

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE  
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.  
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Tesi di Laurea

**Modelli matematici  
e metodi numerici  
per il sistema circolatorio**

Relatore

Prof. Roberto Ferretti

Correlatore

Dott. Giuseppe Pontrelli

(I.A.C.-C.N.R.)

Laureanda

Roberta Maria Teresa d'Anzeo

ANNO ACCADEMICO 2000 - 2001

LUGLIO 2001

Roberta d'Anzeo è nata a San Severo (FG) il 2 Gennaio del 1979  
ha conseguito il Diploma di Maturità Scientifica  
presso il Liceo G.Checchia Rispoli (San Severo) nel 1997  
si è immatricolata al Corso di Laurea in Matematica presso l'Università Roma  
Tre nell'A.A. 1997-1998

## TESINE ORALI PRESENTATE

1. Rappresentazione di Skorohod per variabili aleatorie e catene di Markov (Calcolo delle probabilità - Prof.ssa Caramellino)
2. Metodo di eliminazione di Gauss (Analisi Numerica - Prof. Falcone)

# Indice

Introduzione . . . . .	i
<b>1 Modelli fluidodinamici lineari per il sistema circolatorio</b>	<b>1</b>
1.1 Introduzione . . . . .	1
1.2 Il modello unidirezionale lineare . . . . .	2
1.3 L'analogo elettrico . . . . .	2
1.4 Modelli a variabili concentrate (o lumped) . . . . .	3
1.5 Modelli a più compartimenti . . . . .	4
<b>2 Studio analitico per il modello differenziale</b>	<b>7</b>
2.1 Introduzione . . . . .	7
2.2 Sistema differenziale ordinario . . . . .	7
<b>3 Analisi di alcuni metodi numerici</b>	<b>11</b>
3.1 Introduzione . . . . .	11
3.2 Metodi di Adams . . . . .	11
3.3 Metodi alle differenze all'indietro BDF . . . . .	12
<b>4 Accoppiamento di un modello lumped con un modello 1D</b>	<b>16</b>
4.1 Introduzione . . . . .	16
4.2 L'equazione di deformabilità . . . . .	17
4.3 Modelli 1D e modelli lumped: accoppiamento . . . . .	18
<b>Bibliografia</b>	<b>20</b>
<b>Ringraziamenti</b>	<b>21</b>

# Introduzione

L'oggetto di questo lavoro di tesi è lo studio, da un punto di vista matematico, analitico e numerico, del flusso dei liquidi in tubi deformabili, che permette di analizzare la circolazione del sangue nei vasi sanguigni. In effetti un forte stimolo in questo studio deriva dalla possibilità di comprendere i meccanismi di propagazione ondosa nel sistema cardiovascolare nei suoi stati fisiologici e patologici.

Nel primo capitolo, di carattere introduttivo, si giunge alla formulazione delle equazioni che regolano l'andamento di un fluido in modelli unidimensionali e zerodimensionali (o lumped) ed alla rappresentazione più semplice dell'albero circolatorio tramite un modello fisico circuitale. Dallo studio di tale modello con le leggi di Kirchoff si ottiene un sistema di dodici equazioni e dodici incognite, studiato da un punto di vista analitico nei due capitoli successivi. In particolare, nel secondo capitolo, con lo studio teorico di tale sistema, si giunge alla conclusione di avere a che fare con un problema stiff (ovvero un sistema la cui matrice dei coefficienti ha autovalori molto distanti). Nel terzo capitolo, inoltre, si cercano le soluzioni di tale sistema con diversi metodi numerici, per vedere qual è quello più adatto al nostro caso. Infine, nel quarto capitolo, il modello 0D (studiato nei capitoli precedenti) ed il modello 1D, introdotto nel primo capitolo, vengono accoppiati. Si tenta, quindi, di risolvere, tramite l'introduzione di altre equazioni adatte a questo caso, il nuovo problema.

