

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Metodi Semi-Lagrangiani di ordine alto per l'Equazione delle Acque Basse

Sintesi della tesi di Laurea in Matematica
di Roberto Flaiban
Relatore: Prof. Roberto Ferretti

Della enorme letteratura del matematico Leonardo Eulero (1707-1783), noi ci occuperemo dei suoi lavori sui fluidi e precisamente delle equazioni fondamentali che ne regolano il movimento di cui si serve oggi l'idrodinamica.

Eulero applicò alla meccanica tutta la potenza del calcolo infinitesimale, iniziando l'era moderna di questa scienza fondamentale, dove poi, sulla stessa via, fu oltrepassato dal suo amico Lagrange.

Un caso di particolare interesse per la soluzione di problemi idraulici è quello delle equazioni di Saint-Venant (ingegnere e matematico del XIX secolo) che si possono ricavare dalle equazioni di Eulero ponendosi in determinate condizioni. Queste equazioni sono conosciute anche come **Equazioni delle Acque Basse** (Shallow Water Equation).

Se per il nome sembra che queste siano applicabili solo alle acque con profondità piccola rispetto alle altre due dimensioni, in realtà i campi di applicazione di tali equazioni sono molti. In generale sono applicabili in tutti i problemi di fluidodinamica ambientale, dallo studio dei moti atmosferici alla oceanografia.

Previsioni metereologiche accurate sono di grande importanza per l'economia e per la pubblica sicurezza dei paesi: così come pure lo studio del movimento delle correnti negli oceani, della diffusione di inquinanti sulla terra, dei movimenti degli iceberg, etc.

E' chiaro che nello studio dei moti atmosferici il fluido (comprimibile) in considerazione è l'aria, e si considera come altezza dal "fondo", cioè dalla

terra, lo spessore della zona dell'atmosfera dove avvengono i movimenti delle nuvole (che è la troposfera). Mentre in oceanografia, dobbiamo pensare che anche i mari più profondi hanno profondità trascurabile rispetto alle altre due dimensioni.

Anche se questi movimenti avvengono nello spazio \mathbb{R}^3 , in genere essi vengono pensati come se avvenissero in \mathbb{R}^2 ; cioè le velocità non hanno componenti verticali; esiste però una componente di elevazione del pelo libero del fluido che ne fa le veci (pensiamo ad un'onda che incontra un ostacolo).

Quello che faremo è analizzare e sperimentare soluzioni di un problema modello in \mathbb{R} , dove avremo come variabili la velocità con una sola componente e l'elevazione scalare. Lo studio di questo problema modello è essenziale per il passaggio ad \mathbb{R}^2 .

In generale, per descrivere un liquido in movimento vengono adoperati due approcci diversi: quello euleriano e quello lagrangiano.

L'**approccio lagrangiano** consiste nel fissare un sistema di riferimento inerziale e nel descrivere il movimento del volumetto di liquido in questo sistema di riferimento. Fissata la posizione iniziale di un volumetto di fluido x_0 all'istante iniziale $t = 0$, si determinano le coordinate $\Phi_t(x_0)$, via via assunte nel tempo dall'elemento stesso.

L'**approccio euleriano** consiste nell'osservare il moto di un liquido in ogni punto fissato. Si osservano, di fatto, le velocità dei volumetti di fluido quando passano nel punto di osservazione. Quindi, scrivendo le componenti euleriane della velocità $u(x, t) = (u_1, u_2, u_3)$, con x si intende definire la posizione del punto di osservazione e con il tempo t l'istante in cui si effettua la misura.

Lo "stato dell'arte numerica" di questi anni presenta schemi alle differenze (euleriani puri) quali volumi finiti ed elementi finiti, metodi delle particelle (lagrangiani puri) e metodi semi-lagrangiani (eulero-lagrangiani) che rappresentano un compromesso tra i due filoni. Questi ultimi sono ritenuti i metodi più efficienti per calcoli su grande scala.

Gli schemi euleriani hanno il difetto di dover limitare il passo di tempo a causa di considerazioni sulla stabilità; mentre anche se gli schemi lagrangiani permettono di usare un tempo più lungo di quelli euleriani, si hanno notevoli difficoltà nel seguire la traccia della griglia di partenza costruita sulle variabili spaziali. Infatti la soluzione in punti iniziali equidistanti si può evolvere, per tempi lunghi, in un insieme molto irregolare di punti.

