UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE

FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Una Legge funzionale del Logaritmo Iterato per soluzioni di EDO a coefficienti aleatori

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica
di Valentina Di Vincenzo
Relatore : Prof. Lucia Caramellino

Il contenuto di questo lavoro è relativo alla dimostrazione di una Legge funzionale del Logaritmo Iterato per soluzioni di equazioni differenziali ordinarie (EDO) a coefficienti aleatori. Come conseguenza, proveremo la validità della Legge del Logaritmo Iterato sul gruppo di Heisenberg.

Più in dettaglio, il problema che abbiamo studiato è il seguente.

Sia $\{Z^j\}_j$ una successione di variabili aleatorie (v.a.) indipendenti ed identicamente distribuite (i.i.d.) a valori in $\mathbb{R}^m$, centrate e con matrice di covarianza pari all'identica. Definiamo, per ogni istante $t \geq 0$, la poligonale ad essa associata[1]

$$S_t = (t - [t])Z^{[t]+1} + \sum_{j=1}^{[t]} Z^j, \qquad S_0 = 0. \tag{1}$$

Il processo S_t coincide quindi con le somme parziali $S_k = \sum_{j=1}^{k} Z^j$ se $t = k$; se invece t non è un naturale, S_t rappresenta l'interpolata lineare tra $S_{[t]}$ e $S_{[t]+1}$. Fissato ora un numero naturale $n > 1$, consideriamo il processo

$$S_t^n = S_{nt}, \qquad t \in [0, 1]. \tag{2}$$

[1] Qui, e nel seguito, adotteremo la convenzione $\sum_{j=1}^{0} = 0$.

Si noti che S^n_t assume il valore $S_k = \sum_{j=1}^k Z^j$ per $t = \frac{k}{n}$ ed è ancora una volta l'interpolata lineare tra S_k e S_{k+1} quando $t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$. Posto

$$Y^n_t = \frac{S^n_t}{\sqrt{n \ln \ln n}}, \qquad t \in [0,1], \tag{3}$$

è noto (cfr. [14]) che la successione $\{Y^n\}_n$ è quasi certamente (q.c.) relativamente compatta nello spazio delle traiettorie continue su $[0,1]$ e l'insieme di tutti i suoi punti limite, per $n \to \infty$, è perfettamente individuato da un opportuno insieme di livello che non dipende dalla legge delle v.a. in questione. Tale proprietà di carattere asintotico è nota con il nome di Legge del Logaritmo Iterato, di carattere funzionale perché ne viene studiato il comportamento globale delle traiettorie. Come immediata conseguenza, anche la successione

$$Y^n_1 = \frac{S^n_1}{\sqrt{n \ln \ln n}} = \frac{\sum_{k=1}^n Z^k}{\sqrt{n \ln \ln n}}$$

di v.a. a valori in $\mathbb{R}^m$ è q.c. relativamente compatta e l'insieme di tutti i suoi punti limite è dato da un'opportuna palla (chiusa) centrata nell'origine.

In questa tesi abbiamo esteso tale risultato ad una classe di processi più ampia, che ovviamente include il caso sopra considerato: a processi definiti come soluzione dell'EDO a coefficienti aleatori

$$\begin{cases} \dot{X}_t = b(X_t) + \sigma(X_t)\dot{S}_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{4}$$

dove b è un campo vettoriale su $\mathbb{R}^d$ e σ è un campo di matrici $d \times m$ che garantiscono l'esistenza della soluzione X_t per $t \geq 0$. Si noti che le poligonali S_t hanno traiettorie differenziabili (con derivata costante!) per $t \in (n, n+1)$, $n = 0, 1, \ldots,$ ed inoltre X coincide con S qualora si scelgano $b = 0$ e $\sigma = \mathrm{Id}$.

Lo scopo è quello di studiare il comportamento asintotico di tale processo quando $t \to +\infty$ e di determinarne una Legge del Logaritmo Iterato.

