UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della tesi di Laurea in Matematica
di

Eleonora Coppola

Le serie di Lindstedt in "Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste" di H. Poincaré

Relatore

Prof. Corrado Falcolini

ANNO ACCADEMICO 2002 - 2003
Luglio 2003

Classificazione AMS : 37J40, 40A05, 70F05, 70F07, 70F15, 70H05, 70H15.
Parole Chiave : Sistemi hamiltoniani, trasformazioni canoniche, problema dei tre corpi, serie di Lindstedt, piccoli divisori, termini secolari.

Cenni storici

Sebbene le sue origini si possano far risalire ai primi tentativi di spiegare l'evidente irregolarità del moto dei pianeti, la **meccanica celeste**, così come la intendiamo attualmente, nacque nel 1687 con i *"Principia"* di Newton. Nel 1799 Laplace introdusse il termine "meccanica celeste" per descrivere quel ramo dell'astronomia che si occupava del moto dei corpi celesti sotto l'influenza della forza gravitazionale. Essa è studiata e sviluppata da astronomi e matematici, quindi si presta ad essere analizzata da molteplici punti di vista: l'analisi numerica, la teoria dei sistemi dinamici, delle perturbazioni, dello studio qualitativo e quantitativo delle equazioni differenziali, ed altri.

Verso la fine del '700, i grandi matematici francesi, primo fra tutti Lagrange, svilupparono quella che è ora chiamata "meccanica celeste", cioè lo studio delle perturbazioni che i vari pianeti del sistema solare generano a vicenda modificando e complicando notevolmente i calcoli delle orbite al punto che le soluzioni possono essere solo approssimate e mai esatte.

La meccanica celeste è una disciplina di grandi e nobili tradizioni. Dopo i trionfi del XIX secolo, essa ebbe, tra la fine dell'800 e l'inizio del '900, una splendida collocazione nei trattati di Tisserand e Poincaré, che ne costituirono, e tuttora costituiscono, un fondamentale punto di riferimento.

Un problema molto importante in questo campo è quello dei *tre corpi*. Esso può essere enunciato, in maniera deterministica, nel seguente modo: date tre particelle nello spazio, che si muovono sotto la loro mutua attrazione gravitazionale, e note le loro condizioni iniziali, determinare l'evoluzione del loro moto. L'enunciato è semplice, ma la soluzione è difficile. Per comprenderne l'importanza, basta considerare che negli ultimi 250 anni, le menti di valenti ricercatori sono state impegnate nella sua risoluzione, portando ad innumerevoli sviluppi in numerosi campi. Già negli scritti di Newton si trova un primo approccio al problema che viene poi sviluppato da Laplace, Lagrange e Eulero.

Nel 1912, un matematico astronomo finlandese, Karl Sundman, risolse il problema dei tre corpi fornendone una soluzione scritta come serie di potenze convergenti per ogni tempo. Tuttavia, la soluzione di Sundman non fornisce informazioni qualitative circa il comportamento del sistema. Infatti, essa rappresenta la soluzione analitica del problema ma non mette in luce né l'andamento generale, né le caratteristiche peculiari del movimento.

Dalla metà del XIX secolo, si abbandonò definitivamente l'idea di trovare una soluzione esatta per il problema dei tre corpi, di conseguenza, l'obiettivo diventò migliorare le approssimazioni che si ottenevano dalla soluzione di equazioni differenziali data come serie infinita. A tal fine si tentò di eliminare i *termini secolari* (ossia i termini che crescono o decrescono indefinitamente con il tempo), costruendo sviluppi in serie nei quali la variabile tempo compariva solamente all'interno di termini periodici.[1] I principali studiosi furono Lagrange e Laplace, seguiti cronologicamente da Hill, Delaunay, Newcomb, Lindstedt, Gyldén, Tisserand, Bohlin e Poincaré. Un'opera in 3 volumi, tuttora utilizzata nello studio di questi metodi è "**Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste**" di H. Poincaré, in cui, egli raccoglie, critica e sviluppa tutti questi procedimenti teorici. In tali studi, dovuti a Newcomb, Lindstedt, Gyldén, Tisserand e Bohlin, non fu considerata affatto l'eventuale convergenza delle serie in questione, infatti, la particolarità dei metodi usati è che conducono a delle serie divergenti. Il motivo della divergenza di queste serie, sono i cosiddetti *piccoli divisori*: combinazioni lineari intere di frequenze dei moti non perturbati, che compaiono come denominatori nel calcolo dell'influenza delle perturbazioni. Nonostante ciò, Weierstrass cercò di dimostrare la convergenza di tali serie; dopo molti tentativi, privi di successo, egli suggerì tale problema al matematico svedese Gösta Mittag-Leffler. Quest'ultimo convinse il re Oscar II di Svezia e Norvegia ad offrire un premio al risolutore, in occasione del suo 60^{mo} compleanno. Una giuria internazionale (composta da Karl Weierstrass, Charles Hermite e Mittag-Leffler stesso), nel 1889, giudicò vincitore il lavoro di Poincaré: *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique.* In realtà egli non fornì una soluzione al problema posto, ma provò che in tal caso, non era possibile integrare analiticamente le equazioni di Newton.