# Capitolo 1

## Modelli fluidodinamici lineari per il sistema circolatorio

### 1.1 Introduzione

In questo capitolo studieremo i modelli fluidodinamici lineari per la simulazione del sistema circolatorio e descriveremo l'analogia con il sistema elettrico. In particolare vedremo come il tutto si riduce allo studio di un sistema differenziale ordinario da risolvere, approfondito nei capitoli successivi.

Per la difficile realizzazione di un modello fluidodinamico si preferisce ricorrere ad un modello elettrico, basandosi sull'osservazione che le leggi fluidodinamiche hanno una forte analogia con quelle che regolano un circuito elettrico. Uno dei modelli più semplici per la descrizione del sistema circolatorio è basato sulla descrizione di tale sistema come una rete idraulica (lumped). Più precisamente, l'intero sistema è considerato come una rete formata da elementi base o compartimenti. Il comportamento macroscopico delle variabili presenti in ogni compartimento è descritto da un insieme di equazioni differenziali ordinarie dedotte dai principi fisici di conservazione della massa e del momento. Queste equazioni descrivono l'evoluzione temporale di tali variabili.

## 1.2 Il modello unidirezionale lineare

Le equazioni che descrivono il flusso assialsimmetrico di un fluido viscoso in un tubo deformabile cilindrico di sezione circolare  $S = \pi\mathcal{R}^2$  (ove  $\mathcal{R}$  è il raggio interno della sezione) sono descritte dal seguente sistema lineare di tipo iperbolico:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = R(x)I + L(x)\frac{\partial I}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = G(x)\rho + C(x)\frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.2)$$

ove  $x$ = coordinata assiale,  $t$ = tempo,  $p$ = pressione,  $I$ = flusso,  $\rho$ = densità del sangue,  $R$ = resistenza per unità di lunghezza,  $G$ = dispersione per unità di lunghezza (considerando il deflusso, dovuto a diramazioni),  $L$ = inerzia per unità di lunghezza,  $C$ = dilatabilità del tubo

Per valutare l'espressione del termine d'attrito  $R$  possiamo considerare in particolare due flussi:

- il flusso stazionario di Hagen-Poiseuille, secondo cui il coefficiente d'attrito  $g_0$  è pari a  $8\pi\nu/S$  e quindi

$$R = \frac{8\pi\nu}{S} \frac{\rho}{\pi\mathcal{R}^2} = \frac{8\mu}{\pi\mathcal{R}^4}$$

con  $\nu = \mu/\rho$  viscosità cinematica;

- il flusso non stazionario di Womersley, secondo cui  $g_0 = \frac{2\nu}{\mathcal{R}^2} \frac{z^2 J_1(z)}{2J_1(z) - zJ_0(z)}$  (ove  $z = j^{3/2}\alpha$  con  $j=\sqrt{-1}$ ,  $J_0, J_1$ =funz.di Bessel del I tipo di ordine 0 e 1 di argomento complesso  $j^{3/2}$ ) e quindi

$$R = \frac{g_0\rho}{\pi\mathcal{R}^2} = \frac{2\nu\rho}{\pi\mathcal{R}^4} \frac{z^2 J_1(z)}{2J_1(z) - zJ_0(z)} .$$

## 1.3 L'analogo elettrico

Per la difficile realizzazione sperimentale di un modello fluidodinamico che rappresenti l'albero circolatorio, si ricorre ai modelli elettrici basandosi sulla

forte analogia tra reti fluidodinamiche ed elettriche. È infatti è possibile descrivere la circolazione sanguigna con sistemi elettrici  $RCL$  in cui

- l' induttanza corrisponde all'inerzia del fluido
- la resistenza corrisponde alle viscosità
- la capacitanza è analoga all' elasticità delle pareti dei vasi.

In particolare, le equazioni (1.1) e (1.2) sono formalmente identiche alle equazioni di propagazione di un impulso elettrico lungo una linea di trasmissione, le cosiddette *equazioni del telegrafo* valide per un cavo uniforme:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = R'i + L'\frac{\partial i}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G'V + C'\frac{\partial V}{\partial t} \quad (1.4)$$

ove  $V$  = voltaggio,  $i$  = corrente,  $R'$  = resistenza per unità di lunghezza,  $L'$  = induttanza per unità di lunghezza,  $C'$  = capacitanza per unità di lunghezza,  $G'$  = conduttanza per unità di lunghezza.