Per fare ciò, occorre dapprima definire una "normalizzazione" che estenda quella utilizzata per S_{nt}, nel qual caso, come visto sopra, si è semplicemente diviso per $\sqrt{n \ln \ln n}$. A tale scopo, consideriamo, al variare di $\alpha > 0$, una trasformazione lineare

$$D_\alpha(y) = D_\alpha y \quad y \in \mathbb{R}^d \tag{5}$$

tale che

Ipotesi 0.1 *i) $D_\alpha(x) = x$;*

ii) se $\alpha \geq \beta$ $\quad |D_\alpha(y) - D_\alpha(z)| \leq |D_\beta(y) - D_\beta(z)|, \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^d$;

iii) esiste l'inversa $D_\alpha^{-1} = D_{\alpha^{-1}}$. *Inoltre per ogni insieme compatto* K *e* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che se* $|\alpha\beta - 1| < \delta$ *allora*

$$\sup_{y\in K} |D_\alpha \circ D_\beta(y) - y| < \varepsilon.$$

Intuitivamente, la proprietà $i)$ garantisce che x, ovvero il punto di partenza del processo X definito in (4), è un punto fisso per D_α, per ogni α. La $ii)$ esprime una sorta di contrazione al variare di α: per ogni scelta di y, z, la distanza tra $D_\alpha(y)$ e $D_\alpha(z)$ diminuisce all'aumentare di α. Infine, la proprietà $iii)$ assicura una forma di continuità, uniforme sui compatti di $\mathbb{R}^d$, di D_α rispetto al parametro α. Notiamo che, ai fini dimostrativi, non è necessaria la linearità di D_α, infatti se fosse una funzione di classe $\mathcal{C}^2$, per ogni α fissato, anche se con della piccole variazioni sul procedimento, si otterrebbe il medesimo risultato.

Ora, per ogni $n > 2$, definiamo

$$Y_t^n = D_{\frac{1}{\sqrt{n \ln\ln n}}} X_{nt}. \tag{6}$$

Osserviamo che scegliendo $b = 0$, $\sigma = \mathrm{Id}$ e $D_\alpha = \alpha \cdot \mathrm{Id}$, il processo Y^n diviene quello definito in (3). Nel Capitolo 3, dimostriamo che sotto opportune ipotesi sui coefficienti b e σ coinvolti in (4), la successione $\{Y^n\}_n$, definita in (6), è q.c. relativamente compatta nello spazio delle funzioni continue su $[0, 1]$ e l'insieme di tutti i suoi punti limite è dato da

$$K = \{\psi : J(\psi) \leq \frac{1}{2}\}$$

dove J è un opportuno funzionale legato al principio di deviazioni moderate che regolano la successione $\{Y^n\}_n$ e di cui parleremo più diffusamente in seguito. Come applicazione, verificheremo la validità della Legge del Logaritmo Iterato per passeggiate aleatorie sul gruppo di Heisenberg, che possiamo riassumere come segue.

Il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}_1$ è un gruppo topologico indotto su $\mathbb{R}^3$ su cui è definita l'operazione di gruppo

$$(x_1, x_2, x_3) \circ (y_1, y_2, y_3) = \Big(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)\Big) \tag{7}$$

Presa una successione $\{Z^j\}_j$ di variabili aleatorie a valori in $\mathbb{H}_1$, i.i.d. e centrate, per $n \geq 1$ sia

$$T^n = Z^1 \circ Z^2 \circ ... \circ Z^n.$$

Poniamo inoltre $D_\alpha : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_1$,

$$D_\alpha : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_1, \quad D_\alpha(g) = (\alpha g_1, \alpha g_2, \alpha^2 g_3)^t = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}.$$