[1] La presenza dei termini secolari può essere ingannevole, ad esempio, se la vera soluzione contiene un termine in $\sin at$, la serie conterrà termini con potenze dispari di at.

Poincaré diede un notevole contributo in questo campo, come in altri della fisica-matematica. Egli risolse numerose problematiche complesse: dimostrò che la maggior parte delle serie fino ad allora usate in meccanica celeste, non erano convergenti. Infatti, l'andamento nei termini successivi (al crescere del tempo) era il seguente: dapprima decrescevano rapidamente, dando l'illusione della convergenza, poi crescevano. Pertanto, in un piccolo intorno dell'istante iniziale risultavano convergenti e molto utili per gli scopi dell'astronomia (calcolo delle effemeridi dei pianeti e satelliti); non si può dire altrettanto per i problemi cosiddetti asintotici, ossia per previsioni in grandi intervalli di tempo. Poincaré affermava quindi l'impossibilità di integrare le equazioni del moto dei tre corpi soggetti alla loro mutua attrazione gravitazionale e mostrò, anche se non rigorosamente, che non era possibile determinare una soluzione che rappresentasse il moto dei pianeti valida su un intervallo di tempo infinito, poiché le serie usate dagli astronomi per calcolare il moto dei pianeti non erano effettivamente convergenti, come invece erroneamente si pensava, ma anzi sembravano divergenti. Questa controversia era generata da una differente interpretazione della parola "convergenza". In generale, gli astronomi erano più affascinati dal calcolo numerico e dalle osservazioni fenomenologiche rispetto alla ricerca teorica, quindi consideravano una serie convergente se i termini che avevano calcolato esplicitamente decrescevano rapidamente, senza interessarsi del comportamento di tutti gli altri. Contrariamente, i matematici, considerano una serie convergente se ciò può essere provato rigorosamente. Poincaré non espresse un giudizio su chi, tra matematici e astronomi, avesse ragione; egli considerava validi nei loro rispettivi campi, entrambi gli approcci: il primo nelle ricerche teoriche e il secondo nelle applicazioni numeriche:

> *Les deux règles sont légitimes: la première dans les recherches théoriques; la seconde dans les applications numériques. . .*[2]

Il problema derivava dal fatto che per le applicazioni pratiche la differenza tra i due punti di vista non era facilmente confrontabile con le osservazioni

[2] *Le due regole sono legittime: la prima nelle ricerche teoriche, la seconda nelle applicazioni numeriche. . .* [26] § 118, pag. 3.

e solo più tardi divenne chiaro che la maggior parte delle serie considerate come soluzioni non erano convergenti nel senso rigoroso del termine. Se le serie erano divergenti, allora, in generale, non avrebbero potuto fornire un'approssimazione abbastanza vicina. Sebbene Poincaré avesse fiducia nei risultati ottenuti dagli astronomi, fu il primo a provare la divergenza delle loro serie.

Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste

Nell'occasione della presentazione della medaglia del Royal Astronomical Society a Poincaré nel 1900, G. Darwin in *Presentation of the medal of the Royal Astronomical Society to M. Henri Poincaré*, descrivendo "Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste", scrisse:

> *It is probable that for half a century to come it will be the mine from which humbler investigators will excavate their materials.*[3]

Egli era in qualche modo conservativo nella sua visione, infatti, se avesse omesso la parola "mezzo", la sua previsione sarebbe ancora valida. Dalla sua pubblicazione, quasi cento anni fa, "Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste" di Poincaré continua ad attrarre e deliziare matematici, fornendo una ricca varietà di risorse per le ricerche nella meccanica celeste e nei sistemi dinamici.

Contenuto della tesi:

La stesura di questa tesi non è stato un lavoro semplice, perché, leggendo i libri di Poincaré, ci siamo trovati di fronte ad una notazione completamente diversa da quella moderna e quindi anche ad un linguaggio poco usato. Inoltre, la lettura è risultata particolarmente difficile a causa degli errori di

[3] *E' probabile che per mezzo secolo a venire sarà la miniera da cui più umili investigatori estrarrano i loro materiali.*

stampa (di cui riportiamo una lista, probabilmente incompleta, alla fine di questa sintesi). Il testo di Poincaré è molto discorsivo, nel senso che non vengono usate parole chiave come *teorema*, *proposizione*, *dimostrazione*, *definizione* e così via, quindi spesso è difficile capire cosa vuole dire l'autore. Inoltre, siamo dovuti ricorrere alla lettura di alcuni paragrafi del primo tomo che, proprio per la loro utilità, sono stati trascritti all'interno della tesi. Una lettura utile è stata l'introduzione alla versione inglese di [26] di D. L. Goroff. Egli infatti fa dei richiami utili che Poincaré non fa, ma anche in questa versione sono presenti parecchi errori, sia nella parte introduttiva che nella traduzione dalla versione francese.