Volendo paragonare le equazioni (1.1) e (1.2) alle equazioni (1.3) e (1.4) possiamo "trasformare" quantità idrodinamiche in quantità elettriche.

## 1.4 Modelli a variabili concentrate (o lumped)

Per l'evidente unidirezionalità del flusso i modelli 1D sono sufficienti per la rappresentazione di tratti relativamente semplici dell'albero circolatorio e, nonostante la loro linearità descrivono in modo abbastanza dettagliato le forme d'onda e la propagazione di un impulso. Tali sistemi, però, non possono essere usati per la rappresentazione di tutto l'albero circolatorio a causa della ramificazione delle arterie e per la variazione delle proprietà elastiche dei vasi. I cosiddetti *modelli lumped* o a variabili concentrate sono invece in grado di rappresentare l'intero albero circolatorio suddividendolo in un numero finito (e in genere piccolo) di compartimenti ciascuno dei quali rappresenta un particolare distretto vascolare ed in ciascuno dei quali si assumono costanti i parametri caratteristici.

I modelli lumped sono definiti anche modelli 0D perchè ottenuti da un mo-

dello 1D integrando le variabili su un segmento di lunghezza finita e quindi sono modelli dipendenti dalla sola variabile temporale (la variabile spaziale scompare in seguito all'integrazione).

Il procedimento di lumping, fatto per un piccolo tratto di arteria di lunghezza  $l$ , può essere adattato a regioni più articolate (ed anche inomogenee) dell'albero circolatorio.

## 1.5 Modelli a più compartimenti

Una descrizione completa del sistema cardiovascolare si può ottenere considerando un modello a più compartimenti.

Il cuore è rappresentato per mezzo di due condensatori variabili nel tempo (che simulano l'attività ventricolare) e da due diodi che riproducono il comportamento delle valvole.

Il circuito che si ricava è quello nella figura che segue

Figura 1.1: Modello di una rete chiusa per l'intero sistema cardiovascolare



Il sistema vascolare è suddiviso in sei sezioni:

- circolazione arteriosa sistemica:  $R_1C_1$  e  $R_2L_1C_2$
- microcircolazione sistemica:  $R_3$
- circolazione venosa sistemica:  $L_2C_3R_4$
- microcircolazione polmonare:  $R_7$
- circolazione arteriosa polmonare:  $R_3L_2C_3$  e  $L_4R_7$
- circolazione venosa polmonare:  $L_4C_6R_8$

Inoltre

$X_1, X_3, X_5, X_7, X_9, X_{11}$  = pressione alle estremità dei vari compartimenti

$X_2, X_4, X_8, X_{10}$  = flussi nei vari distretti

$X_6, X_{12}$  = variazione di volume del ventricolo destro e sinistro rispetto ad un volume di riferimento  $V_0$

$LV, RV$  = pressioni

Le  $S_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) sono gli stati delle valvole: rappresentano lo stato dei due diodi che simulano le valvole cardiache e sono così definite

$$S_i = \begin{cases} 0 & \text{se } z_i \leq 0 \\ 1 & \text{se } z_i > 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

(ove le  $z_i$  forniscono la caduta di pressione nei rami contenenti le valvole). Le variabili  $z_i$  (con  $i = 1, \dots, 4$ ) sono definite in accordo con i dati sperimentali (vedi tesi).