Dimostreremo allora che la successione $\{D_{\frac{1}{\sqrt{n \ln\ln n}}} T^n\}_n$ verifica la Legge del Logaritmo Iterato, ovvero è una successione q.c. relativamente compatta di cui caratterizzeremo (e disegneremo, usando opportune simulazioni numeriche) l'insieme di tutti i suoi punti limite. Ciò sarà conseguenza di un risultato un po' più generale che dimostra, facendo uso di quanto provato per la successione definita in (6), una versione funzionale della legge su $\mathbb{H}_1$ e che mostra il legame tra passeggiate aleatorie su $\mathbb{H}_1$ e soluzioni di EDO. A tale scopo, sia σ il campo matriciale

$$\sigma(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{2}y_2 & \frac{1}{2}y_1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

e X la soluzione dell'EDO

$$\begin{cases} \dot{X}_t = \sigma(X_t)\dot{S}(t) \\ X_0 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

dove S è il processo definito in (1), ovvero la poligonale costruita a partire dalle somme "usuali" su $\mathbb{R}^3$. È immediato verificare che

$$X_i(n) = T_i^n, \quad i = 1, 2 \tag{10}$$

e, per quanto riguarda la terza componente, si ha

$$X_3(n) = T_3^n - \sum_{k=1}^{n} Z_3^k. \tag{11}$$

Segue allora che, posto $Y_t^n = D_{\frac{1}{\sqrt{n \ln\ln n}}} X_{nt}$,

$$D_{\frac{1}{\sqrt{n \ln\ln n}}} T^n = Y^n(1) + W^n \tag{12}$$

essendo

$$W^n = \Big(0, 0, \frac{1}{n \ln\ln n} \sum_{k=1}^{n} Z_3^k\Big).$$

Poiché, grazie alla Legge Forte dei Grandi Numeri, $W^n \to 0$ q.c. per $n \to \infty$, il termine W^n non è significativo, nel senso che il comportamento asintotico delle successioni $\{D_{\frac{1}{\sqrt{n \ln\ln n}}} T^n\}_n$ e $\{Y^n(1)\}_n$ è lo stesso, riducendo così il problema allo studio della successione $\{Y^n\}_n$. Ora, Y^n è un processo del tipo definito in (6), per il quale abbiamo già verificato la validità della Legge del Logaritmo Iterato. Per studiare la successione determinata dai valori assunti nell'istante $t = 1$, è sufficiente considerare il funzionale

$$\begin{array}{cccc} \Psi & : & \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^3) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & \varphi & \mapsto & \Psi(\varphi) = \varphi(1). \end{array}$$

Poichè Ψ è continuo, è facile verificare che $Y^n(1) = \Psi(Y^n)$ definisce una successione anch'essa q.c. relativamente compatta tale che $\Psi(K)$ è l'insieme dei suoi punti limite, avendo denotato con K il compatto dello spazio delle traiettorie continue che dà l'insieme dei punti di accumulazione della successione $\{Y^n\}_n$.

Il risultato appena esposto esiste già in letteratura anche se solo parzialmente. Infatti, una Legge del Logaritmo Iterato per passeggiate aleatorie sul gruppo di Heisenberg è stata dimostrata in [7], dove sono previste ipotesi più leggere delle nostre (in particolare l'esistenza del momento di ordine $2+\delta$ per le v.a. Z^k, con $\delta > 0$, mentre noi richiediamo l'esistenza della trasformata di Laplace in un intorno dell'origine, e quindi l'esistenza di tutti i momenti); tuttavia, a differenza di quanto qui studiato, questo precedente risultato coinvolge solo la terza componente della successione $\{T^n\}_n$, presa singolarmente.

Analizziamo ora la tecnica usata per dimostrare la Legge del Logaritmo Iterato così come è stata esposta. Gli strumenti che sono stati utilizzati sono essenzialmente due: opportune stime di grandi deviazioni, o meglio di "deviazioni moderate", e il primo e il secondo Lemma di Borel Cantelli, che, com'è noto, si rivelano di fondamentale importanza per dimostrare proprietà di convergenza quasi certa.

