UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi
della
Tesi di Laurea in Matematica
di

Lavinia Ciotti

Passeggiata Aleatoria con Trappole

Relatore
Prof.ssa Elisabetta Scoppola

ANNO ACCADEMICO 2002 - 2003
Luglio 2003

Classificazione AMS : 60J15
Parole Chiave : random walk, passeggiata aleatoria, ricorrenza.

Lo scopo di questa tesi è quello di affrontare l'analisi di un particolare processo: la passeggiata aleatoria in un ambiente con trappole.

Specifichiamo la peculiarità di questo processo dandone una prima descrizione in un ambiente unidimensionale. Supponiamo di posizionare una particella nell'origine; per ogni istante di tempo successivo, (istanti che vengono indicati con $n = 1, 2, \ldots$), la particella ha due possibilità di movimento ciascuna con probabilità $1/2$: può compiere un passo avanti oppure un passo indietro. Più formalmente, data una successione di variabili aleatorie $X_1, X_2, \ldots$ a valori in $\{+1, -1\}$ tali che $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$ per ogni i intero definiamo come

$$S_n := \sum_{i=0}^{n} X_i$$

la *passeggiata aleatoria (o random walk) semplice e simmetrica in* $\mathbb{Z}$, osservando che S_n indica la posizione della particella a tempo n. Il tipo di processo che proponiamo in questo lavoro è una passeggiata aleatoria che può incorrere in una trappola. Specifichiamo cosa accade in questa eventualità: una particella che in un determinato istante di tempo raggiunge un sito che è una trappola (o come vedremo parte di una trappola) resta ferma con probabilità $1 - e^{-U\beta}$ dove $U > 0$, $\beta >> 0$ e fa un passo a sinistra o a destra entrambi con probabilità $\frac{1}{2}e^{-U\beta}$.

Lo studio di questo processo riveste una notevole importanza nell'analisi dei sistemi di particelle interagenti. Questo lavoro infatti prende spunto dall'articolo proposto da Den Hollander, Olivieri, Scoppola [1] nel quale si affronta lo studio di un sistema bidimensionale di particelle interagenti secondo la *dinamica di Kawasaki*. Più precisamente viene considerato un gas di particelle a temperatura $\frac{1}{\beta}$, che è libero al di fuori di una scatola finita $\overline{\Lambda}$, ed è in interazione con un'energia di legame U dentro la scatola. Questo vuol dire che il moto del gas fuori di $\overline{\Lambda}$ è descritto in termini di un gas di random walks indipendenti, mentre all'interno della scatola il moto è descritto con una particolare dinamica che viene detta *dinamica di Kawasaki*.

Lo studio della passeggiata aleatoria con trappole, che indicheremo con S_n^T, costituisce uno strumento importante per l'analisi di problemi di questo tipo;

ogni visita della particella nella trappola può essere infatti interpretata come un'interazione con un'energia di legame.
Nell'articolo sopra citato è presente una prima stima dell'andamento del processo S_n^T nella trappola. Nel presente lavoro ci occupiamo di calcolare una serie di stime ai fini di fornire un'approssimazione per n esponenzialmente grande dell'andamento di questo processo sia in ambito bidimensionale che tridimensionale.
Nota: Precisamente per n esponenzialmente grande si intende $U < \frac{1}{\beta} \log n < C$ dove $0 < U < C < \infty$.

L'impostazione di questa tesi è fondamentalmente didattica, infatti, per quanto è possibile, proponiamo determinati argomenti cercando di presentare dal punto di vista più elementare tutti gli strumenti finalizzati alla comprensione del risultato finale.

Il primo capitolo è focalizzato sugli strumenti base del nostro argomento cioè sugli elementi di calcolo delle probabilità[1]. In particolare poniamo l'accento sulle caratteristiche che può assumere un qualunque processo stocastico soffermandoci sui concetti di *martingala* e *catena di Markov*, introducendo la passeggiata aleatoria e dimostrando che è una martingala.