In questa tesi, sottolineremo alcuni aspetti trattati nel secondo volume di "Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste", in particolare, ci soffermeremo sui capitoli riguardanti il metodo di A. Lindstedt.
In *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg* (1882), Lindstedt espone un metodo per integrare un'importante classe di equazioni differenziali che compaiono frequentemente nella meccanica celeste, in particolare nella teoria delle perturbazioni:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \mu\varphi(x,t),$$

dove μ è molto piccolo e $\varphi(x,t)$ è una funzione sviluppata in potenze di x con coefficienti periodici in t. Egli applicò questo metodo per trovare serie trigonometriche che fossero soluzioni del problema dei tre corpi (*Sur la forme des expansions des distances mutuelles dans le problème des trois corps*, Comptes Rendus (1883)). Partì dalle equazioni trovate da Lagrange nel 1772 e assunse che le eccentricità, il rapporto dei raggi vettori e le inclinazioni di due dei corpi fossero sufficientemente piccoli. Ridusse così il sistema a quattro equazioni dfferenziali del secondo ordine che risolse per approssimazioni successive, eliminando tutti i termini secolari in modo tale che il tempo comparisse solo negli argomenti delle funzioni periodiche. In questo modo ottenne le coordinate del terzo corpo come serie trigonometriche di quattro argomenti ognuno dei quali era una funzione lineare del tempo. Assunse poi, sbagliando, che fosse possibile scegliere le costanti di integrazione in modo tale che la convergenza della serie fosse assicurata.

- Nel *primo capitolo* vengono richiamate alcune nozioni di base della meccanica hamiltoniana: alcune generalità sulle equazioni differenziali, equazioni canoniche, equazioni di Hamilton, parentesi di Poisson e Lagrange, teoria di Hamilton-Jacobi.

- Nel *secondo capitolo* viene esposto in generale il problema dei tre corpi e le sue semplificazioni: problema ristretto e caso generale. Inoltre, si parla anche di problema generale della dinamica, di sistemi completamente integrabili e di variabili di Delaunay, che serviranno nell'ultimo capitolo. [26] Vol. 1 § 8, § 10-13.

- Nel *terzo capitolo* si entra nel merito dello scopo della tesi trattando in generale le serie di Lindstedt discutendone le caratteristiche, e cercando prima di dare una piccola introduzione storica del problema, a partire da come fu affrontato da Lagrange e Laplace tra il 1773 e il 1784. Un paragrafo è interamente dedicato al dibattito tra gli astronomi e i matematici riguardo la convergenza delle serie. Infatti, Poincaré sottolinea l'importanza della natura dell'incomprensione tra i matematici e gli astronomi riguardo la convergenza delle serie trovate, che esprimono le coordinate dei pianeti.

- Nel *quarto capitolo* viene esplicitamente esposto il metodo di Lindstedt. Seguendo [26] $\S 118, \S 120-128$, si fa vedere che le equazioni canoniche sono soddisfatte formalmente da determinate serie (serie di Lindstedt), e si cerca di studiarne i coefficienti.

- Nel *quinto capitolo* viene descritta un'applicazione al problema dei tre corpi usando il metodo studiato. [26] $\S 130-131, \S 133, \S 136-138, \S 140-141$.

Risultati principali

Osservazione. *D'ora in avanti* <u>*useremo le notazioni di Poincaré*</u>*, e quindi, per descrivere un sistema con* p ***gradi di libertà****, avremo* p *coppie di variabili*

*x_i e y_i e una funzione F di queste $2p$ variabili, ora conosciuta come **funzione Hamiltoniana**, e il seguente sistema hamiltoniano di $2p$ equazioni differenziali del primo ordine:*

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, p.$$

*Queste equazioni sono dette in **forma canonica** e lo spazio di dimensione $2p$ che corrisponde a tutti i possibili valori delle variabili è detto **spazio delle fasi** del sistema. Nella notazione moderna, le variabili coniugate si indicano con i simboli p_i per le x_i e q_i per le y_i e l'Hamiltoniana con $\mathcal{H}$.*

- Poincaré studia il **problema generale della dinamica**, ([26] Vol.1 § 13), che può essere riassunto nel seguente modo.

