UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI S.M.F.N.

Sintesi della
Tesi di Laurea in Matematica
di

Fabrizio Fanelli

La geometria del divisore theta della jacobiana di una curva algebrica

Relatore
Prof. Edoardo Sernesi

ANNO ACCADEMICO 2001 - 2002
FEBBRAIO 2003

Classificazione AMS: 30F10,30F15
Parole chiave: superfice di Riemann, curva algebrica, varietà jacobiana, funzione theta

Fabrizio Fanelli è nato a Roma il 24 novembre 1975.
Nel Luglio del 1994 ha conseguito il diploma di maturità scientifica presso il Liceo Scientifico Statale "Antonio Labriola" di Roma .
Nell'anno accademico 1994-95 si è immatricolato al Corso di Laurea in matematica.
Dopo una settimana dall'immatricolazione è risultato vincitore del concorso per accedere al 176° corso di allievo ufficiale presso l'Accademia Militare di Modena, nella sezione Armi Varie.
Nell'Aprile del 1995 ha ottenuto il congedo assoluto a causa di un incidente verificatosi durante un'esercitazione.
Riabilitatosi ha iniziato gli studi matematici.
Nell'anno 1999 è risultato vincitore di una borsa di collaborazione presso il laboratorio di calcolo.
Nell'anno accademico 1999-2000 ha usufruito di una borsa di studio Erasmus presso l'università islandese "Háskóli Íslands" in Reykjavich, dove ha anche conseguito un attestato di conoscenza elementare della lingua islandese.
Ha presentato per la prova di qualificazione all'esame di laurea le seguenti tesine orali:
"Prime proprietà delle funzioni ellittiche" e "teorema del punto fisso di Brower ".
Ha collaborato come Tutore Senior per i corsi di Analisi Matematica I modulo, AM1(b), nell'anno accademico 2001-2002, di Analisi Matematica I modulo, AM1(a), nell'anno accademico 2002-2003 e collaborerà al corso di Complementi di Analisi Matematica, CAM, tutti presso l'Università degli Studi Roma Tre.
Gli è stato anche affidato il compito di aggiornare il sito web del dipartimento di matematica nel trimestre 15/1/2003-15/4/2003.

Oggetto di questa tesi sono le superfici di Riemann compatte, ovvero le curve algebriche.
In questo lavoro descriveremo la costruzione della Varietà Jacobiana associata ad una superfice di Riemann compatta $\mathcal{C}$ e del suo divisore Theta.
Il nostro obbiettivo principale sarà lo studio dettagliato della geometria dei punti singolari del divisore Theta ed il modo in cui essi racchiudono informazioni riguardo il "Problema di Riemann-Roch" per $\mathcal{C}$.
Non daremo solamente i risultati classici di Riemann, che interpretano la molteplicità di un punto singolare del divisore Theta, ma anche risultati più recenti di Andreotti e Mayer, Mumford e Kempf.

La tesi è così strutturata:

Nel **primo capitolo** elencheremo le principali definizioni e faremo una veloce panoramica di alcuni risultati preliminari della teoria delle superfici di Riemann e delle curve algebriche; tutto ciò ci servirà anche a fissare le notazioni.
Non daremo alcuna dimostrazione delle proposizioni e dei teoremi enunciati, rimandando il lettore interessato a testi quali [Mir95], [Ful95], [Gun66] e [FK92].
Alcuni risultati della teoria delle funzioni complesse a più variabili sono stati

dati per acquisiti.

Nel **secondo capitolo** mostreremo la costruzione della Varietà Jacobiana associata ad una curva $\mathcal{C}$ di genere $g \geq 1$.
A tale fine sfrutteremo la struttura del primo gruppo di omologia di $\mathcal{C}$ e del primo gruppo di coomologia di De Rham.
Sia $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$ una base dell'omologia di $\mathcal{C}$, come da figura:

dimostreremo che esiste un'unica base $\{\omega_1, \ldots, \omega_g\}$ di $\Omega^{1,0}$ tale che

$$\left(\int_{\alpha_i} \omega_j \right) = (\delta_{ij}) = \mathbf{I}.$$

Posto $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}_{ij}) = \left(\int_{\beta_i} \omega_j \right)$, mostreremo che tale matrice g×g, a coefficienti complessi, è simmetrica con parte immaginaria definita positiva.
Se Λ è il sottogruppo di $\mathbb{C}^g$ generato dalle $2g$ colonne della matrice $(\mathbf{I}\boldsymbol{\tau})$ allora:

Definizione. *Data una curva di genere g, la* ***Varietà Jacobiana di*** $\mathcal{C}$ *è il toro complesso g-dimensionale* $J(\mathcal{C}) := (\mathbb{C}^g/\Lambda)$

Introdurremo anche la Varietà di Picard associata a $\mathcal{C}$:

Definizione. ***La Varietà di Picard di*** *$\mathcal{C}$, $Pic(\mathcal{C})$, è l'insieme delle classi di isomorfismo di fasci invertibili su $\mathcal{C}$.*
Indicheremo con $Pic^d(\mathcal{C})$ l'insieme delle classi di isomorfismo dei fasci invertibili di grado d.