Le equazioni differenziali che descrivono tale modello (rappresentante l'analogo elettrico del sistema circolatorio) e che si ottengono tramite le leggi di Kirchoff applicate al circuito considerato sono le seguenti:

$$\begin{aligned}
C_1 \frac{dX_1}{dt} &= S_1 \cdot \frac{z_1}{R_l + R_1} - X_2 & L_1 \frac{dX_2}{dt} &= X_1 - R_2 X_2 - X_3 \\
C_2 \frac{dX_3}{dt} &= X_2 - X_4 & L_2 \frac{dX_4}{dt} &= X_3 - R_3 X_4 - X_5 \\
C_3 \frac{dX_5}{dt} &= X_4 - S_2 \cdot \frac{z_2}{R_4} & \frac{dX_6}{dt} &= S_2 \cdot \frac{z_2}{R_4} - S_3 \cdot \frac{z_3}{R_r + R_5} \\
C_4 \frac{dX_7}{dt} &= S_3 \cdot \frac{z_3}{R_r + R_5} - X_8 & L_3 \frac{dX_8}{dt} &= X_7 - R_6 X_8 - X_9 \\
C_5 \frac{dX_9}{dt} &= X_8 - X_{10} & L_4 \frac{dX_{10}}{dt} &= X_9 - R_7 X_{10} - X_{11} \\
C_6 \frac{dX_{11}}{dt} &= X_{10} - S_4 \cdot \frac{z_4}{R_8} & \frac{dX_{12}}{dt} &= S_4 \cdot \frac{z_4}{R_8} - S_1 \cdot \frac{z_1}{R_1 + R_l}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Inoltre la pressione ventricolare è data da

$$P_V = \begin{cases} U(t) + E(t) \cdot (\mathcal{V} - \mathcal{V}_0) + R\dot{V} & (sistole) \\ E_d \cdot (\mathcal{V} - \mathcal{V}_0) & (diastole) \end{cases} \tag{1.7}$$

ove  $\mathcal{V}_0$  = volume di riferimento intorno al quale si effettua la linearizzazione,  $\mathcal{V}$  = volume del ventricolo,  $\dot{V}$  = derivata temporale di  $V$ ,  $U(t)$  = pressione isovolumica sul volume  $V_0$ ,  $E(t)$  = elastanza del ventricolo (inverso della compliance =  $dV/dP$ ),  $R$  = resistenza che rappresenta la viscosità delle pareti del miocardio.

# Capitolo 2

## Studio analitico per il modello differenziale

### 2.1 Introduzione

In questo capitolo studieremo il sistema differenziale ordinario formato dalle dodici equazioni ottenute nel capitolo precedente dal punto di vista analitico, o meglio non ci proponiamo di fare un'analisi teorica del sistema, ma solo di avere informazioni qualitative sui metodi applicabili per la risoluzione di tale sistema.

### 2.2 Sistema differenziale ordinario

Le dodici equazioni differenziali (1.6) ottenute nel capitolo precedente formano un sistema differenziale che può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} \dot{X} = A(X, t)X + d(t) \\ X(0) = X_0 \quad (\text{dato iniziale}) \end{cases} \quad (2.1)$$

ove  $d$  è il seguente vettore colonna dei termini noti:

$$d = \begin{pmatrix} S_1 \cdot \frac{U_s}{C_1(R_1 + R_l)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ S_2 \cdot \frac{U_d}{R_4 C_3} \\ -S_2 \cdot \frac{U_d}{R_4} - S_3 \cdot \frac{U_d}{R_r + R_5} \\ S_3 \cdot \frac{U_d}{(R_r + R_5)C_4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ S_4 \cdot \frac{U_s}{R_8 C_6} \\ -S_4 \cdot \frac{U_s}{R_8} - S_1 \cdot \frac{U_s}{R_l + R_1} \end{pmatrix}$$

ed  $A \in \mathcal{M}_{12,12}(\mathbb{R})$  è la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \frac{-1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{1,12} \\ \frac{1}{L_1} & \frac{-R_2}{L_1} & \frac{-1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & \frac{-1}{C_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & \frac{-R_3}{L_2} & \frac{-1}{L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} & a_{5,5} & a_{5,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{6,5} & a_{6,6} & a_{6,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,6} & a_{7,7} & \frac{-1}{C_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_3} & \frac{-R_6}{L_3} & \frac{-1}{L_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_5} & 0 & \frac{-1}{C_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_4} & \frac{-R_7}{L_4} & \frac{-1}{L_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_6} & a_{11,11} & a_{11,12} \\ a_{12,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{12,11} & a_{12,12} \end{pmatrix}$$