  Sia $D \subset \mathbb{R}^p$ un insieme aperto, $\mathbb{T}^p = \mathbb{R}^p/(2\pi\mathbb{Z}^p)$ un toro p-dimensionale; $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p) \in D$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$. Consideriamo l'Hamiltoniana $F : D \times \mathbb{T}^p \to \mathbb{R}$. Il *problema generale della dinamica*, secondo Poincaré, è lo studio di una famiglia $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mu)$ dipendente analiticamente da un piccolo parametro μ integrabile per $\mu = 0$:

  $$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mu) = F_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

  Consideriamo le equazioni di Hamilton:

  $$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \quad i = 1, \ldots, p, \tag{1}$$

  poiché F_0 dipende solo da $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)$, le equazioni canoniche (1) possono essere integrate se $\mu = 0$. Supponiamo che ci siano solo tre gradi di libertà. Le equazioni (1) si riducono a:

  $$\frac{dx_i}{dt} = 0, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F_0}{\partial x_i} = n_i, \quad i = 1, 2, 3$$

  dove x_i e n_i sono costanti.
  Quindi, se $\mu = 0$, le (1) ammettono come soluzioni

  $$\begin{cases} x_1 = \alpha_1, \; x_2 = \alpha_2, \; x_3 = \alpha_3 \\ y_1 = n_1 t + \bar{\omega}_1, \; y_2 = n_2 t + \bar{\omega}_2, \; y_3 = n_3 t + \bar{\omega}_3, \end{cases}$$

dove α_i e $\bar{\omega}_i$ sono costanti di integrazione e n_i sono funzioni di α_i. Se n_1T, n_2T, n_3T sono multipli di 2π, questa soluzione è periodica di periodo T.
Il problema generale della dinamica con $\mu = 0$ fornisce un esempio di ciò che potremmo chiamare un sistema completamente integrabile e rappresenta un chiaro caso in cui possiamo scrivere le soluzioni in maniera esplicita.

- Passiamo ora a parlare del soggetto di questa tesi: il **metodo di Lindstedt**.

  L'idea di base del metodo di Lindstedt, consiste nel considerare una famiglia di funzioni quasi-periodiche dipendenti dal parametro μ e nell'imporre che essa sia una soluzione delle nostre equazioni del moto.

  Il problema è vedere se le serie ottenute convergono o meno, e ciò fu ampliamente studiato da Poincaré, che considerò soluzioni formali quasi-periodiche, concludendo che tali serie sono probabilmente divergenti:

  > *M. Lindstedt ne démontrait pas la convergence des développements qu'il avait ainsi formés, et, en effet, ils sont divergentes*[4]

  riconoscendo comunque che la sua discussione non era sufficiente per stabilirlo con rigore:

  > *...Il semble donc permis de conclure que les séries (2) ne convergent pas. Toutfois le raisonnement qui précède ne suffit pas pour établir ce point avec une rigueur complète.*[5]

  Supponendo $\left|\frac{\partial F_0^2}{\partial x_i^2}\right| \neq 0$ e le frequenze $n_i^0 = -\frac{\partial F_0}{\partial x_i}(x^0)$ irrazionali, le

[4] *Lindstedt non dimostrò la convergenza degli sviluppi che aveva trovato, infatti, essi sono divergenti.* [26] § 123, pag. 15.

[5] *Quindi, sembra che sia permesso concludere che le serie (2) non convergono. Tuttavia il ragionamento che precede non è sufficiente a stabilire questo punto con un rigore completo.* [26] § 149, pag. 103.

soluzioni formali del problema generale della dinamica sono:

$$\begin{cases} x_i = x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \cdots \\ y_i = w_i + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \cdots \end{cases} \tag{2}$$

dove $w_i = n_i t + \bar{\omega}_i$; $\bar{\omega}_i$ e x_i^0 sono costanti di integrazione determinate dalle condizioni iniziali; le frequenze n_i dipendono da x_i^0 e sono sviluppabili in potenze di μ e i coefficienti x_i^k e y_i^k dipendono in modo arbitrario da x_i^0, sono indipendenti da $\bar{\omega}_i$ e sono funzioni periodiche di periodo 2π rispetto ad ogni w_i. Soluzioni formali di questo tipo sono dette **serie di Lindstedt**.

- Nel capitolo 4 abbiamo riportato la dimostrazione della seguente proposizione (§ 125 [26]):

Proposizione. *Consideriamo:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \dfrac{dy_i}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial x_i} \quad i = 1, \ldots, n \\ F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \cdots \end{cases} \tag{3}$$

con $F_0 = F_0(\mathbf{x})$ *e con* $F_1, F_2, \ldots$ *funzioni periodiche di periodo* 2π *rispetto a* $\mathbf{y}$. *Le*

$$\begin{cases} x_i = x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \cdots + \mu^n x_i^n + \cdots \\ y_i = y_i^0 + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \cdots + \mu^n y_i^n + \cdots \end{cases} \tag{4}$$

dove x_i^k *e* y_i^k *sono del tipo:*

$$\begin{cases} x_i^k(t) = \displaystyle\sum_{h \in \mathbb{N}} A \cos(ht) + \sum_{h \in \mathbb{N}} B \sin(ht) + C \\ y_i^k(t) = \displaystyle\sum_{h \in \mathbb{N}} A' \cos(ht) + \sum_{h \in \mathbb{N}} B' \sin(ht) + C't + D' \end{cases}$$

con A, B, C, A', B', C', D' *coefficienti indipendenti da* μ *e da* t*,* h *coefficienti dipendenti da* μ *e sviluppabili secondo le sue potenze, soddisfano formalmente* (3)*.*