Il secondo capitolo[2] parte da una definizione formale di passeggiata aleatoria

Definizione. *Una passeggiata aleatoria d-dimensionale S_n è una catena di Markov associata alla probabilità di transizione $p(x, y)$ così definita:*

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & se\ |x - y| = 1 \\ 0 & se\ |x - y| \neq 1 \end{cases}$$

dove ricordiamo che

$$\mathbb{P}(S_1 = x_1 | S_0 = x_0) = p(x_0 x_1)$$

$$\mathbb{P}(S_n = x_n | S_0 = x_0) = p_n(x_0 x_n)$$

[1] Seguiamo principalmente [2],[3] e [4]
[2] Risultati tratti da [5]

In secondo luogo precisiamo che

Definizione. *Una passeggiata aleatoria si dice* ***ricorrente*** *se torna infinite volte*[3] *nell'origine, altrimenti la passeggiata aleatoria si dice* ***transiente****.*

L'obiettivo principale di questo capitolo è quello di dimostrare il seguente teorema noto come *teorema di ricorrenza*.

Teorema. Ricorrenza (Pólya 1921)
Sia S_n una passeggiata aleatoria in $\mathbb{Z}^d$ $\quad (d \geq 1)$ si ha :

$$\mathbb{P}(S_n = 0 \ i.o.) = \begin{cases} 1 & se\ (d \leq 2) \\ 0 & se\ (d > 2) \end{cases}$$

Trattiamo in primo luogo il caso unidimensionale poi estendiamo lo stesso tipo di argomento ad ambiti dimensionali più interessanti.
Di questo teorema diamo diverse dimostrazioni che si basano fondalmente su

- distribuzioni esatte e distribuzioni limite per S_n, cioè formulazioni esatte e approssimazioni per la quantità

  $$\mathbb{P}(S_n = x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{Z}^d$$

  in particolare per $x = 0$;
- applicazione della teoria delle martingale;
- lemmi di Borel-Cantelli;
- formalismo delle funzioni generatrici;
- Legge 0-1.

Nel terzo capitolo analizziamo innanzitutto la struttura di un ambiente con trappole. Un ambiente aleatorio con trappola A può assumere diverse caratteristiche

- $A = \{x\}$ con $x \in \mathbb{Z}^d$ $\quad$ (usualmente prenderemo $x = 0$);

[3] utilizzeremo la notazione *i.o.* che sta per *infinitely often* (infinitamente spesso)

- A è una regione finita intorno ad un punto;
- A è un' unione di regioni finite;
- A è aleatoria con distribuzione data, ad esempio $e^{-\Delta\beta}$ cioè

$$\mathbb{P}(x \text{ è una trappola}) = e^{-\Delta\beta}.$$

In questo lavoro analizzeremo dettagliatamente il primo caso, e proporremo diverse considerazioni riguardo il secondo caso.
Dunque definiamo formalmente la passeggiata aleatoria con trappole S_n^T

Definizione. *Una passeggiata aleatoria con trappole è una catena di Markov S_n^T cui è associata la probabilità di transizione*

$$p^T(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & se\ |x-y| = 1\ e\ x \notin A \\ 0 & se\ |x-y| > 1\ oppure\ x = y \notin A \\ 1 - e^{-U\beta} & se\ x = y \in A \\ \frac{1}{2d}e^{-U\beta} & se\ x \in A\ e\ |x-y| = 1 \end{cases}$$

Diamo poi un'interpretazione del processo con trappole in ambito continuo proponendo il seguente modello:
supponiamo che le transizioni della particella vengono governate dagli squilli di un orologio tale che

- I tempi che intercorrono tra ogni coppia di squilli successivi sono variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite secondo una legge che in generale viene chiamata *densità del tempo di attesa.* Nel nostro caso la densità è di tipo esponenziale di parametro 1
($\psi(t) = \exp(-t)\mathbb{I}_{t>0}$).
- Ad ogni squillo dell'orologio è associata una transizione.
- Quando la particella arriva nella trappola pensiamo che l'orologio squilli secondo una legge rallentata, quindi la particella viene trattenuta nel sito per più tempo. Precisamente la densità del tempo di attesa nella trappola è di tipo esponenziale di parametro $e^{U\beta}$
($\psi(t) = e^{U\beta}\exp(-e^{U\beta}t)\mathbb{I}_{t>0}$).

