UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Tesi di Laurea in Matematica di

Fabrizio Donati

Categorie Derivate e la Corrispondenza BGG

Sintesi

Relatore
Prof. Edoardo Sernesi

Classificazione AMS
15A75, 18A05, 18A20, 18E05, 18E10, 18E30, 18E35, 18G05, 18G55

Introduzione

I matematici, fra i tanti, hanno un difetto particolarmente sentito nella vita sociale, che è causa di incomprensione ed emarginazione in quel "mondo tutto loro", al quale non è ben chiaro perché abbiano accesso esclusivo. Se lo chiedeste loro avreste come risposta, che l'oggetto di studio della matematica è in "questo mondo" e la successiva osservazione che la domanda è più o meno equivalente a chiedersi se un etologo osservi animali del nostro pianeta, piuttosto che unicorni o minotauri. I malcapitati interlocutori potrebbero recuperare senso alla loro domanda, cercando di convincersi che il "pensiero" non ha ragion d'essere...

L'*estrema ricerca di generalità* è il difetto imputato, e si potrebbe dibattere a lungo se non sia invece una virtù. La seconda metà del secolo scorso fornisce importanti prove a sostegno di entrambe le tesi: la teoria delle categorie e (un esempio fra tanti) la corrispondenza Bernshtein–Gel'fand–Gel'fand, la prima avallante il difetto, per la sua notevole astrazione, e la seconda a confutarlo, come straordinario risultato concreto.

Il linguaggio delle categorie è in un certo senso il difetto–virtù stesso. Esso nasce infatti dall'osservazione che molte proprietà di sistemi matematici hanno il medesimo comportamento, o meglio, costruzioni e dimostrazioni in essi soggiacciono agli stessi schemi logici. La chiave di volta fu la capacità di assiomatizzare questa da sempre latente necessità, attraverso l'uso di diagrammi e frecce, come tante ne troverete in questa tesi. Le *frecce* fecero probabilmente [1] la loro prima comparsa in un lavoro matematico, negli scritti sui gruppi di omotopia relativa di W. Hurewicz [2] intorno al 1940. La semplicità ed efficacia di quel simbolo si guadagnò immediatamente l'attenzione

[1] Cfr. S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer–Verlag, 1971.

[2] W. Hurewicz, *On Duality Theorems*, Bull. AMS, vol. 47, pp. 562ss, 1941.

dell'ambiente, come gli articoli di R. H. Fox [3] nel '43 e di N. E. Steenrod [4] nel '40 testimoniano, quest'ultimo facendo addirittura un uso implicito di funtori. Le frecce rappresentano le funzioni, nozione nota da tempo ma da sempre legata agli "elementi" su cui esse agiscono, e il simbolo $f(x)$ è rimpiazzato dunque dal più generale $X \xrightarrow{f} Y$, che non tiene conto della natura atomica degli oggetti X e Y.

I *diagrammi* videro presumibilmente la luce per la prima volta nel 1942, in un lavoro di S. Eilenberg e S. Mac Lane [5] sullo studio dei limiti (via trasformazioni naturali) per i teoremi del coefficiente universale nella coomologia di Cêch. Il loro esordio fu però oscurato dalle ben più sorprendenti innovazioni della *teoria delle categorie* che i due matematici scoprirono affrontando quello studio, e che esposero concretamente in un articolo [6] nel 1945, data che può essere considerata di nascita per il linguaggio categoriale. I sostantivi principali del nuovo linguaggio furono sottratti alla filosofia: "categoria" ad Aristotele e Kant, "funtore" a Carnap, e "trasformazione naturale" al linguaggio informale allora corrente.

Nel primo capitolo del nostro elaborato introduciamo le definizioni base di categorie e funtori, fornendone una trattazione elementare e concisa e soprattutto attenta all'imperativo categoriale di non "seguire" e "cacciare" gli elementi, ma di utilizzare soltanto diagrammi e frecce. Tali scelte hanno lo scopo di centrare l'attenzione sul formalismo categoriale e sulla nozione di

[3]R. H. Fox, *Natural Systems of Homomorphism. Preliminary report*, Bull. AMS, vol. 49, p. 373, 1943.