La dimostrazione è divisa in passi, cerchiamo di riassumerli:

Dimostrazione. Passo I: Risolviamo

$$F\left(\frac{\partial S}{\partial y_1}, \frac{\partial S}{\partial y_2}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial y_n}, y_1, \ldots, y_n\right) = C = C_0 + \mu C_1 + \mu^2 C_2 + \cdots, \quad (5)$$

dove S è tale che

$$S = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \cdots, \quad (6)$$

i cui coefficienti S_k sono essi stessi serie del tipo:

$$S_k = \alpha_{k,1} y_1 + \alpha_{k,2} y_2 + \cdots + \alpha_{k,n} y_n + \varphi_k,$$

con $\alpha_{k,i}$ coefficienti costanti e φ_k funzione di $y_1, \ldots, y_n$ periodica di periodo 2π rispetto a queste n variabili.
Ponendo $\mu = 0$ si trova S_0 e uguagliando i coefficienti delle potenze simili di μ nei due membri di (5) si ottiene una serie di equazioni che permettono di determinare per ricorrenza $S_1, S_2, \ldots, S_p, \ldots$.
Passo II: Sia

$$\Sigma_p = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \cdots + \mu^p S_p$$

e poniamo

$$\frac{\partial \Sigma_p}{\partial y_i} = x_i, \quad \frac{\partial \Sigma_p}{\partial x_i^0} = w_i. \quad (7)$$

Se al posto di x_i e y_i consideriamo come nuove variabili x_i^0 e w_i, per il *secondo Teorema di Jacobi*, le equazioni resteranno canoniche e avremo:

$$\frac{dx_i^0}{dt} = \frac{\partial F}{\partial w_i}, \quad \frac{dw_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i^0} \quad \text{per } \; i = 1, \ldots, n. \quad (8)$$

Passo III: Troviamo la forma di F in funzione delle nuove variabili x_i^0 e w_i. Per ipotesi, S soddisfa formalmente (5); cioè:

$$F(x_i, y_i) = F\left(\frac{\partial \Sigma_p}{\partial y_i}, y_i\right) = C_0 + \mu C_1 + \cdots + \mu^p C_p + \mu^{p+1} \Phi_p,$$

dove Φ_p è una funzione di x_i^0, w_i, μ che può essere sviluppata secondo le potenze di μ e $C_0, C_1, \ldots, C_p$ sono funzioni di x_i^0. Porremo:

$$\nu_i^p = -\frac{\partial C_0}{\partial x_i^0} - \mu \frac{\partial C_1}{\partial x_i^0} - \cdots - \mu^p \frac{\partial C_p}{\partial x_i^0},$$

per $\mu = 0, \nu_i^p$ si riduce a n_i^0:

$$\nu_i^p = -\frac{\partial C_0}{\partial x_i^0} = -\frac{\partial F_0}{\partial x_i^0} = n_i^0.$$

Passo IV: Quindi per (8):

$$\frac{dx_i^0}{dt} = \mu^{p+1}\frac{\partial \Phi_p}{\partial w_i}, \quad \frac{dw_i}{dt} = \nu_i^p - \mu^{p+1}\frac{\partial \Phi_p}{\partial x_i^0}.$$

Se si trascurano le quantità di ordine μ^{p+1}, si avranno le equazioni:

$$x_i^0 = cost, \quad w_i = \nu_i^p t + cost.$$

Poniamo:

$$n_i = -\frac{\partial C_0}{\partial x_i^0} - \mu\frac{\partial C_1}{\partial x_i^0} - \cdots,$$

abbiamo una serie ordinata secondo le potenze di μ, che può essere divergente, ma non ci interessa perché consideriamo il punto di vista formale. Poniamo

$$w_i = n_i t + \bar{\omega}_i,$$

dove le $\bar{\omega}_i$ sono viste come costanti di integrazione. Consideriamo le equazioni:

$$\frac{\partial S}{\partial y_i} = x_i, \quad \frac{\partial S}{\partial x_i^0} = w_i. \tag{9}$$

Da queste, si possono trovare x_i, y_i sotto forma di serie ordinate secondo le potenze di μ e i cui coefficienti sono delle funzioni di x_i^0 e w_i. Queste serie, possono convergere o divergere, poco importa.
Se in queste serie si sostituisce w_i con $n_i t + \bar{\omega}_i$ e se si guardano le x_i^0 come costanti, esse soddisfano formalmente le (3). □

- Inoltre, le (3) possono essere soddisfatte formalmente da altre serie dello stesso tipo di (4).