ove i coefficienti di  $a_{i,j}$  sono in funzione dei parametri di circuito  $R$ ,  $L$  e  $C$  ed in funzione degli stati dei due diodi  $S_i$  (con  $i = 1, \dots, 4$ ). Poichè la matrice  $A$  dipende dallo stato delle  $S_i$ , che a loro volta assumono valori in funzione

della soluzione che varia al variare del tempo, si può scrivere che  $A = A(X, t)$ , ovvero che la matrice  $A$  varia in dipendenza della soluzione  $X$  e del tempo  $t$ .

In particolare  $A(X, t)$  è una matrice tridiagonale con l'aggiunta dei termini  $a_{1,12}$  e  $a_{12,1}$ . Tale struttura della matrice  $A(X, t)$  deriva dal fatto che ogni termine del circuito è collegato direttamente al termine precedente ed al successivo;  $a_{1,12}$  e  $a_{12,1}$ , invece, descrivono la chiusura del circuito.

Per poter studiare nei dettagli il comportamento della matrice  $A(X, t)$  al variare di  $S_i$  (con  $i=1, \dots, 4$ ), possiamo assumere validi i valori per i parametri circuitali presenti in  $A$  descritti in [5]

Per vedere come sono localizzati gli **autovalori** della matrice  $A$  possiamo studiarla utilizzando il teorema di Gershgorin.

Due dei vari grafici ottenuti applicando il teorema di Gershgorin alla nostra matrice  $A$  sono riportati nelle figure seguenti assieme ai valori degli autovalori indicati con delle crocette.

Dallo studio degli autovalori della matrice  $A$  nei vari casi, risulta evidente che si tratta di un **problema stiff**, ovvero un problema in cui esiste almeno una coppia di autovalori in modulo molto distanti tra loro.

Figura 2.1: Nella prima figura sono stati riportati con delle crocette gli autovalori trovati in uno dei due casi migliori (ovvero in cui gli autovalori sono più vicini tra loro); sono raffigurati anche i dischi di Gershgorin (sempre nel caso migliore). Nella seconda figura, invece, sono raffigurati gli autovalori della matrice  $A$  in uno dei casi peggiori (ovvero uno dei casi in cui gli autovalori sono più lontani tra loro); anche in questo caso abbiamo riportato i dischi di Gershgorin.

# Capitolo 3

## Analisi di alcuni metodi numerici

### 3.1 Introduzione

In questo capitolo studieremo dal punto di vista numerico il sistema differenziale studiato analiticamente nel capitolo precedente. Confronteremo più metodi numerici e studieremo la stabilità di ciascuno dei metodi usati e le eventuali restrizioni sul passo d'integrazione. Potremo con tale studio vedere quale tra i metodi considerati è il più adatto allo studio del nostro problema.

### 3.2 Metodi di Adams

Il metodo di **Eulero esplicito** fa parte dei *metodi Adams* di tipo esplicito (*Adams-Bashforth*). È un metodo esplicito perchè ad ogni passo la soluzione dipende esplicitamente dalla soluzione al passo precedente, ed è un metodo ad *un passo* perchè  $\forall n \geq 0$   $X^{n+1}$  dipende solo da  $X^n$  ed in particolare la soluzione del nostro sistema, con tale metodo, assume la seguente forma:

$$X^{n+1} = X^n + \Delta t(A^n X^n + d^n) = (I + \Delta t A^n)X^n + d^n \Delta t$$

La stabilità del metodo di Eulero è però una stabilità condizionata ovvero pone una condizione sulla scelta del passo  $\Delta t$  che, se violata, produce una soluzione inattendibile. La scelta del passo d'integrazione è quindi limitata.