A tale scopo, torniamo al processo definito in (2) e definiamo

$$\xi_t^n = \frac{S_t^n}{c_n} \tag{13}$$

dove la successione $\{c_n\}_n \subset \mathbb{R}^+$ definisce una normalizzazione che supporremo verifichi le seguenti condizioni:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{\sqrt{n}} = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n} = 0 \tag{14}$$

Si noti che scegliendo $c_n = \alpha_n \equiv \sqrt{n \ln \ln n}$, $n > 2$, tali condizioni sono soddisfatte. Fissato n, supponiamo che esista una ed una sola soluzione Y^n dell'EDO a coefficienti aleatori

$$\begin{cases} \dot{Y}_t^n = \hat{b}_n(Y_t^n) + \hat{\sigma}_n(Y_t^n)\dot{\xi}_t^n \\ Y_0^n = x \end{cases} \tag{15}$$

dove $\{\hat{b}_n\}$ è una successione di campi vettoriali su $\mathbb{R}^d$ e $\{\hat{\sigma}_n\}$ una successione di campi di matrici $d \times m$.

Sotto buone ipotesi per i coefficienti $\hat{b}_n$ e $\hat{\sigma}_n$, in particolare, che convergano, per $n \to \infty$, a due funzioni che chiameremo $\hat{b}$ e $\hat{\sigma}$ rispettivamente, e supponendo l'esistenza della trasformata di Laplace della legge delle v.a. Z^k almeno in un intorno dell'origine, è possibile dimostrare che la successione $\{Y^n\}_n$ verifica un "principio di deviazioni moderate" nello spazio $\mathcal{C}_x([0,1], \mathbb{R}^d) = \{\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^d,\ \varphi(0) = x\}$, ovvero un principio di grandi deviazioni in cui la velocità non è n bensì $\frac{c_n^2}{n}$ e il funzionale d'azione J non dipende dalla legge delle v.a. Z^k e si rivela essere il funzionale d'azione che si otterrebbe qualora le v.a.

in questione fossero gaussiane standard. Ciò significa, in formule, che per ogni boreliano A di $\mathcal{C}_x([0,1],\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} -\inf_{\varphi\in\overset{\circ}{A}} J(\varphi) & \leq \liminf_{n\to\infty} \tfrac{n}{c_n^2}\ln P(Y^n\in A) \leq \\ & \leq \limsup_{n\to\infty} \tfrac{n}{c_n^2}\ln P(Y^n\in A) \leq -\inf_{\varphi\in\bar{A}} J(\varphi) \end{aligned} \tag{16}$$

dove J è il *funzionale d'azione* dato dalla formula

$$J(\varphi) = \begin{cases} \int_0^1 \mathcal{L}(\varphi(t),\varphi'(t)-\hat{b}(\varphi(t)))dt & \text{se } \varphi\in\mathcal{AC}_x([0,1],\mathbb{R}^d) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{17}$$

essendo $\mathcal{L}(y,\cdot)$ la trasformata di Legendre di $\theta \mapsto \frac{1}{2}\langle\theta,\hat{\sigma}(y)\sigma^t(y)\theta\rangle$, con $\theta\in\mathbb{R}^d$, e $\mathcal{AC}_x([0,1],\mathbb{R}^d)$ è l'insieme delle funzioni assolutamente continue di $\mathcal{C}_x([0,1],\mathbb{R}^d)$. Tali risultati, noti in letteratura (cfr. [3]) ed esposti nel Capitolo 2, sono stati dimostrati facendo uso della tecnica del "trasporto", ovvero trasferendo l'analogo principio di deviazioni moderate valido per la successione $\{\xi^n\}_n$ alla successione $\{Y^n\}_n$.