Nel **terzo capitolo**, dopo aver introdotto le applicazioni di Abel e di Abel-Jacobi, dimostreremo il Teorema di Abel.

Teorema (di Abel). *C'è un isomorfismo naturale tra $Pic^0(\mathcal{C})$ e $J(\mathcal{C})$, tale che per ogni scelta del punto base $p_0 \in \mathcal{C}$, le rispettive applicazioni di Abel e di Picard, $u_0 : \mathcal{C}_d \to J(\mathcal{C})$ e $v_0 : \mathcal{C}_d \to Pic(\mathcal{C})$, dove $v_0(D) = \mathcal{O}(D - d \cdot p_0)$, rendono il seguente diagramma commutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_d \arrow[r, "u_0"] \arrow[dr, "v_0"'] & J(\mathcal{C}) \arrow[d, leftrightarrow, "\wr"] \\
& Pic^0(\mathcal{C})
\end{tikzcd}$$

Dopo una serie di considerazioni preliminari ci ridurremo a dimostrare il teorema in quest'altra sua forma:

Teorema (di Abel). *Per ogni punto base $p_0 \in \mathcal{C}$, l'Applicazione di Abel $u_0 : \mathcal{C}_g \longrightarrow J(D)$ definita da $u_0(D) = \left(\int_{g \cdot p_0}^{D} \omega_i\right)$ è una suriezione (Teorema di inversione di Jacobi).*
Inoltre per $D_1, D_2 \in \mathcal{C}_g$, $u_0(D_1) = u_0(D_2)$ se e solo se D_1 e D_2 sono linearmente equivalenti.

Useremo spesso il Teorema di Abel per identificare $Pic^0(\mathcal{C})$ con $J(\mathcal{C})$.

Nel **quarto capitolo** definiremo e studieremo la funzione Theta:

Definizione. *Data una matrice simmetrica $\boldsymbol{\tau}$, tale che $Im\ \boldsymbol{\tau} > 0$, ovvero appartenente al semispazio superiore di Siegel, definiamo una funzione su $\mathbb{C}^g$ così:*

$$\theta(z, \boldsymbol{\tau}) := \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp\left(i\pi({}^t n \boldsymbol{\tau} n + 2\ {}^t n z)\right).$$

Assumeremo il risultato generale che essa è olomorfa e ci concentreremo sulla dimostrazione che il suo luogo degli zeri è periodico rispetto al reticolo Λ, ovvero al sottogruppo di $\mathbb{C}^g$ generato dai vettori-colonna della matrice $(\mathbf{I}\boldsymbol{\tau})$.
Da questo discende che la funzione Theta definisce un divisore effettivo su $J(\mathcal{C})$.
Dopo aver dimostrato altre proprietà di θ dimostreremo il Teorema di Riemann, che asserisce che il Divisore Theta, a meno di traslazioni, è isomorfo a $W_{g-1} =: \mathrm{u}(\mathcal{C}_{g-1})$.

Teorema (di Riemann). *Sia $\gamma = b - u(u(\mathcal{C}) \bullet \Theta_b)$, dove $b \in J(\mathcal{C})$ ma $u(\mathcal{C}) \nsubseteq \Theta_b$, allora $\Theta = \gamma + u(\mathcal{C}_{g-1})$, ovvero $\Theta_{-\gamma} = u(\mathcal{C}_{g-1})$*

Concluderemo il capitolo dimostrando il Teorema delle singolarità di Riemann:

Teorema (delle singolarità di Riemann). *Sia $\mathcal{C}$ una curva liscia di genere g, allora per ogni divisore effettivo, D, di grado $g-1$ abbiamo che:*

$$molt_{u(D)+\kappa}(\Theta) = h^0(\mathcal{O}(D)).$$

Nell'**ultimo capitolo** ci dedicheremo allo studio dei coni tangenti al Divisore Theta, in particolare nei punti doppi.
Dopo aver esaminato un caso particolare, studiato da Andreotti e Mayer, forniremo le equazioni che determinano i coni tangenti:

Teorema. *Sia $\mathcal{O}(D) = L \in W_{g-1}$ e $h^0(L) = r+1$ allora poniamo $s = g - d + r$, dove $d = \deg D$.
Scegliamo una base, $\{\omega_1, \ldots, \omega_s\}$, di $\Omega^{1,0}(-D)$ ed una, $\{f_1, \ldots, f_{r+1}\}$, di $L(D)$.
Se $M = (f_i w_j)$, $1 \leq i \leq r+1$, $1 \leq j \leq s$, è la matrice i cui coefficienti sono le 1-forme olomorfe $f_i\omega_j$, pensate come coordinate lineari su $T_L(Pic^d(\mathcal{C})) \cong \Omega^{1,0\wedge} \cong \mathbb{P}^{g-1}$, allora la collezione dei minori di ordine $r+1$ di M ci fornisce equazioni omogenee, tutte di grado $r+1$ il cui luogo degli zeri comuni, in $\mathbb{P}^{g-1}$, è esattamente il cono tangente proiettivo a W_{g-1} in L.*