Infatti, per motivi di stabilità, oltre che per accuratezza, è bene considerare un passo  $\Delta t$  dell'ordine di  $10^{-3}$ .

Il metodo di **Eulero implicito** fa parte dei metodi *Adams* di tipo implicito (detti metodi di *Adams-Moulton* a  $r + 1$  passi). È un metodo ad *un passo* ed è detto implicito perchè ad ogni passo la soluzione dipende implicitamente da se stessa e per calcolarla risulta quindi necessario risolvere ad ogni passo un sistema. Integrando numericamente il sistema di equazioni differenziali ordinarie con tale metodo, la soluzione viene approssimata ad ogni passo da

$$X^{n+1} = X^n + \Delta t(A^{n+1}X^{n+1} + d^{n+1}).$$

Poichè il metodo di Eulero implicito ha una stabilità incondizionata, possiamo dedurre che la scelta del passo d'integrazione non dipende da criteri di stabilità ma solo di accuratezza. Per tali motivi è bene scegliere un  $\Delta t$  dell'ordine di  $10^{-2}$ , un passo più grande di quello suggerito per il metodo di Eulero esplicito.

Anche il metodo di **Crank-Nicolson** fa parte dei metodi *Adams* di tipo implicito. Usando questo metodo la soluzione del nostro sistema differenziale ordinario assume la seguente forma

$$X^{n+1} = X^n + \Delta t \left[ \frac{1}{2}A^n X^n + \frac{1}{2}A^{n+1} X^{n+1} + \frac{1}{2}d^n + \frac{1}{2}d^{n+1} \right]$$

Tale metodo è *stabile*, e più precisamente la sua stabilità è incondizionata. Anche per il metodo di Crank-Nicolson, quindi, la scelta del passo d'integrazione non è dettata dalla stabilità ma solo dall'accuratezza. Pertanto il passo consigliato è dell'ordine di  $10^{-2}$ .

### 3.3 Metodi alle differenze all'indietro BDF

I metodi BDF sono adatti per risolvere problemi stiff con passo fisso e variabile. La soluzione cercata con questi metodi è approssimata dalla seguente



formula:

$$(I - b_r \Delta t A^{n+1}) X^{n+1} = \sum_{j=1}^r c_{j,r} X^{n+1-j}$$

ove i coefficienti  $c_{i,j}$  e  $b_j \forall i \in [1; r], j = r$  sono tabulati in [2]

I metodi BDF del primo e del secondo ordine sono A-stabili<sup>1</sup>, quindi la scelta del passo  $\Delta t$  è dettata solo dall'accuratezza. Invece i metodi di ordine 3,4,5 e 6 sono A( $\alpha$ )-stabili<sup>2</sup> con  $\alpha$  che diminuisce al crescere del grado; quindi in questi casi la scelta del passo  $\Delta t$  è sempre più limitata e dipende anche dalla stabilità del metodo (oltre che dall'accuratezza).

Riportiamo qui di seguito i grafici "modello" di alcune variabili del sistema (ottenuti con un passo sufficientemente piccolo per avere un'approssimazione più precisa) ed alcuni risultati che mettono a confronto i vari metodi per un valore di  $\Delta t$  fissato.

---

<sup>1</sup>Un metodo numerico si dice *A-stabile* quando la sua regione di stabilità assoluta contiene l'intero semipiano  $Re(\overline{\Delta t}) < 0$

<sup>2</sup>Un metodo numerico si dice *A( $\alpha$ )-stabile*, con  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ , se la sua regione di stabilità assoluta contiene la regione  $W_\alpha = \left\{ \overline{\Delta t} : -\alpha < \pi - arg \lambda < \alpha \right\}$

Figura 3.1: La prima figura mostra l'andamento della variabile  $X_1$  rappresentante la pressione aortica. La seconda rappresenta l'andamento di  $X_5$ , ovvero la pressione venosa-atriale destra. La terza figura è il grafico del flusso aortico,  $LVOF$ , ed infine la quarta raffigura il flusso ventricolare destro,  $RVIF$ . Tali grafici si ottengono con ognuno dei metodi studiati in questo capitolo, con un passo  $\Delta t$  sufficientemente piccolo da ricadere nella zona di stabilità e accuratezza di ciascun metodo.