[4]N. E. Steenrod, *Regular Cycles of Compact Metric Spaces*, Ann. Math., vol. 41, pp. 833 - 51, 1940.

[5]S. Eilenberg e S. Mac Lane, *Natural Isomorphisms in Group Theory*, Proc. natn. Acad. Sci. USA, vol. 28, pp. 537 - 43, 1942.

[6]S. Eilenberg e S. Mac Lane, *General Theory of Natural Equivalences*, Trans. AMS, vol. 58, pp. 231 - 94, 1945.

equivalenza di categorie, limitando quindi al minimo le definizioni accessorie, e senza entrare nel merito dei fondamenti logici, contro i quali la teoria delle categorie si è fin dal suo esordio scontrata (paradosso di Russell, nozioni di insieme e classe, universi, etc.). Nella sezione dedicata ai funtori dimostriamo un teorema fondamentale, che caratterizza l'equivalenza di categoria attraverso funtori essenziali e pienamente fedeli, sul quale si basa la corrispondenza BGG trattata nel terzo capitolo.

La corrispondenza BGG è uno straordinario esempio dell'efficacia del linguaggio delle categorie e quindi un forte sostegno alla causa della "virtù". Essa stabilisce un'equivalenza tra due categorie apparantemente distanti e scollegate, una afferente all'algebra multilineare, i Λ-moduli finitamente generati, e l'altra ad oggetti geometrici quali sono i fasci coerenti. La potenza di un risultato simile è ben chiara ad un addetto ai lavori: esso permette la trasposizione di problemi da una categoria all'altra, sfruttando ad esempio classificazioni, teoremi o controesempi presenti soltanto in una delle due. Ne sono un esempio elementare ed esemplare il gruppo fondamentale e l'omologia simpliciale, che collega proprietà topologiche di uno spazio a quelle algebriche di un gruppo.

La scelta della corrispondenza BGG come esempio di utilizzo del linguaggio categoriale è doppiamente felice. Infatti oltre a dar spazio al linguaggio base e alla nozione di equivalenza, permette una semplice illustrazione delle *categorie derivate* che sono un importante sviluppo della teoria delle categorie, e con esse di alcuni fondamenti di algebra omologica. L'idea delle categorie derivate prese corpo nei pensieri di Grothendieck all'inizio degli anni '60, per fornire un quadro completo di algebra omologica necessaria alla vasta generalizzazione dei teoremi di dualità, che aveva immmaginato a seguito della sua esposizione al congresso internazionale di Edimburgo del

1958. Egli propose a J. L. Verdier come soggetto di tesi di dottorato, di costruire il formalismo della sua idea. Nel 1963 Verdier pubblicò un fascicolo dei risultati riguardanti l'essenziale della teoria [7] che rimase sostanzialmente incompiuto, verosimilmente a motivo del grande sviluppo indipendente che ne seguì in molte discipline matematiche e della deviazione dei suoi interessi verso altri problemi.

Il secondo capitolo si occupa di introdurre tutte le nozioni necessarie all'esposizione delle categorie derivate: complessi, omologia, omotopia, risoluzioni e risultati principali legati ad esse, dimostrati rigorosamente per diagrammi e frecce, pratica inusuale nella letteratura a causa del pesante formalismo. Sviluppiamo in gran dettaglio soprattutto la costruzione della categoria localizzata rispetto ad un sistema di morfismi localizzante, attraverso la quale possiamo dare un'esplicita descrizione della categoria derivata in termini di quella base, nonché delle sue principali proprietà.

In conclusione, come già accennato, nel terzo capitolo dimostriamo in tutti i dettagli la corrispondenza BGG, adottando un punto di vista diverso da quello classico proposto in [Bgg], in forza ad uno più diretto ma più laborioso, sviluppato in [Coa].

Riportiamo di seguito le notazioni e i risultati principali di ogni capitolo.