- Sempre nel capitolo 4, trascriviamo i calcoli dei coefficienti delle serie (4).

- Il quinto capitolo è dedicato ad un'applicazione del metodo di Lindstedt al problema dei tre corpi.

Conclusioni

Possiamo concludere dicendo che Poincaré fu il primo a mostrare che in generale, le serie che risolvono formalmente il problema generale della dinamica nel caso non degenere non convergono, tuttavia egli non capì che sotto opportune ipotesi esse potessero invece convergere. Considerava tale possibilità molto inverosimile e avanzò la congettura che le serie non convergessero mai:

> *Les raisonnements de ce Chapitre ne me permettent pas d'affirmer que ce fait* [6] *ne se présentera pas. Tout ce qu'il m'est permis de dire, c'est qu'il est fort invraisemblable.*[7]

La ricerca di Poincaré, contrariamente a quella di Weierstrass, (*Letters* pubblicate in Act. Math. 35 (1911)), portò quindi a dire che le serie di Lindstedt erano, a parte qualche caso eccezionale, divergenti. Quasi settanta anni dopo fu mostrato che aveva fatto bene ad essere cauto nelle sue conclusioni, quindi l'intuizione di Weierstrass era corretta come dimostrato prima da Kolmogorov, e poi generalizzato da Arnol'd e Moser.

Cerchiamo di dividere i lavori riguardanti questi argomenti in diverse fasce di anni: facendo una ricerca su Mathscinet e mettendo come parola chiave "**small divisors**" OR "**small denominators**", abbiamo ottenuto:

Anni	1954-65	1966-75	1976-85	1986-95	1996-2003
Num. Documenti	22	25	83	134	451

Riportiamo qui di seguito alcuni fra i principali nomi che compaiono scorrendo le liste trovate:

- **1954 – 65**: Arnol'd [2], [1], *Small denominators I. Mapping the circle onto itself*, *The stability of the equilibrium position of a Hamiltonian system of ordinary differential equations in the general elliptic case*; Moser *Combination tones for Duffing's equation.*

[6] che la seria converga.

[7] *Le argomentazioni di questo capitolo non mi permettono di affermare che ciò non si presenterà.* [26] § 149, pag. 104.

- **1966 – 75**: Rüssmann *On optimal estimates for the solutions of linear partial differential equations of first order with constant coefficients on the torus*; Brjuno *The divergence of transformations to normal form of differential equations*; Frangakis *Phase plane analysis of the commensurable restricted three-body problem.*

- **1976 – 85**: Williams *The problem of small divisors in planetary motion*; Gallavotti *Quelques remarques sur la non-existence des intégrales uniformes pour les systèmes hamiltoniens quasi-intégrables.*

- **1986 – 95**: Gentile, Mastropietro *Tree expansion and multiscale analysis for KAM tori*; Chierchia, Falcolini [13]; Eliasson *Biasymptotic solutions of perturbed integrable Hamiltonian systems*; Falcolini, de la Llave *Numerical calculation of domains of analyticity for perturbation theories in the presence of small divisors.*

- **1996 – 2003**: Giorgilli *Small denominators and exponential stability: from Poincaré to the present time*; Valdinoci *Estimates for non-resonant normal forms in Hamiltonian pertubation theory*; Chierchia, Falcolini [14]; Biasco, Chierchia *Nekhoroshev stability for the D'Alembert problem of celestial mechanics*; Eliasson *Perturbations of linear quasi-periodic system*; Berretti, Gentile *Renormalization group and field theoretic techniques for the analysis of the Lindstedt series.*

Osservazione. Osserviamo che negli anni precedenti al 1955 risultano 5 documenti: Wintner *On the small divisors in integrations by Laplace transforms*, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*; Brown *On the small divisors in the lunar theory*; Stoker *Oscillations périodiques des systèmes non linéaires ayant une infinité de degrés de liberté*; Morris *An escalator process for the solution of linear simultaneous equations.*

Inserendo come chiave "**Lindstedt series**", abbiamo ottenuto:

Anni	1954-65	1966-75	1976-85	1986-95	1996-2003
Num. Documenti	0	0	4	8	31

dove compaiono i seguenti autori:

- **1976 – 85**: Anbry; Ermentrout, Cowan; Merman.
- **1986 – 95**: Poincaré [26]; Celletti, Chierchia *A constructive theory of Lagrangian tori and computer-assisted applications*; Gallavotti [20]; Gentile *A proof of existence of whiskered tori with quasi-flat homoclin intersections in a class of almost integrable Hamitonian systems.*
- **1996 – 2003**: Berretti, Gentile *Renormalization group and field theoretic techniques for the analysis of the Lindstedt series*; Berretti, Falcolini, Gentile *Shape of analyticity domains of Lindstedt series, the standard map*; molti lavori sono di Gallavotti e Gentile, come ad esempio [19] e [21].