Figura 3.2: Metodi di: Eulero esplicito, implicito, Crank-Nicolson, BDF grado2, grado 3, grado 4, grado 5, grado 6; passo considerato:  $\Delta t = 0.025$ ; variabile rappresentata:  $X_1$

# Capitolo 4

## Accoppiamento di un modello lumped con un modello 1D

### 4.1 Introduzione

In questo capitolo accoppieremo un modello lumped con un modello unidimensionale, entrambi studiati nei paragrafi 1.4 e 1.2. Considereremo le equazioni non lineari, ricavate nel paragrafo 1.2, che descrivono il flusso assialsimmetrico in un sistema 1D. Tale accoppiamento nasce dalla necessità di analizzare con più precisione ciò che succede in un tratto dell'intero sistema cardiovascolare, approssimato con un modello 1D, e per avere così una descrizione locale più accurata. Essendo il modello 1D dipendente dallo spazio e dal tempo, avremo che il problema che dovremo studiare, composto dalle equazioni descrittive del nostro sistema accoppiato, sarà un problema a derivate parziali che descrivono il flusso considerato e la pressione su ogni sezione normale del vaso.

## 4.2 L'equazione di deformabilità

Le equazioni che regolano l'andamento del fluido in un sistema unodimensionale sono racchiuse nel seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{I^2}{S} \right) = -\frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f \end{cases} \quad (4.1)$$

(per maggiori approfondimenti vedi [3]). Poichè il numero di incognite ( $p$ ,  $S$  ed  $I$ ) è superiore al numero di equazioni bisogna aggiungere al sistema una terza equazione. Un modo classico per chiudere tale sistema è considerare un'equazione che mette in relazione la pressione all'area  $S$  del vaso. Più precisamente si assume che esiste una funzione monotona crescente dell'area  $\Phi_E(S)$ , la funzione di risposta elastica, tale che:

$$\bar{p} = \Phi_E(S) \quad (4.2)$$

In particolare è possibile considerare la (4.2) rappresentata, ad esempio, dalla seguente espressione (come suggerito in [3]):

$$\Phi_E(S) = \bar{p}_0 + \frac{\sqrt{\pi} h_0 E}{(1 - \nu^2) S_0} (\sqrt{S} - \sqrt{S_0})$$

ove  $h_0$  e  $S_0$  sono lo spessore della parete e l'area della sezione corrispondente alla pressione  $\bar{p}_0$ . Equivalentemente, possiamo scrivere la funzione inversa

Figura 4.1: Innesto di un tratto unidimensionale in una rete chiusa

dell'espressione appena scritta, per mettere meglio in luce la dipendenza del raggio  $\mathcal{R}$  dalla pressione  $p$ :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + \alpha(p - p_0)$$

ove  $\alpha = \frac{1 - \nu^2}{h_0 E} \mathcal{R}_0^2$  ed abbiamo indicato con  $\mathcal{R}_0$  il raggio a riposo ed  $E$  il modulo di Young.

### 4.3 Modelli 1D e modelli lumped: accoppiamento

Al contrario dei modelli (iperbolici) ad una dimensione, i semplici modelli sistemici sono incapaci di determinare le onde che li attraversano a monte e a valle, a meno che un gran numero di compartimenti sono connessi in sistemi più complessi. D'altra parte, quando accoppiamo un modello lumped ad un 1D, i punti che vengono uniti sono accuratamente inseriti in modo da non avere una riflessione delle onde. L'accoppiamento del modello unidimensionale di un tratto di arteria con un modello lumped per l'intero sistema circolatorio è un modello completo che tiene conto del bilancio di flussi indotto da un circuito chiuso e risolve localmente solo una porzione di arteria. Lo studio di tale modello è interessante per valutare, ad esempio, l'influenza di alterazioni nelle proprietà locali di un vaso sulla circolazione globale e

viceversa. È possibile inoltre innestare facilmente il tratto 1D in vari punti dell'albero circolatorio. Matematicamente parlando, il problema consiste nella risoluzione di due sistemi differenziali accoppiati: un sistema di equazioni differenziali ordinarie relativo ai compartimenti del modello lumped (che chiameremo (a)) ed un sistema di equazioni a derivate parziali che descrive la fluidodinamica del tratto esteso e la meccanica delle pareti vascolari (che chiameremo (b)).