L'utilizzo dello schema eulero-lagrangiano tenta di prendere le caratteristiche migliori dei due: la soluzione calcolata su di una griglia regolare dello schema euleriano e la migliore stabilità di quello lagrangiano.

1. Equazioni di Eulero

Nella prima parte abbiamo descritto le equazioni che governano il moto di un fluido ideale e incomprimibile.

Partendo dal caso comprimibile, penseremo al fluido come ad un continuo, in cui le quantità calcolate: la velocità $u = u(x) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, la densità $\rho = \rho(x) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, sono le medie delle stesse quantità calcolate per ognuna delle molecole che si trovano in x .

Deriveremo le equazioni sulla base di tre principi fondamentali:

I) La conservazione della massa (non esiste quantità di materia creata o distrutta);

II) La conservazione del momento della quantità di moto, cioè la seconda legge di Newton $F = ma$ (la variazione nel tempo di quantità di moto della porzione di fluido è uguale alla forza applicata su di esso);

III) La conservazione dell'energia. Nel caso generale il secondo principio della termodinamica: $dQ - dL = dU$: dove Q è il calore, L il lavoro e U l'energia interna del sistema; nel caso di fluido ideale e incomprimibile abbiamo, come vedremo in seguito, la conservazione dell'energia totale del sistema.

Denotiamo con $\rho(x, t)dx$ la massa di fluido contenuta nell'elemento di volume dx al tempo t . La legge di conservazione della massa dice che:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(x, t) dx = 0, \quad (1)$$

dove $V_t = \{\Phi_t(x) \mid x \in V_0\}$ è l'insieme, al tempo t , delle particelle di fluido che erano nel volume V_0 all'istante iniziale t_0 .

Definiamo la velocità associata al moto Φ_t che parte dal punto x :

$$u(\Phi_t(x), t) := \frac{d}{dt} \Phi_t(x). \quad (2)$$

Dalla (1) discende l'**equazione di continuità**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0. \quad (3)$$

Nel nostro caso di fluido incomprimibile, considerando ρ costante, tale equazione diviene semplicemente:

$$\nabla \cdot u(x, t) = 0 \quad \forall x \in V, t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

La seconda legge di Newton o conservazione del momento ci dice che:

$$F = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(x, t) u(x, t) dx, \quad (5)$$

dove F è l'analogo integrale delle forze esterne che agiscono sulla parte di fluido in V_t .

Dalla (5) otteniamo la seguente relazione di **bilancio del momento**:

$$\rho(x, t) \frac{d}{dt} u(x, t) = -\nabla p(x, t) + \rho(x, t) f(x, t), \quad (6)$$

che nel nostro caso di fluido incompressibile diviene:

$$\frac{d}{dt} u(x, t) = -\nabla p(x, t) + f(x, t). \quad (7)$$

Supponiamo che non ci siano meccanismi di dissipazione all'interno del fluido, cioè che le forze agenti sul fluido siano conservative, allora vale il seguente:

Teorema 1. *Sia V un dominio limitato dello spazio, e u la soluzione della equazione (7), allora:*

$$\frac{d}{dt} E = 0. \quad (8)$$

Sulla base delle leggi di conservazione possiamo scrivere le **equazioni di Eulero** nel caso di un fluido ideale incompressibile:

$$\begin{cases} \nabla \cdot u(x, t) = 0, \\ \partial_t u(x, t) + (u(x, t) \cdot \nabla) u(x, t) = -\nabla p(x, t). \end{cases} \quad (9)$$

Se la velocità di un fluido è $u = (u_1, u_2, u_3)$, allora definiamo *campo rotore* o anche *vorticità* del flusso:

$$\omega(x) := \text{rot } u = (\partial_y u_3 - \partial_z u_2, \partial_z u_1 - \partial_x u_3, \partial_x u_2 - \partial_y u_1), \quad (10)$$

La vorticità dà una misura di come ruota il fluido.