Corollario. *Sia* $L \in W_{g-1}$, *con* $h^0(L) = r+1$, *e* $\theta = \theta_{r+1} + \dots$ *è un'equazione locale per* W_{g-1} *vicino* L.
Sia $D \in |L|$, *scegliamo allora una base* $\{f_1, \dots, f_{r+1}\}$ *di* $L(D)$ *ed una base* $\{\omega_1, \dots, \omega_{r+1}\}$ *di* $\Omega^{1,0}(-D)$.
Allora, a meno di multipli scalari, si ha che:

$$\theta_{r+1} = \det(f_i \omega_j)$$

polinomio omogeneo nelle forme lineari $f_i \omega_j \in \Omega^{1,0}$.

Concluderemo esaminando alcuni casi particolari, ovvero studiando le informazioni che i coni tangenti al divisore Theta ci danno nel caso di curve di genere basso.

Per le nozioni fondamentali sulla teoria delle Superfici di Riemann assunte come note si fa riferimento al corso di GE5 tenuto dal Professor E. Sernesi nell'anno accademico 1998-99, per le nozioni basilari sulle curve algebriche assunte come note si fa riferimento al corso di Istituzioni di Geometria Superiore tenuto dal Professor A.F.Lopez nell'anno accademico 1997-98.
Sono stati di grande aiuto per la stesura del capitolo dei preliminari [Mir95] e [Ful95], ma sono stati consultati anche [Har77], [Ser93], [FK92], [Gun66], [Kem93], [Sha94a] e [Sha94b].
Il corpo della tesi è una rivisitazione di [Smi89] che ci ha fornito una splendida guida allo studio della "Theta Geometry".
Sono citati alcuni risultati di Kempf, presenti in [Kem86] e [Kem73], alcuni utilizzati nel corso della tesi, ed altri per offrire spunti per indagini future.
In particolare la dimostrazione del Teorema delle Singolarità di Riemann è una rielaborazione delle dimostarzioni date in [Smi89] pp $390 - 405$ e [ACGH85] pp $226 - 231$; tale combinazione è più snella di quella in [Smi89] e al tempo stesso più dettagliata di quella in [ACGH85].
[AM67] è stato usato nel capitolo finale per trovare le equazioni del cono tangente proiettivo del Divisore Theta nel caso particolare di un punto doppio, mentre [Mum75], pp 57-58, per dare una formula generale di tali equazioni, per un punto qualsiasi.

Bibliografia

[ACGH85] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, and J. Harris. *Geometry of algebraic curves. Vol. I*, volume 267 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1985.

[AM67] A. Andreotti and A. L. Mayer. *On period relations for abelian integrals on algebraic curves. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)*, 21:189–238, 1967.

[FK92] H. M. Farkas and I. Kra. *Riemann surfaces*, volume 71 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1992.

[Ful95] William Fulton. *Algebraic topology*, volume 153 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. A first course.

[Gun66] R. C. Gunning. *Lectures on Riemann surfaces*. Princeton Mathematical Notes. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1966.

[Har77] Robin Hartshorn. *Algebraic Geometry*. Springer, 1977.

[Kem73] George Kempf. *On the geometry of a theorem of Riemann. Ann. of Math. (2)*, 98:178–185, 1973.

[Kem86] George R. Kempf. *The equations defining a curve of genus* 4. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 97(2):219–225, 1986.

[Kem93] George R. Kempf. *Algebraic varieties*, volume 172 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[Mir95] Rick Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces*, volume 5 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[Mum75] David Mumford. *Curves and their Jacobians*. The University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., 1975.

[Mum88] David Mumford. *The red book of varieties and schemes*, volume 1358 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[Ser82] Edoardo Sernesi. *Appunti sui Divisori Speciali*. 1982.

[Ser90] Edoardo Sernesi. *Geometria 1*. Bollati Boringhieri, Torino, 1990.

[Ser93] Edoardo Sernesi. *Dispense per il corso di Geometria Algebrica*. 1993.

[Ser94] Edoardo Sernesi. *Geometria 2*. Bollati Boringhieri, Torino, 1994.

[Sha94a] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 1*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1994. Varieties in projective space, Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid.

[Sha94b] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 2*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1994. Schemes and complex manifolds, Translated from the 1988 Russian edition by Miles Reid.

[Smi89] Roy Smith. *The Jacobian variety of a Riemann surface and its theta geometry*. In *Lectures on Riemann surfaces (Trieste, 1987)*, pages 350–427. World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1989.