Un'idea è quella di inserire il modello 1D di tubo deformabile nel tratto discendente dell'aorta (nel modello 0D), vedi Fig.4.2. Di conseguenza le equazioni (1.6.3)-(1.6.4) (la seconda eq. nella colonna sinistra e la seconda nella colonna destra) verranno sostituite rispettivamente dalle seguenti due equazioni:

$$C_2 \frac{dX_3}{dt} = X_2 - I_m \quad (4.3)$$

$$L_2 \frac{dX_4}{dt} = p_v - R_3 X_4 - X_5 \quad (4.4)$$

insieme alle

$$X_3(t) = p_m(t) \quad (4.5)$$

$$X_4(t) = I_v(t) \quad (4.6)$$

ove  $p_m$  ed  $I_v$  sono rispettivamente la pressione a monte ed il flusso a valle della sezione (b).

Dobbiamo, in pratica, risolvere il sistema di equazioni differenziali (1.6), con le sostituzioni (4.3) e (4.4), insieme al sistema formato dalle equazioni (4.1) e (4.2). L'algoritmo di integrazione per la risoluzione di tale modello prevede uno scambio di informazioni tra le due sezioni (vedi tesi).

Per effettuare simulazioni si può considerare un segmento di arteria di lunghezza  $\mathcal{L}$  relativo al tratto discendente dell'aorta. Sono state considerate come costanti circuitali e temporali quelle descritte nel capitolo 2. Ad esse vanno aggiunte le costanti relative al modello 1D.

# Bibliografia

- [1] Alfio Quarteroni, *Elementi di calcolo numerico*, Bologna, 1997 .
- [2] Valeriano Comincioli, *Analisi numerica*, McGraw-Hill, 1995
- [3] L. Formaggia, F. Nobile, A. Quarteroni, A. Veneziani, *Multiscale modelling of the circulatory system: a preliminary analysis*, Comput. Visual Sci., Vol. 2, pp. 75-83, 1999.
- [4] G. Avanzolini, P. Barbini, A. Cappello, G. Cevenini, *CADCS simulation of the closed-loop cardiovascular system*, Int. J. Biomed. Comput., Vol. 22, pp. 39-49, 1988.
- [5] G. Pontrelli, E. Rossoni, *Modelli multiscala in fluidodinamica vascolare: fondamenti teorici e simulazioni numeriche*, Quad IAC/CNR 35/2000, submitted
- [6] Bruno Gaddini, *Fluidodinamica fisiologica*, la goliardica editrice, 1980.
- [7] D.A. McDonald, *Blood flow in arteries*, E. Arnold & Co. , 1960.
- [8] G. Monegato, *Fondamenti di calcolo numerico*, Lecrotto e Bella , 1990.
- [9] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, Fausto Saleri *Matematica numerica*, Springer , 1998.
- [10] G. Pontrelli, E. Rossoni, *Modelling the fluid-wall interaction in a blood vessel*, Quad IAC/CNR 35/2000, submitted.



## Ringraziamenti

I miei ringraziamenti vanno al professore relatore Roberto Ferretti, per avermi guidato in questi mesi di lungo lavoro; al correlatore Dott. Giuseppe Pontrelli, da anni interessato allo studio di questo argomento; ad Enrico Rossoni, per la sua continua disponibilità a chiarirmi dubbi di ogni tipo; a mamma, papà, Attilio, Antonio (e famiglia) ed a tutti coloro che hanno creduto in me in questi anni.