Capitolo I

Le prime due sezioni del capitolo sono dedicate all'introduzione delle notazioni e definizioni base della teoria delle categorie, senza entrare nel merito di esempi o risultati particolari. Con lo stesso spirito presentiamo, nelle

[7] J. L. Verdier, *Catégories Dérivées, quelques résultats (etàt 0)*, Lect. Notes Math., Berlin–Heidelberg: Springer, vol. 569, pp. 262 - 311, 1977

rispettive sezioni dedicate, le categorie $\mathcal{M}(\Lambda)$ dei moduli sull'algebra esterna Λ di uno spazio vettoriale E finito dimensionale, e $\mathrm{Coh}\mathbb{P}(E)$ dei fasci coerenti sullo spazio proiettivo di E, riportando per quest'ultima i risultati classici sui fasci $\mathcal{O}(j)$. Enunciamo inoltre le proprietà principali della categoria $\mathcal{M}(\Lambda)$, raccogliendole in alcune osservazioni e soprattuto nella seguente prorposizione ($\mathcal{M}^b(\Lambda)$ indica la categoria dei moduli finitamente generati)

Proposizione. *(i)* $\mathcal{M}^b(\Lambda)$ *ha abbastanza iniettivi.*

(ii) In $\mathcal{M}^b(\Lambda)$ *sono nozioni equivalenti per un oggetto* V

$$\textit{iniettivo} \Longleftrightarrow \textit{proiettivo} \Longleftrightarrow \textit{libero}$$

Ultima, ma non meno importante, è la sezione dedicata ai funtori dove oltre alle definizioni base, dimostriamo un'importante caratterizzazione delle equivalenze di categorie che utilizzeremo per la dimostrazione dell'equivalenza BGG.

Teorema. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *è un'equivalenza di categorie* $\Longleftrightarrow$ F *è essenziale e pienamente fedele.*

Ricordiamo che

Definizione. Un funtore $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ è detto *fedele* (risp. *pieno*) se per ogni coppia (X, Y) in $\mathcal{C}$, la mappa

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$$

è iniettiva (risp. suriettiva).
Inoltre F è detto *essenziale* se per ogni oggetto X' in $\mathcal{C}'$ esiste X in $\mathcal{C}$ tale che $F(X) \simeq X'$.

Capitolo II

Scopo principale di questo capitolo è la costruzione della categoria derivata, che sarà eseguita per mezzo della localizzazione della categoria dei complessi (modulo omotopia) rispetto ai quasi-isomorfismi. Assumiamo come definizione di categoria derivata quella fornita per proprietà universale

Definizione . Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana, una *categoria derivata* di $\mathcal{A}$ è una categoria $D(\mathcal{A})$ e un funtore $Q : C(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A})$ tali che

(i) $Q(f)$ è un isomorfismo per ogni quasi-isomorfismo f.

(ii) Se $\mathcal{D}$ e Q' sono una categoria e un funtore soddisfacenti (i), allora esiste un unico funtore $F : D(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}$ tale che $Q' = F \circ Q$.

Introduciamo, nella sezione dedicata, la nozione di localizzazione rispetto ad un sistema localizzante di morfismi, necessaria al teorema di esistenza della categoria derivata. La definizio è raccolta nella seguente

Proposizione (-Definizione). *Sia S una classe localizzante di morfismi di una categoria $\mathcal{C}$. Allora i seguenti dati formano una categoria, detta* localizzata *di $\mathcal{C}$ rispetto a S e denotata $\mathcal{C}[S^{-1}]$*

$$Ob(\mathcal{C}[S^{-1}]) = Ob(\mathcal{C}),$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X,Y) = \left\{ \begin{tikzcd}[column sep=small] & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} : s \ in \ S, f \ in \ Mor(\mathcal{C}) \right\} \quad \text{mod } \sim$$

dove la relazione di equivalenza $\sim$ è definita come

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \sim \begin{tikzcd}[column sep=small] & X'' \arrow[dl, "s'"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \iff \begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & X''' \arrow[u, dashed, "q.i."', "r"] \arrow[d, dashed, "h"] & Y \\ & X'' \arrow[ul, "s'"] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

e il morfismo identità è

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\mathrm{id}_X"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"] & \\ X & & X \end{tikzcd}$$