Nel caso generale le equazioni di Eulero possono essere espresse in termini della vorticità come segue:

$$\begin{aligned} \text{rot } u = \omega, \quad \nabla \cdot u = 0, \\ \frac{d}{dt} \omega = \omega \cdot \nabla u. \end{aligned} \quad (11)$$

In due dimensioni la seconda delle (11) diventa molto semplice, infatti il campo u è $(u_1, u_2, 0)$, ed il rotore ha solo la terza componente non nulla, quindi se ridefiniamo $\omega := \omega_3$, possiamo considerare ω come uno scalare e abbiamo:

$$\frac{d}{dt} \omega(\Phi_t(x), t) = 0. \quad (12)$$

Se consideriamo anche condizioni al bordo caratteristiche dei fluidi ideali, l'equazione di Eulero diventa:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\omega &= (\partial_t + u \cdot \nabla)\omega = 0, \\ \omega &= \text{rot } u, \quad \nabla \cdot u = 0, \\ u \cdot n &= 0 \quad \text{su } \partial V, \\ u(x, 0) &= u_0(x),\end{aligned}\tag{13}$$

con $u_0(x)$ condizione iniziale.

Possiamo ora scrivere il seguente problema che è in stretta relazione con il precedente:

$$\begin{aligned}u_t(x) &= K_V * \omega_t(x) := \int_V K_V(x, x')\omega(x', t)dx', \\ \frac{d}{dt}\Phi_t(x) &= u(\Phi_t(x), t), \\ \Phi_0(x) &= x, \\ \omega(x, t) &= \omega_0(\Phi_{-t}(x)).\end{aligned}\tag{14}$$

Seguendo la formulazione variazionale dei problemi ai limiti, quello che viene svolto nella tesi è stabilire l'esistenza e l'unicità di una soluzione del problema (14) che è chiamata **soluzione debole** del problema (13) e abbiamo dato un teorema di regolarità, per poi tornare alla soluzione classica.

Vale il seguente teorema:

Teorema 2. *Sia $\omega_0 \in L_\infty(V)$. Esiste un'unica tripla (Φ, u, ω) , soluzione del problema (14), dove $\omega \in L_\infty([0, T], L_\infty(V))$, $u = K_V * \omega$ è un campo vettoriale quasi-Lipschitz, e Φ soddisfa il problema di Cauchy formato dalla seconda e terza equazione di (14).*

Vale anche il seguente teorema che ci assicura la regolarità delle soluzioni:

Teorema 3. *Sia $\omega_0 \in C^k(V)$, con $k \geq 1$. Allora ω_t , soluzione dell'equazione di Eulero con dato iniziale ω_0 , è anch'essa una soluzione classica, nel senso che la prima equazione delle (13) è soddisfatta per ogni x e t . In più, per ogni t , $\omega_t \in C^k(V)$.*

2. Equazioni delle acque basse

Ciò che viene fatto nella seconda sezione della tesi è ricavare le equazioni delle acque basse partendo dalle equazioni fondamentali di Eulero (9), e viene mostrato in quali particolari condizioni queste sono equivalenti.

Assumiamo che il dominio occupato dal fluido abbia dimensione verticale trascurabile rispetto alle altre due. Ciò è usualmente vero nel caso dei laghi e dei fiumi.

Sia $\eta(x, t)$ l'altezza della superficie istantanea dell'acqua misurata verticalmente rispetto ad un punto di riferimento, $h(x)$ la profondità misurata verticalmente sotto lo stesso punto di riferimento e $H := \eta + h$.

Consideriamo come forze agenti sul fluido la forza di gravità g e la forza di frizionamento col fondo $f = -\gamma v H$ proporzionale alla velocità v . Le equazioni delle acque basse di Saint-Venant che derivano dalla (9) sono:

$$\begin{cases} \partial_t H(x, t) + \nabla \cdot (v(x, t)H(x, t)) &= 0, \\ \partial_t v + (v \cdot \nabla)v + g\nabla H &= -\gamma v. \end{cases} \quad (15)$$

Esistono tecniche euristiche per poter dare delle condizioni al bordo. Sappiamo che nel caso il dominio è tutto \mathbb{R}^2 , bisogna assegnare H e v per $t = 0$, nel caso invece di un dominio limitato oltre alle precedenti condizioni bisogna assegnare l'elevazione o la velocità sul bordo di tale dominio.

Le equazioni delle acque basse unidimensionali (15) possono essere riscritte in una forma equivalente operando la sostituzione $z = 2\sqrt{gH}$. Siano infatti $C_1 = u + z/2$ e $C_2 = u - z/2$ le velocità caratteristiche, denotando le due direzioni caratteristiche con τ_1 e τ_2 l'equazione (15), dopo alcune considerazioni, diventa:

$$\begin{cases} \mu_1(\partial_{\tau_1} u + \partial_{\tau_1} z) &= gS - \gamma u, \\ \mu_2(\partial_{\tau_2} u - \partial_{\tau_2} z) &= gS - \gamma u. \end{cases} \quad (16)$$

dove $(\mu_1)^2 = 1 + C_1^2$ e $(\mu_2)^2 = 1 + C_2^2$.