Errata Corrige

Premettiamo che Poincaré non utilizza mai il simbolo di derivata parziale ∂ ma soltanto quello di derivata semplice d.

Nota: Gli errori che riportiamo qui sotto, sono solo quelli trovati nella parte studiata.

Errori TOMO I:

- pag. 19 riga 15 $F = \dfrac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{2} = \dfrac{2M}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \to$
$$F = \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{2} - \frac{M}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}};$$
- pag. 20 riga 14 $L, G, \Theta, h', g, \theta \to L, G, \Theta, l, g, \theta$;
- pag. 29 riga 25 manca una virgola tra $\dfrac{\partial F}{\partial \Lambda}$ e $\dfrac{dh}{dt}$;
- pag. 30 riga 4 $\beta G = \Lambda - \Pi \to \beta G = \Lambda - H$;
- pag. 31 riga 9 $\zeta' \to \xi'$;
- pag. 32 riga 2 $\dfrac{\imath' \sin \zeta}{q} \to \dfrac{i \sin \zeta}{q}$.

Errori TOMO II:

- pag. 5 riga 31 $f_{1,2} \to f_{2,1}$;
- pag. 17 riga 24 $\dfrac{dx_i}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial y_i} \to \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial y_i}$;
- pag. 19 riga 9 $n_i^0 = -\dfrac{\partial F}{\partial x_i^0} \to n_i^0 = -\dfrac{\partial F_0}{\partial x_i^0}$;
- pag. 21 riga 27 $n_0 \to n_i^0$;
- pag. 25 riga 3 (2) $\to$ ($2bis$);
- pag. 26 riga 25 nell'equazione ($2quarter$),

$$\varphi_i(w_k + \mu\bar{\omega}_k, \ldots) \to \varphi_i(w_k + \mu\omega_k, \ldots);$$

- pag. 31 riga 33 $n_1^0 = \dfrac{1}{x_1^3} \to n_1^0 = -\dfrac{1}{x_1^3}$;
- pag. 32 riga 26 $n_1^0 = -\dfrac{\partial F_0}{\partial x_1} = -n \to n_1^0 = -\dfrac{\partial F_0}{\partial x_1} = n$;
- pag. 42 riga 24 $p(\sigma_2 \cos\varphi' + \cdots) \to p(\sigma_3 \cos\varphi' + \cdots)$;
- pag. 57 riga 16 $\eta' = \dfrac{V}{\xi'} \to \eta' = \dfrac{\partial V}{\partial \xi'}, \quad q' = \dfrac{V}{p'} \to q' = \dfrac{\partial V}{\partial p'}$;
- pag. 60 riga 12 $R\left(\dfrac{\partial T}{\partial \omega_1} + \dfrac{\partial T}{\partial \varphi}, \dfrac{\partial T}{\partial \varphi}, \varphi\right) \to R\left(\dfrac{\partial T}{\partial \omega_1} - \dfrac{\partial T}{\partial \varphi}, -\dfrac{\partial T}{\partial \varphi}, \varphi\right)$;
- pag. 61 riga 4 $\dfrac{\partial T}{\partial \omega_1} + \dfrac{\partial T}{\partial \omega_2} = \Omega_1 + \Omega_1 \to \dfrac{\partial T}{\partial \omega_1} + \dfrac{\partial T}{\partial \omega_2} = \Omega_1 + \Omega_2$;
- pag. 64 riga 1 $\dfrac{d'T'}{\partial V_k \partial \omega_i} \to \dfrac{\partial^2 T'}{\partial V_k \partial \omega_i}$;
- pag. 68 riga 5 $\Lambda_i^k \to V_i^k$;
- pag. 71 riga 12 $T' \to T''$;
- pag. 72 riga 16 $\lambda_2' = \lambda_1' + \dfrac{\partial T}{\partial V'} \to \lambda_2' = \lambda_1' + \dfrac{\partial T}{\partial \Lambda'}$.

Bibliografia

[1] V. I. Arnol'd. Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the preservation of conditionally periodic motions under a small perturbation of the Hamiltonian. *Uspehi Mat. Nauk*, 18(5 (113)):13–40, 1963.

[2] V. I. Arnol'd. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. *Uspehi Mat. Nauk*, 18(6 (114)):91–192, 1963.

[3] V.I. Arnol'd. *Metodi matematici della meccanica classica*. Edizioni MIR, Mosca, 1979.

[4] V. Banfi. *Introduzione alla meccanica celeste*. Centro di Astrodinamica "Giuseppe Colombo", c/o Istituto di fisica Matematica "J. L. Lagrange" Univ. di Torino, 1991.