La composizione è data usando le proprietà della classe localizzante S

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \arrow[r, phantom, "\circ"] & Y & & Z \end{tikzcd} =$$

$$= \begin{tikzcd} & & X'' \arrow[dl, dashed, "t'"'] \arrow[dr, dashed, "f'"] & & \\ & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} & X'' \arrow[dl, "st'"'] \arrow[dr, "gf'"] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

Con le notazioni sopra esposte il teorema di esistenza della categoria derivata assume la seguente forma

Teorema. *Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana, allora*

$$K(\mathcal{A})[\mathit{Quasi\text{-}iso}^{-1}] = D(\mathcal{A}).$$

dove $K(\mathcal{A})$ indica la categoria dei complessi su $\mathcal{A}$ modulo omotopia. Non potendo ovviamente introdurre tutte le nozioni base di algebra omologica necessarie, abbiamo scelto gli aspetti più attinenti allo spirito categoriale della tesi, trattando quindi la costruzione della categoria dei complessi e le proprietà categoriali che essa eredita dalla categoria base. Per necessità di notazioni percorriamo comunque nei paragrafi successivi le definizioni di funtore traslazione, troncamento e coomologia, la costruzione del cono e la nozione di omotopia, dimostrando per questi ultimi, con frecce e diagrammi, anche le note proprietà di caratterizzazione dei quasi-isomorfismi attraverso l'aciclicità del cono e del comportamento della coomologia sui morfismi omotopicamente nulli, e concludendo con la definizione dei complessi doppi e l'enunciato del lemma dell'assemblamento aciclico. Particolare rilievo è dato alla discussione del funtore di coomologia, di cui è dimostrato in ogni dettaglio la natura funtoriale e le principali proprietà, con la consueta attenzione ai diagrammi e frecce.

Nonostante la costruzione della categoria derivata sia indipendente dalla nozione di risoluzione, abbiamo comunque inserito il paragrafo inerente ad esse in questo capitolo, per la sua storica e reale attinenza, notevolmente più evidente nella trattazione dei funtori derivati. Ci limitiamo comunque alle definizioni e al risultato classico sull'esistenza delle risoluzioni.

Capitolo III

La corrispondenza BGG fece la sua prima comparsa nell'articolo [Bgg] di Bershtein, Gel'fand e Gel'fand nel 1978, in un periodo di crescente interesse per i fasci algebrici su $\mathbb{P}^n$. La traccia della dimostrazione descritta nell'articolo prevede l'uso dell'algebra simmetrica di uno spazio vettoriale, e mostra l'equivalenza tra le categorie derivate dei moduli sull'algebra esterna e simmetrica. Utilizzando quindi il teorema di Serre, che dà una descrizione della categoria $\mathrm{Coh}\mathbb{P}(E)$ in termini di moduli sull'algebra simmetrica, si ottiene per transitività la corrispondenza BGG.

Il punto di vista che adottiamo in questo capitolo, dovuto a I. Coandă (cfr. [Coa]), dimostra direttamente la corrispondenza definendo un funtore essenziale e pienamente fedele, ovvero un'equivalenza di categorie, tra $\mathcal{M}^b(\Lambda)$ e $D^b(\mathrm{Qcoh}\mathbb{P}(E))$. Il risultato chiave è nella dimostrazione diretta di un'importante proprietà degli insiemi di morfismi, che in [Bgg] è racchiusa sostanzialmente nell'osservazione 3. Nell'articolo di Bershtein, Gel'fand e Gel'fand tale osservazione è conseguenza diretta dell'equivalenza BGG, mentre nel nostro caso invertiamo l'ordine dimostrando l'osservazione e facendone conseguire il teorema principale sull'equivalenza.