Vedremo che questa nuova forma delle equazioni delle acque basse unidimensionali, ci permetterà di discretizzare molto più facilmente le stesse equazioni.

3. Metodi di approssimazione

Supponiamo di avere un'equazione del tipo:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(v(x, t))}{\partial x} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + f'(v(x, t))\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = 0, \quad (17)$$

dove $v : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un vettore m -dimensionale. Il problema principale della teoria delle equazioni non lineari (17), è lo studio della soluzione in grande (rispetto a t) del problema di Cauchy formato dalla stessa (17) con l'aggiunta delle condizioni iniziali:

$$v(x, 0) = v_0(x) \quad x \in \mathbb{R}^m. \quad (18)$$

Dall'equazione (17) si nota che la $v(x, t)$ è costante lungo le curve $x = x(t)$ tali che:

$$\frac{dx}{dt} = f'(v(x, t)), \quad (19)$$

essendo il primo membro della (17) la derivata totale di $v(x, t)$ lungo la stessa curva (19).

Tali curve sono dette *curve caratteristiche*.

In alcuni casi le equazioni delle acque basse possono essere ricondotte alla forma (17). Consideriamo infatti le equazioni (15) nel caso unidimensionale:

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u + g \partial_x H = gS - \gamma u, \\ \partial_t H + u \partial_x H + H \partial_x u = 0, \end{cases} \quad (20)$$

allora le possiamo riscrivere in forma di legge di conservazione se assumiamo per ipotesi che $S = 0$, cioè il fondo è piatto; e $\gamma = 0$, cioè il frizionamento con il fondo è nullo:

$$\begin{cases} \partial_t u + (\frac{1}{2}u^2 + gH)_x = 0, \\ \partial_t H + (uH)_x = 0, \end{cases} \quad (21)$$

dove il flusso $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è:

$$f(u, H) = (u^2/2 + gH, uH). \quad (22)$$

Si può dimostrare che in generale non esiste una soluzione in senso classico del problema (17)-(18) per ogni $t > 0$, ma solo per valori di t sufficientemente piccoli. La causa di ciò non è il grado di regolarità del flusso $f(v)$ o del dato iniziale $v_0(x)$, ma esclusivamente la non linearità del flusso stesso. Se per approssimare le soluzioni utilizziamo il metodo di Godunov, un metodo con accuratezza del primo ordine descritto nel paragrafo 6.2 della tesi, otteniamo dei risultati molto regolari anche in regioni dove ci sono discontinuità. Come vedremo questo accade perché un metodo del primo ordine ha una grossa quantità di "viscosità numerica" che regolarizza la soluzione anche se ciò non corrisponde alla soluzione reale.

Se invece utilizziamo un metodo del secondo o del terzo ordine, eliminiamo la viscosità numerica ma introduciamo un effetto dispersivo che fa nascere delle oscillazioni nella soluzione approssimata attorno alle discontinuità.

Introduciamo ora il **problema di Riemann**. Questo oltre ad essere alla base dello schema alla Godunov, è il tipico problema da usare se si vuole conoscere il comportamento di un algoritmo attorno alle discontinuità.

Esso è un dato iniziale costante che possiede una sola discontinuità:

$$v_0(x) = \begin{cases} v_s & x < 0, \\ v_d & x > 0. \end{cases} \quad (23)$$

La forma della soluzione dipende dalla relazione tra la condizione iniziale a destra e a sinistra dello 0, v_s e v_d :

Se $v_s > v_d$ vediamo che fin dagli istanti iniziali si forma una discontinuità causata dall'incrocio di caratteristiche, denominata *shock*.

Esiste una relazione tra la velocità di questa s , gli stati v_s e v_d , chiamata condizione di salto di *Rankine-Hugoniot*:

$$f(v_s) - f(v_d) = s(v_s - v_d). \quad (24)$$

Scriviamo ora semplicemente le approssimazioni finali del metodo di Godunov e del metodo semi-lagrangiano. Costruiamo nel semipiano $t \geq 0$ la griglia $\{x_j = j\Delta x, t_n = n\Delta t; j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ con Δx e Δt positivi, rispettivamente l'incremento nello spazio e nel tempo.