[5] J. Barrow-Green. *Poincaré and the three body problem*, volume 11 of *History of Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[6] J. Barrow-Green. The three-body problem and the stability of the solar system. To appear in Chapter 6 of Vol. VI-VII of La scienza dell'800 Sez B Astronomy of the Storia dell scienza, 2001.

[7] L. Biasco, Chierchia L., and Valdinoci E. Elliptic two-dimensional invariant tori for the planetary three-body problem. *M.U.R.S.T. Variational Methods and Nonlinear Differential Equations*, pages 1–44, 2002.

[8] D. Boccaletti and G. Pucacco. *Theory of orbits. Vol. 1*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer-Verlag, Berlin, 1996. Integrable systems and non-perturbative methods.

[9] D. Boccaletti and G. Pucacco. *Theory of orbits. Vol. 2*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer-Verlag, Berlin, 1996. Perturbative and geometrical methods.

[10] D. Brouwer and G. M. Clemence. *Methods of celestial mechanics*. Academic Press, New York, 1961.

[11] A. Chenciner. Intégration du problème de Kepler par la méthode de Hamilton-Jacobi: coordonnées "action-angle" de Delaunay. *Comptes rendus, Notes scientifiques et techniques du bureau des longitudes S 026*, 18 e 25 Febbraio 1988.

[12] A. Chenciner. Séries de Lindstedt. *Comptes rendus, Notes scientifiques et techniques du bureau des longitudes S 028*, 30 Marzo 1989.

[13] L. Chierchia and C. Falcolini. A direct proof of a theorem by Kolmogorov in Hamiltonian systems. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 21(4):541–593, 1994.

[14] L. Chierchia and C. Falcolini. Compensations in small divisor problems. *Comm. Math. Phys.*, 175(1):135–160, 1996.

[15] L. H. Eliasson. Absolutely convergent series expansions for quasi periodic motions. *Reports Department of Math., Univ. of Stockholm, Sweden*, Vol. 2,:1–31, 1988.

[16] L. H. Eliasson. Generalization of an estimate of small divisors by Siegel. In *Analysis, et cetera*, pages 283–299. Academic Press, Boston, MA, 1990.

[17] A. Fasano and S. Marmi. *Meccanica analitica*. Bollati Boringhieri, Torino, 1994.

[18] G. Gallavotti. Twistless KAM tori, quasi flat homoclinic intersections, and other cancellations in the perturbation series of certain completely

integrable Hamiltonian systems. A review. *Rev. Math. Phys.*, 6(3):343–411, 1994.

[19] G. Gallavotti. Lindstedt series and Kolmogorov theorem. In *Hamiltonian systems with three or more degrees of freedom (S'Agaró, 1995)*, volume 533 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 62–71. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[20] Giovanni Gallavotti. Twistless KAM tori. *Comm. Math. Phys.*, 164(1):145–156, 1994.

[21] G. Gentile and V. Mastropietro. Methods for the analysis of the Lindstedt series for KAM tori and renormalizability in classical mechanics. A review with some applications. *Rev. Math. Phys.*, 8(3):393–444, 1996.

[22] E. Giusti. *Analisi matematica. 2.* Editore Boringhieri, Torino, 1989.

[23] A. N. Kolmogorov. Preservation of conditionally periodic movements with small change in the Hamilton function. *Dokl. Akad. Nauk SSSR 98*, page 527, 1954.

[24] J. Moser. Convergent series expansions for quasi-periodic motions. *Math. Ann.*, 169 : 136–176, 1967.

[25] Jürgen Moser. Perturbation theory for almost periodic solutions for undamped nonlinear differential equations. In *Internat. Sympos. Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics*, pages 71–79. Academic Press, New York, 1963.

[26] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome II.* Les Grands Classiques Gauthier-Villars. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1987. Méthodes de MM. Newcomb, Gyldén, Lindstedt et Bohlin. Reprint of the 1893 original, Bibliothèque Scientifique Albert Blanchard.

[27] H. Poincaré. *New methods of celestial mechanics. Vol. 1,2*, volume 13 of *History of Modern Physics and Astronomy.* American Institute of Physics, New York, 1993. Periodic and asymptotic solutions, Translated

from the French, Revised reprint of the 1967 English translation, Vol. 1 with endnotes by V. I. Arnol'd, Vol.2 with endnotes by V. M. Alekseev Edited and with an introduction by Daniel L. Goroff.

[28] S. W. Rienstra. Modelling and perturbation methods. Technical report, Eindhoven University of Technology, 2003. Disponibile in rete: www.win.tue.nl/ sjoerdr/2A860/ modelling-perturbation-methods.pdf.

[29] C. L. Siegel. Iterations of analytic functions. *Ann. of Math. (2)*, 43:607–612, 1942.