(x,y) \geq 0 \quad , \quad \sum_{y \in X} \Pi(x,y) = 1 \quad \forall x \in X,$$

$$\Pi(x,y)\mu(\{x\}) \;\text{ è simmetrica in x e y}$$

$$\sum_x \Pi(x,y)\mu(\{x\}) = \mu(\{y\}) \quad \forall \;\text{ y in X.}$$

Definiamo

$$Q(f,f) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in X} [f(x) - f(y)]^2 \,\Pi(x,y)\mu(\{x\})$$

e poniamo

$$|||f|||_\infty^2 = \frac{1}{2} \sup_{x \in X} \sum_{y \in Y} |f(x) - f(y)|^2 \,\Pi(x,y).$$

Dove la norma tripla $|||\cdot|||_\infty$ potrebbe essere vista come la versione discreta della norma Lipschitz negli ambienti continui.

Teorema 1.0.23. *Sia (Π, μ) una catena di Markov reversibile su X, e assumiamo che per qualche costante $C > 0$ e per tutte le funzioni f su X,*

$$Ent_\mu(f^2) \leq 2CQ(f,f).$$

Allora, ogni volta che $|||F|||_\infty \leq 1$, F è integrabile rispetto a μ e per ogni $r \geq 0$,

$$\mu\left(\left\{F \geq \int Fd\mu + r\right\}\right) \leq e^{-r^2/4C}.$$

Capitolo quarto. Nell'ultimo capitolo abbiamo ottenuto risultati di concentrazione per misure di tipo Ising su grafi finiti. Sia $G = (V, E)$ un grafo finito [Mar]. Sia per semplicità $\mathcal{S} = \{-1, +1\}$. Una *configurazione* è un elemento $\sigma \in \Omega = \mathcal{S}^V$, e la variabile σ_x, $x \in X$ sarà chiamata spin in x.

Teorema 1.0.24. *Sia Δ il grado massimo del grafo G. Allora esiste $\beta_0(\Delta)$ tale che $\forall \beta < \beta_0$ esiste $C(\beta)$ indipendente da $\mid V \mid$ tale che*

$$Ent_{\mu^{(\beta)}}(f^2) \leq C(\beta) \int \mid \nabla f \mid^2 d\mu^{(\beta)}.$$

Come applicazione del Teorema precedente consideriamo la magnetizzazione $M = \sum_{x \in V} \sigma_x$, da cui $|||M|||_{Lip}^2 \leq 2 \mid V \mid$, abbiamo dimostrato che

$$\mathbb{P}(M \geq m) \leq \mathrm{e}^{-m^2/8C|V|}.$$

Bibliografia

[AMS94] Shigeki Aida, Takao Masuda, and Ichirō Shigekawa. Logarithmic Sobolev inequalities and exponential integrability. *J. Funct. Anal.*, 126(1):83–101, 1994.

[AS94a] S. Aida and D. Stroock. Moment estimates derived from Poincaré and logarithmic Sobolev inequalities. *Math. Res. Lett.*, 1(1):75–86, 1994.

[AS94b] Shigeki Aida and Ichirō Shigekawa. Logarithmic Sobolev inequalities and spectral gaps: perturbation theory. *J. Funct. Anal.*, 126(2):448–475, 1994.

[BL97] S. Bobkov and M. Ledoux. Poincaré's inequalities and Talagrand's concentration phenomenon for the exponential distribution. *Probab. Theory Related Fields*, 107(3):383–400, 1997.

[DSC96] P. Diaconis and L. Saloff-Coste. Logarithmic Sobolev inequalities for finite Markov chains. *Ann. Appl. Probab.*, 6(3):695–750, 1996.

[GM00] A. A. Giannopoulos and V. D. Milman. Concentration property on probability spaces. *Adv. Math.*, 156(1):77–106, 2000.

[Gro75] Leonard Gross. Logarithmic Sobolev inequalities. *Amer. J. Math.*, 97(4):1061–1083, 1975.

[Gro99] Misha Gromov. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, volume 152 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999. Based on the 1981

French original With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.

[Har66] L. H. Harper. Optimal numberings and isoperimetric problems on graphs. *J. Combinatorial Theory*, 1:385–393, 1966.

[Hoe63] Wassily Hoeffding. Probability inequalities for sums of bounded random variables. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 58:13–30, 1963.

[KLO96] S. Kwapień, R. Latała, and K. Oleszkiewicz. Comparison of moments of sums of independent random variables and differential inequalities. *J. Funct. Anal.*, 136(1):258–268, 1996.

[Led99] Michel Ledoux. Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities. In *Séminaire de Probabilités, XXXIII*, volume 1709 of *Lecture Notes in Math.*, pages 120–216. Springer, Berlin, 1999.

[Led01] Michel Ledoux. *The concentration of measure phenomenon*, volume 89 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[Mar] F. Martinelli. Relaxation times of markov chains in statistical mechanics and combinatorial structures. *Encyclopedia of Mathematical Sciences*, 110.

[Mar98] Katalin Marton. Measure concentration for a class of random processes. *Probab. Theory Related Fields*, 110(3):427–439, 1998.

[Mau91] B. Maurey. Some deviation inequalities. *Geom. Funct. Anal.*, 1(2):188–197, 1991.

[MS86] Vitali D. Milman and Gideon Schechtman. *Asymptotic theory of finite-dimensional normed spaces*, volume 1200 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. With an appendix by M. Gromov.

[Sch03] Gideon Schechtman. Concentration results and applications. In *Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 2*, pages 1603–1634. North-Holland, Amsterdam, 2003.

[Tal96] Michel Talagrand. A new look at independence. *Ann. Probab.*, 24(1):1–34, 1996.

[Wei04] D. Weitz. *Mixing in Space for discrete Spin System*. University of California,Berkeley, 2004.