Introduciamo nella prima sezione il funtore della corrispondenza BGG

$$L : \mathcal{M}^b(\Lambda) \longrightarrow C(\mathrm{Coh}\mathbb{P}(E))$$

definito su ogni oggetto V in $\mathcal{M}^b(\Lambda)$ come

$$L(V) = \cdots \to V^j \otimes \mathcal{O}(j) \xrightarrow{d^j} V^{j+1} \otimes \mathcal{O}(j+1) \to \cdots$$

$$d^j(v \otimes \varphi) = \sum_\alpha e_\alpha v \otimes \varphi x_\alpha$$

e sui morfismi

$$L\left(V \xrightarrow{f} W\right) = L(V) \xrightarrow{f \otimes id_{\mathcal{O}}} L(W)$$

di cui dimostriamo nei dettagli la buona posizione e la proprietà fondamentale di mandare oggetti liberi in complessi aciclici. Nella sezione successiva estendiamo il funtore L ad un funtore

$$\Phi : C(\mathcal{M}^b(\Lambda)) \to C(\mathrm{Qcoh}\mathbb{P}(E))$$

facendo ricorso alle nozioni di complessi doppi e dimostrandone le proprietà principali nel seguente

Lemma . *(i)* Φ *è esatto.*

(ii) $\Phi \circ T^k = T^k \circ \Phi$.

(iii) $Con(\Phi(f)) = \Phi(Con(f))$.

(iv) Sia f *in* $MorC(\mathcal{M}^b(\Lambda))$ *t.c.* $f \sim 0 \Longrightarrow \Phi(f) \sim 0$ *in* $MorC(\mathrm{Qcoh}\mathbb{P}(E))$.

(v) Sia f *in* $MorK^+(\mathcal{M}^b(\Lambda))$ *t.c.* f *è un q.i.* $\Longrightarrow \Phi(f)$ *è un q.i. in* $MorK(\mathrm{Qcoh}\mathbb{P}(E))$.

dalle quali segue soprattutto la possibilità di passare Φ al "quoziente" omotopico e derivato, situazione riassunta efficacemente nel seguente diagramma

$$
\begin{tikzcd}
& \mathcal{M}^b(\Lambda) \arrow[rr, "L"] \arrow[dl, hook'] \arrow[dr, dotted, no head, "\mathcal{L}"] & & C^b(\mathrm{Coh}\mathbb{P}(E)) \arrow[dl, hook'] \arrow[dd] \\
C^+(\mathcal{M}^b(\Lambda)) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[d] & & C(\mathrm{Qcoh}\mathbb{P}(E)) \arrow[d] \arrow[dr, dotted] & \\
K^+(\mathcal{M}^b(\Lambda)) \arrow[rr, "\Phi_K"] \arrow[d] & & K(\mathrm{Qcoh}\mathbb{P}(E)) \arrow[d] & D^b(\mathrm{Coh}\mathbb{P}(E)) \arrow[dl, hook'] \\
D^+(\mathcal{M}^b(\Lambda)) \arrow[rr, "\Phi_D"] & & D(\mathrm{Qcoh}\mathbb{P}(E)) &
\end{tikzcd}
$$

la commutatività dei quadrati della faccia anteriore del cubo è assicurata dalle proprietà di Φ, mentre quella della faccia superiore segue dalla definizione di Φ. Quest'ultima commutatività chiarisce in particolare il motivo per cui introduciamo Φ come un'estensione di L. Notiamo inoltre che la natura inferiormente limitata delle categorie dominio di complessi, è necessaria affiché valga la fondamentale proprietà di Φ sui quasi-isomorfismi vista nel lemma precedente. La composizione dei funtori indicata dalla freccia punteggiata è il funtore della corrispondenza BGG, che denotiamo con $\mathcal{L}$ e di cui ci occupiamo nella sezione dedicata al teorema principale

Teorema (Bernshtein–Gel'fand–Gel'fand, 1978).