I metodi che eseguiremo produrrà un'approssimazione $v_j^n \in \mathbb{R}^m$ della soluzione esatta $v(x_j, t_n)$ che ha come condizione iniziale $v(x, 0)$, in modo che $v_j^n \approx v(x_j, t_n)$.

Faremo vedere in un caso semplice, cioè all'equazione del trasporto lineare unidimensionale seguente:

$$\begin{cases} v_t + cv_x = 0 & x \in \mathbb{R}, \\ v(x, 0) = v_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (25)$$

dove c è una costante non nulla, sia il metodo di Godunov che il metodo semi-lagrangiano e vedremo che quest'ultimo si può vedere come una generalizzazione del primo.

Il flusso f nel metodo di Godunov è il seguente:

$$f(v^*(v_j^n, v_{j+1}^n)) = \begin{cases} cv_j^n & \text{se } c \geq 0, \\ cv_{j+1}^n & \text{se } c < 0. \end{cases} \quad (26)$$

Quindi il metodo di Godunov diventa per il caso (25):

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} c [v_j^n - v_{j-1}^n] & \text{se } c \geq 0, \\ v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} c [v_{j+1}^n - v_j^n] & \text{se } c < 0, \end{cases} \quad (27)$$

con la condizione CFL (Courant, Friedrichs e Lewy):

$$\left| \frac{\Delta t}{\Delta x} c \right| \leq 1. \quad (28)$$

Nel caso semi-lagrangiano utilizziamo per la discretizzazione in tempo lo schema di Eulero, così da avere:

$$\begin{aligned} v^{n+1}(x, t_{n+1}) &= v^n(x + hc, t_n) \\ v^0(x, t_0) &= v_0(x). \end{aligned} \quad (29)$$

Se poi supponiamo ad esempio $c < 0$, è vero pure che il punto $y := x_j + hc$ cade in un intervallo $[x_{j-l}, x_{j-l+1}]$ con $l \geq 0$. Per la discretizzazione in spazio utilizziamo gli elementi finiti di grado 1, allora la (29) diventa:

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= v_{j-l}^n + \frac{y - x_{j-l}}{\Delta x} (v_{j-l+1}^n - v_{j-l}^n) \\ v^0(x_j, t_0) &= v_0(x_j), \end{aligned} \tag{30}$$

dove $\Delta x = x_{j-l+1} - x_{j-l}$ perché consideriamo intervalli costanti. Se allora l fosse uguale a 0 nella (30), vediamo che questa diverrebbe uguale alla seconda delle (27), cioè proprio lo schema di Godunov nel caso $c < 0$. Il caso c positivo ci porterebbe allo stesso modo alla prima delle (27).

A differenza del metodo di Godunov possiamo osservare che nel metodo semi-lagrangiano non facciamo richieste di tipo CFL, infatti possiamo tornare indietro sulle caratteristiche per tempi relativamente lunghi e questo ci evita la perdita di informazioni causata da un alto numero di iterazioni.

4. Schema semi-lagrangiano per le S.W.E

Il metodo proposto è un'estensione nonlineare, semi-implicita del metodo semi-lagrangiano visto in precedenza, e mostreremo che è incondizionatamente stabile. Inoltre il metodo non sviluppa oscillazioni spurie nel caso di interpolazioni di ordine basso, mentre vien fuori una certa quantità di viscosità numerica che può essere controllata aumentando il passo in tempo o migliorando la discretizzazione spaziale, sicuri proprio per il fatto che il metodo è incondizionatamente stabile.

Il metodo è descritto in [CC]. Nel lavoro viene utilizzato il solo metodo di ordine uno (metodo di Eulero), per l'approssimazione in tempo, e la sola interpolazione lineare per l'approssimazione in spazio.

Quello che abbiamo fatto è costruire un metodo di ordine due (metodo di Heun), per l'approssimazione in tempo, e dare più scelte per le interpolazioni in spazio aggiungendo quella cubica e quelle di tipo ENO, descritte nel paragrafo 6.2 della tesi.

Per discretizzare le (16) numericamente, le caratteristiche lungo ogni punto della griglia vengono approssimate con rette le cui pendenze sono date dalle velocità delle caratteristiche C_1 e C_2 al tempo t_k .