- Calcolando la media di queste variabili si ottiene che la particella resta in un sito che non appartiene ad A per un tempo che in media è uguale a 1 (congruenza con il caso discreto), mentre resta in un sito appartenente ad A per un tempo che in media è uguale a $e^{U\beta}$.

Questo schema trae spunto dal modello di Montroll-Weiss riguardo cui riportiamo in sintesi alcuni risultati tratti da [6].
In secondo luogo proponiamo un'analisi della struttura del nostro problema. In particolare ci chiediamo come si evolve il processo S_n^T rispetto ad una passeggiata aleatoria semplice e simmetrica S_n.
Per semplicità assumiamo che la trappola A sia in un solo punto. Supponiamo che i due processi S_n e S_n^T partano da uno stesso punto x che non sia una trappola. Sia

$$\tau_0 = \min\{n > 0 : \; S_n^T = A\}$$

ovviamente

$$S_n = S_n^T \qquad \forall\, n \in [0, \tau_0].$$

Ci chiediamo per quanto tempo la particella che si muove secondo S_n^T resta ferma nella trappola. Poichè sappiamo che si ferma con probabilità $p = 1 - e^{-U\beta}$ mentre continua il suo cammino con probabilità $p = e^{-U\beta}$, possiamo dare una formulazione per il tempo di uscita dalla trappola che indicheremo con σ_0. Diciamo che

$$\sigma_0 = \min\{i > 0 : \; \zeta_i < e^{-U\beta}\}$$

dove ζ_i sono variabili indipendenti e distribuite uniformemente sull'intervallo $[0, 1]$ cioè $\zeta_i \sim Un[0, 1]$.
A questo punto è ovvio che

$$S_n^T = A \qquad \forall\, n \in [\tau_0, \tau_0 + \sigma_0)$$

mentre nel medesimo intervallo S_n ha continuato ad evolversi. Trascorso il tempo σ_0, S_n^T riprende a muoversi come un random walk semplice fino al tempo

$$\tau_1 = \min\{n > \tau_0 + \sigma_0 : \; S_n^T = A\}$$

al quale la particella resterà intrappolata per un tempo σ_1 e così via.
Se si escludono gli intervalli di tempo di permanenza nei siti trappola, S_n^T si evolve come un random walk libero. Più precisamente possiamo ottenere S_n^T da S_n per $n \in [\tau_0 + \sigma_0, \tau_1]$ con una traslazione del tipo

$$S_n^T = S_n - S_{\tau_0+\sigma_0} \qquad \forall\, n \in [\tau_0 + \sigma_0, \tau_1]$$

Nota: Le variabili σ_k indicano il tempo di uscita dalla trappola, quindi anche quello di permanenza poichè se $\sigma_k = s$, allora il tempo di permanenza è $s-1$.

Alla luce di queste considerazioni osserviamo che S_n^T è un processo ritardato rispetto al processo S_n. Quindi l'idea che utilizziamo nell'analisi dell'andamento del processo con trappole è quella di studiare S_n^T rispetto ad S_n, processo per il quale sono note diverse proprietà. Questo tipo di analisi è possibile però, purchè si controlli il ritardo del processo S_n^T. Per fare questo dobbiamo prestare attenzione al tempo speso nella trappola per ogni ritorno e quindi anche al numero dei ritorni stesso.

Nel quarto capitolo ci proponiamo di calcolare l'andamento di S_n^T dove la trappola A coincide con l'origine. Dunque in primo luogo analizziamo diversi risultati che ci permettono di controllare il tempo che la particella perde nella trappola.