(i) *Il funtore* $\mathcal{L} : \mathcal{M}^b(\Lambda) \longrightarrow D^b(\mathrm{Coh}\mathbb{P}(E))$ *è essenziale.*

(ii) *Siano* V, V' *in* $\mathcal{M}^b(\Lambda)$*, allora la mappa funtoriale*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^b(\Lambda)}(V, V') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D^b(\mathrm{Coh}\mathbb{P}(E))}(\mathcal{L}(V), \mathcal{L}(V'))$$

è suriettiva e il suo ker *consiste dei morfismi che fattorizzano attraverso un oggetto libero di* $\mathcal{M}^b(\Lambda)$*.*

Considerando la relazione d'equivalenza definita dal ker della mappa tra i gruppi di morfismi vista nella seconda parte del teorema

$$f \sim g \Longleftrightarrow f - g \text{ fattorizza via qualche modulo libero.}$$

per ogni coppia di morfismi in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^b(\Lambda)}(V, W)$, rimane definita la categoria $\mathcal{M}^b(\Lambda)_{lib}$

$$Ob(\mathcal{M}^b(\Lambda)_{lib}) = Ob(\mathcal{M}^b(\Lambda))$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^b(\Lambda)_{lib}}(V, W) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^b(\Lambda)}(V, W) \mod \sim$$

rispetto alla quale è possibile scrivere l'equivalenza BGG nella sua forma diretta

$$\mathcal{M}^b(\Lambda)_{lib} \simeq D^b(\mathrm{Qcoh}\mathbb{P}(E)).$$

Bibliografia

[AMc] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald: *Introduzione all'Algebra Commutativa*, Feltrinelli 1981

[Anc] V. Ancona, G. Ottaviani: *An Introduction to Derived Categories and the Theorem of Beilinson*, Atti Accademia Peloritana dei Pericolanti, Classe I di Scienze Fis. Mat. e Nat. 1989, v. LXVII, pp. 99 - 110

[Bgg] I. N. Bernshtein, S. I. Gel'fand, I. M. Gel'fand: *Algebraic bundles over* $\mathbb{P}^n$ *and problems of linear algebra*, Funktsional'nyi Analyz i Ego Prilozheniya 1978, v. 12, no. 3, pp. 66-67 [in Russo]. Traduzione in inglese: Functional Anal. Appli. 1978, v. 12, pp. 212-213

[Buc] D. A. Buchsbaum: *Lectures on regular local rings*, Battelle Institute Conference, Seattle, Wash 1968, v. 1, pp. 13 - 32

[Car] H. Cartan, S. Eilenberg: *Homological Algebra*, Princeton University Press 1956

[Coa] I. Coandă: *On the Bernshtein-Gel'fand-Gel'fand Correspondence and a result of Eisenbud, Fløystad, and Schreyer*, arXiv:math.AG/0206264 v1, 25 Jun 2002

[Coa2] I. Coandă, G. Trautmann: *Horrocks Theory and the Bernshtein-Gel'fand-Gel'fand Correspondence*, arXiv:math.AG/0304241 v1, 2003

[Eis] D. Eisenbud, G. Fløystad, F. -O. Schreyer: *Sheaf cohomology and free resolutions over exterior algebras*, arXiv:math.AG/0104203 v2, 2001

[Eis2] D. Eisenbud: *Commutative Algebra with a view toward on the Algebraic Geometry*, Springer 1995

[Fim] T. Fimmel: *Derived Categories and Functors*, Advanced workshop on Arithmetic Algebraic Geometry, I.C.T.P. Trieste, 31 agosto – 11 settembre 1992

[Gel] S. I. Gel'fand, Yu. I. Manin: *Methods of Homological Algebra*, Springer-Verlag 2003

[Har] R. Hartshorne: *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag 1977

[Kas] M. Kashiwara, P. Shapira: *Sheaves on Manifolds*, Springer-Verlag 1990

[McL] S. Mac Lane: *Categorie nella pratica matematica*, Boringhieri 1977

[Ser] E. Sernesi: *Appunti del corso di geometria algebrica*, Roma A.A. 1990/91

[Srr] J. -P. Serre: *Faisceaux Algébriques Cohérents*, Annals of Mathematic 1955, v.61, pp.197-278

[Tho] R. P. Thomas: *Derived categories for the working mathematician*, arXiv:math.AG/0001045, 7 Jan 2000

[Ver] J. L. Verdier: *Des Catégories Dérivées des Catégories Abéliennes*, Société Mathématique de France 1996

[Wei] C. A. Weibel: *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press 1994