Siano x_{i-a} e x_{i-b} i due punti di intersezione delle caratteristiche τ_1 e τ_2 , che passano per (x_i, t_{k+1}) , con la retta $t = t_k$.

I valori a e b sono dati da:

$$a = (C_1)_{i-a} \frac{\Delta t}{\Delta x} = [u_{i-a}^k + \sqrt{gH_{i-a}^k}] \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$b = (C_2)_{i-b} \frac{\Delta t}{\Delta x} = [u_{i-b}^k - \sqrt{gH_{i-b}^k}] \frac{\Delta t}{\Delta x}. \quad (31)$$

Allora le (16) vengono approssimate con le seguenti equazioni alle differenze:

$$\begin{aligned} (u_i^{k+1} - u_{i-a}^k) + (z_i^{k+1} - z_{i-a}^k) &= \Delta t \{gS_i - \gamma_{i-a}^k [(1 - \alpha)u_{i-a}^k + \alpha u_i^{k+1}]\} \\ (u_i^{k+1} - u_{i-b}^k) - (z_i^{k+1} - z_{i-b}^k) &= \Delta t \{gS_i - \gamma_{i-b}^k [(1 - \alpha)u_{i-b}^k + \alpha u_i^{k+1}]\} \end{aligned} \quad (32)$$

dove $0 \leq \alpha \leq 1$.

Nel programma implementato abbiamo dato la possibilità di scegliere tra le seguenti interpolazioni in spazio:

- 1) Interpolazione lineare,
- 2) Interpolazione cubica,
- 3) Approssimazione ENO.

Ciò tra le interpolazioni studiate nel paragrafo 6.2 della tesi.

Per analizzare la stabilità del metodo Eulero-Lagrangiano appena descritto assumiamo, per ipotesi, γ , C_1 , C_2 costanti e che $S = 0$. In più, le equazioni (32) le assumiamo definite su di un dominio spaziale infinito o con condizioni periodiche al bordo su di un dominio finito, cosicchè l'analisi di stabilità alla von Neumann può essere applicata.

Se introduciamo lo sviluppo di Fourier per le variabili u e z , l'analisi di stabilità la eseguiamo sui corrispondenti coefficienti di Fourier. La condizione di stabilità ottenuta richiede che debba essere soddisfatta la seguente diseuguaglianza:

$$(1 - \alpha)\gamma\Delta t \leq 1. \quad (33)$$

Nel caso in cui $\alpha = 1$, la diseuguaglianza (33) è soddisfatta per ogni Δt , e quindi il metodo è incondizionatamente stabile. Quando il metodo numerico verifica questa proprietà, la viscosità numerica può essere controllata riducendo l'incremento Δx o incrementando Δt senza violare la condizione di stabilità.

Per passi di tempo lunghi si riducono i calcoli computazionali e, allo stesso tempo, si riduce la viscosità numerica. La incondizionata stabilità permette anche la riduzione del passo in spazio quando si richieda una più alta accuratezza.

Un secondo metodo di discretizzazione in tempo che abbiamo usato per trovare la soluzione del problema (15), è il metodo *predictor-corrector* di secondo ordine di Heun:

$$\begin{aligned} (u_i^{k+1} - u_{i-a}^k) + (z_i^{k+1} - z_{i-a}^k) &= \Delta t \left\{ \frac{g}{2} [S_i + S_{i-a}] - \frac{1}{2} [\gamma_{i-a}^k u_{i-a}^k + \gamma_i^{k+1} \bar{u}_i^{k+1}] \right\} \\ (u_i^{k+1} - u_{i-b}^k) - (z_i^{k+1} - z_{i-b}^k) &= \Delta t \left\{ \frac{g}{2} [S_i + S_{i-b}] - \frac{1}{2} [\gamma_{i-b}^k u_{i-b}^k + \gamma_i^{k+1} \bar{u}_i^{k+1}] \right\}, \end{aligned} \quad (34)$$

Nel paragrafo 9 della tesi vengono mostrati alcuni esempi di come questo algoritmo approssima le soluzioni e si nota come ad elevazioni iniziali del pelo libero del fluido, nei casi di fondo con presenza di cunetta e in assenza di questa, corrispondono delle soluzioni vicine alla realtà fisica.