Osservazione. Indichiamo con $\mathbb{P}_x$ la misura di probabilità associata al processo che parte da un punto $x \neq 0$. In questo caso prendiamo x tale che $|x| = 1$, ma i risultati ottenuti valgono per ogni x a distanza finita dall'origine.

• Innanzitutto osserviamo che per come sono state definite, le variabili σ_k $k = 1, 2, \ldots$ hanno distribuzione geometrica di parametro $p = e^{-U\beta}$. Con questo risultato dimostriamo poi che[4]

1. $\mathbb{P}_x(\sigma_k > \frac{1}{p} e^{\delta\beta}) = SES$

[4] Una funzione f tale che $\beta \longmapsto f(\beta)$ si dice *superexponentially small (SES)* in β se $\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \log f(\beta) = -\infty$

Analizzando alcuni risultati sui *tempi locali* (per definizione i tempi spesi in un sito) per S_n, indicando con $\nu_n(0)$ il numero dei ritorni in 0 otteniamo

2. $\mathbb{P}_x(\nu_n(0) > (\log n)^\alpha) = SES \quad \forall\, \alpha > 2$

Studiamo inoltre le proprietà di un tempo preciso: il *tempo di primo ritorno nell'origine* calcolando stime sia in due che in tre dimensioni della quantità

3. $\mathbb{P}_x(\tau_0 = n)$

• Utilizzando questi tre risultati calcoliamo in ambito bidimensionale e tridimensionale stime dal basso e dall'alto per la quantità

$$\mathbb{P}_x(S_n^T = y)$$

sia nel caso in cui y è la trappola, sia nel caso in cui y è a distanza finita dalla trappola.
Per ciascuna stima da calcolare procediamo con l'intersecare l'evento $\{S_n^T = y\}$ con unioni di eventi disgiunti che costituiscono una partizione di un evento certo (eventi che riguarderanno il numero dei ritorni o il tempo speso nella trappola), dove tramite queste intersezioni poi possiamo utilizzare i risultati calcolati in precedenza.

In conclusione si ottiene che per n esponenzialmente grande
in $\mathbb{Z}^2$

$$\mathbb{P}(S_n^T = y) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{con } y \neq 0 \\[2ex] \dfrac{1}{n} e^{U\beta} & \text{con } y = 0 \end{cases}$$

invece in $\mathbb{Z}^3$

$$\mathbb{P}(S_n^T = y) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{n^{3/2}} & \text{con } y \neq 0 \\[2ex] \dfrac{1}{n^{3/2}} e^{U\beta} & \text{con } y = 0 \end{cases}$$

Nel quinto capitolo facciamo alcune considerazioni riguardo l'andamento di S_n^T con trappola in una regione finita. Questo caso è infatti un'estensione del

precedente.
Il fattore che varia maggiormente, che quindi analizziamo in dettaglio, è il tempo di permanenza nella trappola.
Sappiamo che per ogni sito appartenente ad A il tempo di uscita è dato dalle variabili σ_k sopra definite, ma dobbiamo considerare il fatto che una volta che la particella si sposta da questo sito può ancora rimanere nella trappola con una conseguente ulteriore permanenza.
Per questo motivo indichiamo con $\theta_k \quad k = 1, 2, \ldots$ i tempi di uscita da A dopo ogni singolo ritorno e utilizzando risultati riguardo il tempo di uscita da una regione finita per un random walk semplice, otteniamo un risultato analogo a quello già calcolato per le σ_k:

- $\mathbb{P}_x(\theta_k > n) = SES \qquad \forall\, n \text{ t.c. } \frac{1}{\beta} \log n > U$

In secondo luogo, in questo capitolo calcoliamo stime in ambito bidimensionale e tridimensionale per l'andamento di S_n, supponendo che il punto di partenza x appartenga alla frontiera esterna di A.
Più precisamente calcoliamo stime dal basso per le quantità