Consideriamo ora la successione $\{Y^n\}_n$ definita in (6): usando l'espressione in (5) e sostituendo in (4), otteniamo facilmente

$$\dot{Y}_t^n = \hat{b}_n(Y_t^n)dt + \hat{\sigma}_n(Y_t^n)\frac{1}{\alpha_n}\dot{S}_t^n. \tag{18}$$

dove

$$\hat{b}_n(y) = nD_{\frac{1}{\alpha_n}}b(D_{\alpha_n}y) \qquad \hat{\sigma}_n(y) = n\alpha_n D_{\frac{1}{\alpha_n}}\sigma(D_{\alpha_n}y) \tag{19}$$

e, ricordiamo, $\alpha_n=\sqrt{n\ln\ln n}$. Ciò significa che Y^n è un processo che fa parte della classe più generale definita tramite (15), poiché $c_n=\alpha_n$ soddisfa le condizioni (14). Allora, se b e σ soddisfano opportune ipotesi, $\{Y^n\}_n$ verifica un principio di deviazioni moderate, con velocità $\ln\ln n$ e funzionale d'azione determinato dalla formula (17). La validità delle disuguaglianze come in (16 ci consentono di ottenere stime asintotiche per $P(Y^n\in A)$, per n grande, che saranno poi utilizzate per applicare i Lemmi di Borel Cantelli e dunque per determinare il comportamento q.c. della successione in questione quando n tende all'infinito.

Questa tesi è organizzata come segue.

Il Capitolo 1 contiene alcuni risultati generali sulla teoria delle grandi deviazioni che saranno utilizzati nel seguito, quali il Teorema di Cramér, il Lemma del Trasporto (universalmente noto in letteratura per il quale, però, non vi è una dimostrazione, che abbiamo qui proposto) e il Teorema di Gartner-Ellis.

Il Capitolo 2 entra nei dettagli delle deviazioni moderate per i processi definiti tramite la (15). Viene infatti dapprima mostrato il teorema di Mogulskii, che determina un principio di deviazioni moderate valido per la successione $\{\xi^n\}_n$, definita in (13); usando poi il Lemma del Trasporto, applicato ad un opportuno funzionale, abbiamo mostrato come sia possibile determinare un principio di deviazioni moderate per $\{Y^n\}_n$ a partire dalle analoghe stime di grandi deviazioni valide per $\{\xi^n\}_n$.

Il Capitolo 3 contiene la dimostrazione della validità della Legge del Logaritmo Iterato per soluzioni di EDO a coefficienti aleatori e l'applicazione alle passeggiate aleatorie sul gruppo di Heisenberg.

Bibliografia

[1] Azencott, R. (1980) *Grandes déviations et applications.* In École d'été de probabilités de St.Flour VIII-1978, Lect. Notes. Math. **774**, Springer, Berlin–Heidelberg–New York.

[2] Baldi, P. (1986) Large deviations and functional iterated logarithm law for diffusion processes. *Probab. Th. Rel. Fields* **71**, 435–453.

[3] Baldi, P., e Caramellino, L. (1999) Large and moderate deviations for random walks on nilpotent groups. *Journal of Theoretical Probability* **12**, 779–809.

[4] Billingsley. P. (1986) *Probability and measure.* Wiley.

[5] Brezis, H. (1983) *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Masson.

[6] Caramellino, L. (1998) Strassen's law of the iterated logarithm for diffusion processes for small time. *Stochastic Processes and their Applications* , **74**, 1–19.

[7] Crepel, P., and Roynette B. (1977) Une loi du logarithme itéré pour le groupe de Heisenberg. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. gebiete* **39**, 217–229.

[8] Dembo, A., e Zeitouni, O. (1993) *Large deviation techniques and applications.* Jones & Bartlett, Boston–London.

[9] Deshayes, J., e Picard D. (1979) Grandes et moyennes déviations pour les marches aleatoires. *Asterisque* **68**, 53–71.

[10] Gaveau, B. (1977) Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimees sous elliptiques sur certains groupes nilpotents. *Acta mathematica* **139**, 96-153.

[11] Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V. (1980) *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale.* Ed. MIR.

[12] Mogul'skii, A.A., (1976) Large deviations for trajectories of multidimensional random walks. *Theory Probab. Appl.* **21**, 309–323.

[13] Rockafellar, R. T. (1969) Measurable dependence of convex sets and functions on parameters. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **28**, 4–25.

[14] Strassen, V. (1964) An invariance principle for the law of the iterated logarithm. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. gebiete* **3**, 211–226.