Questa realtà viene rispettata anche al bordo, infatti abbiamo preso come esempio la velocità nulla sul bordo, e questo fa sì che l'elevazione dell'onda aumenti e diminuisca quando la massa di fluido incontra il bordo e torna indietro come accade realmente.

Figura 1: Onda centrata, soluzioni.

Nella tesi viene costruita, per alcuni di precedenti esempi, una soluzione cosiddetta "esatta", calcolata cioè con passi di tempo molto piccoli e con numero di nodi in spazio molto alto. Quindi viene confrontata tale soluzione con la stessa calcolata con una diversa discretizzazione temporale e con diverse interpolazioni spaziali; i dati sono posti in tabelle.

Tra le interpolazioni temporali vediamo che quella di secondo ordine è più precisa e converge più velocemente alla soluzione "esatta". Per quanto riguarda le interpolazioni spaziali, negli esempi regolari è più precisa l'interpolazione cubica, ma se la utilizziamo nel problema di Riemann, e quindi in generale in casi in cui ci siano delle discontinuità, questa produce delle oscillazioni spurie indesiderate.

Quindi, ricordando quanto detto a proposito delle difficoltà matematiche e numeriche nel paragrafo 5.2 della tesi a proposito delle caratteristiche che ricercavamo nel metodo, concludiamo che le approssimazioni di tipo ENO sono quelle che si avvicinano di più al comportamento desiderato.

Ci siamo soffermati sul problema di Riemann. Possiamo pensare questo problema nella realtà come ad una diga che si rompe (*dambrake problem* nella letteratura anglosassone).

Figura 2: Dato di Riemann, soluzioni.

Quello che possiamo notare dal grafico è il formarsi di un'onda di rarefazione che si muove verso sinistra e un onda di shock che invece si muove verso destra. Notiamo come nel caso dell'onda di rarefazione la soluzione è continua, mentre nel caso dello shock c'è una visibile discontinuità di salto.

Il problema è gestire la molteplicità di caratteristiche nello shock.

La strategia più efficace tra quelle sperimentate, sembra essere quella di "tornare indietro" sulla caratteristica indicata dalla velocità s_2 calcolata con la formula di Rankine-Hugoniot, come si fa nel caso lineare: sappiamo infatti che "cadiamo" dal lato giusto dello shock e possiamo quindi prendere il valore di v sicuri che sia vicino a quello giusto. E' stato verificato che questa strategia rispetta la conservazione della massa in modo soddisfacente.

Bibliografia

- [B] Bell E.T. *I grandi matematici*, Firenze, Biblioteca Sansoni, 1973.
- [Br] Brezis H. *Analisi funzionale*, Napoli, Liguori Editore, 1983.
- [C] Casulli V., Cheng R.T. *Stability analysis of Eulerian-Lagrangian methods for the one-dimensional shallow-water equations*, App. Math. Modelling, Vol. 14, 1990.
- [Co] Corrias L. *Schemi numerici per le leggi di conservazione*, tesi di laurea, 1990.
- [CM] Chorin A.J., Marsden J.E. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Heidelberg, Springer-Verlag, 1979.
- [F] Ferretti R. *Appunti di linguaggio fortran 77 per uso numerico*, dispensa per il corso di "Analisi Numerica", Università di Rome Tre, 1998.
- [FF] Falcone M., Ferretti R. *Convergence analysis for a class of high-order semi-lagrangian advection schemes*, preprint, aprile 1997.
- [FFM] Falcone M., Ferretti R. e Manfroni T. *Optimal discretization steps for a class of semi-lagrangian schemes*, preprint, 1995.
- [L] LeVeque R.J. *Numerical Methods for Conservation Laws*, Basel, Birkhäuser Verlag, 1992.
- [MP] Marchioro C., Pulvirenti M. *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids*, Berlin, Springer-Verlag, 1992.
- [P] Pironneau O. *Finite Element Methods for Fluids*, Paris, Masson, 1989.
- [Q] Quarteroni A. *Elementi di calcolo numerico*, Bologna, Società Editrice Esculapio, 1994.

- [SC] Staniforth A., Côté J. *Semi-Lagrangian Integration Schemes for Atmospheric Models-A Review*, Monthly Weather Review, Vol. 119, 1991.
- [V] Vardanega E. *Schemi alla Godunov al I e II ordine per l'integrazione numerica delle equazioni di Eulero*, tesi di laurea, Università degli Studi di Roma "La sapienza".