1. $\min\limits_{x \in \partial^+ A} \mathbb{P}_x(S_n^T = y)$ con $y \notin A$
2. $\min\limits_{x \in \partial^+ A} \mathbb{P}(S_n^T \in A)$

e stime dall'alto per le quantità

3. $\max\limits_{x \in \partial^+ A} \mathbb{P}_x(S_n^T = y)$ con $y \notin A$
4. $\max\limits_{x \in \partial^+ A} \mathbb{P}(S_n^T \in A)$

dove

$$\partial^+ A = \{x : \; x \notin A \text{ e } \exists\, y \in A \text{ t.c. } |x - y| = 1\}$$

è la frontiera esterna di A.
Il procedimento finalizzato al calcolo di queste stime è sostanzialmente analogo a quello del caso della trappola puntiforme. Per questo motivo, le dimostrazioni non vengono proposte in maniera dettagliata, bensì discorsiva

riassumendo semplicemente lo schema dimostrativo.

Concludiamo affermando che per n esponenzialmente grande, preso comunque un punto y a distanza finita da A si ha
in $\mathbb{Z}^2$

$$\mathbb{P}(S_n^T = y) \sim \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{P}(S_n^T \in A) \sim \frac{1}{n} e^{U\beta}$$

invece in $\mathbb{Z}^3$

$$\mathbb{P}(S_n^T = y) \sim \frac{1}{n^{3/2}}$$

$$\mathbb{P}(S_n^T \in A) \sim \frac{1}{n^{3/2}} e^{U\beta}.$$

Riferimenti bibliografici

[1] F. den Hollander, E. Olivieri, and E. Scoppola. Metastability and nucleation for conservative dynamics. *J. Math. Phys.*, 41(3):1424–1498, 2000. Probabilistic techniques in equilibrium and nonequilibrium statistical physics.

[2] David Williams. *Probability with martingales.* Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[3] Stewart N. Ethier and Thomas G. Kurtz. *Markov processes.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1986. Characterization and convergence.

[4] John Lamperti. *Stochastic processes.* Springer-Verlag, New York, 1977. A survey of the mathematical theory, Applied Mathematical Sciences, Vol. 23.

[5] Pál Révész. *Random walk in random and non random environments.* World Scientific Publishing Co. Inc., Teaneck, NJ, 1990.

[6] Barry D. Hughes. *Random walks and random environments. Vol. 1.* Oxford Science Publications. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995. Random walks.

[7] Thomas M. Liggett. *Interacting particle systems*, volume 276 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1985.

[8] C. Celegato. *Il Teorema di Ricorrenza per Passeggiate Aleatorie*. Tesi di Laurea in Matematica. Università degli Studi Roma Tre, Ottobre 2002.

[9] Enrico Giusti. *Analisi matematica. 1.* Programma di Matematica, Fisica, Elettronica. [Program of Mathematics, Physics, Electronics]. Editore Boringhieri, Turin, second edition, 1988.

[10] A. N. Shiryaev. *Probability*, volume 95 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1996. Translated from the first (1980) Russian edition by R. P. Boas.

[11] P. Erdős and S. J. Taylor. Some problems concerning the structure of random walk paths. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 11:137–162. (unbound insert), 1960.

[12] Barry D. Hughes. *Random walks and random environments. Vol. 2*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1996. Random environments.

[13] H. Kesten and F. Spitzer. Ratio theorems for random walks. I. *J. Analyse Math.*, 11:285–322, 1963.

[14] Harry Kesten. Ratio theorems for random walks. II. *J. Analyse Math.*, 11:323–379, 1963.

[15] A. Dvoretzky and P. Erdös. Some problems on random walk in space. In *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950.*, pages 353–367, Berkeley and Los Angeles, 1951. University of California Press.

[16] Frank Spitzer. *Principles of random walks*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1976. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 34.

[17] Gregory F. Lawler. *Intersections of random walks*. Probability and its Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1991.