UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE MM.FF.NN.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica
di
Andrea Gambioli

Superfici di Riemann e Geometria Riemanniana

Anno Accademico 2000-01
Luglio 2001

Sintesi

In questo lavoro ci si è occupati di mettre in luce alcune relazioni tra la teoria delle varietà liscie di dimensione complessa 1 e le varietà di dimensione reale 2 dotate di una metrica Riemanniana. In primo luogo si è sviluppato il linguaggio della coomologia dei fasci, strumento principe della Geometria Algebrica moderna, adatto a trattare il passaggio tra la risoluzione locale dei problemi e la loro estensione globale a tutta la varietà , e questo vale in dimensione qualsiasi; ad esempio lo 0-esimo gruppo di coomologia rappresenta gli oggetti del fascio definiti globalmente sulla superficie; il primo gruppo di coomologia associato al fascio delle funzioni olomorfe $H^1(X, \mathcal{O})$ invece può essere interpretato come lo spazio delle ostruzioni alla risoluzione del problema di Mittag-Leffler su una superficie di Riemann X, ovvero il problema di determinare l'esistenza di una funzione meromorfa che abbia nel suo sviluppo di Laurent parti principali preassegnate μ definite su un sottoinsieme $P \subset X$. Nel caso che la superficie sia compatta il Teorema di Dualità di Serre permette di mettere in relazione $H^1(X, \mathcal{O})$ con le 1-forme olomorfe globalmente definite su X, deducendone una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una soluzione di un problema μ assegnato; più semplice il caso delle superfici non compatte, su cui la banalità dell'$H^1(X, \mathcal{O})$ garantisce,come nel piano complesso, la risolubilità di ogni problema di Mittag-Leffler. In seguito si è utilizzato il linguaggio dei fasci per la dimostrazione di altri risultati classici della teoria delle superfici di Riemann , seguendo soprattutto [Forster]: il Teorema di Riemann-Roch, il Teorema di Weierstrass, il Teorema di approssimazione di Runge, il Lemma di Weyl: tutto ciò in vista della dimostrazione di quello che è il risultato principale della tesi: il Teorema di Uniformizzazione, che fornisce una classificazione delle superfici di Riemann semplicemente connesse a meno di biolomorfismi: il risultato è che si ottengono solamente tre classi di equivalenza in questo senso, rappresentate rispettivamente dalla sfera di Riemann $\mathbb{P}^1$, dal piano complesso $\mathbb{C}$ e dal disco unitario D; ciò mette in evidenza come la struttura complessa dia un informazione più ricca della topologia, distinguendo due oggetti come il piano Euclideo e il disco unitario, omeomorfi attraverso l'applicazione $f : D \to \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{z}{1 - z\overline{z}}$$

ma non biolomorficamente equivalenti: per il Teorema di Liouville una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ con immagine contenuta in un disco è necessaria-

mente costante. A questo punto abbiamo concentrato la nostra attenzione sulle relazioni tra le strutture complesse associate alle superficie di Riemann e quelle riemanniane definibile in generale su una varietà differenziabile reale bidimensionale; intanto va notato che il fatto che i cambiamenti di coordinate su una superficie di Riemann siano biolomorfi implica la possibilità di definire in modo globale sulla superficie una orientazione ed una "struttura conforme", la possibilità cioè di misurare gli angoli tra i vettori tangenti alla superficie in modo indipendente dal sistema di coordinate: ciò che accade nel caso bidimensionale (ma quasi mai in dimensione più alta) è che si possono scegliere su una superficie dotata di struttura Riemanniana opportuni sistemi di coordinate, dette *isoterme*, rispetto a cui la metrica può essere scritta nella forma

$$\begin{pmatrix} \lambda(x) & 0 \\ 0 & \lambda(x) \end{pmatrix},$$

cioè conformemente equivalente alla metrica euclidea, fatto che risolve il problema della classificazione delle strutture conformi da un punto di vista puramente locale; lo Jacobiano dei cambiamenti di coordinate isoterme ha le componenti che soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann: si tratta perciò di funzioni biolomorfe. Ecco dunque il ponte tra la teoria in variabile complessa unidimensionale e quella reale bidimensionale, che permette di applicare il Teorema di Uniformizzazione ad oggetti dotati metrica Riemanniana, purché semplicemente connessi: l'interesse è rivolto nei confronti dei rivestimenti universali, che a questo punto possono essere ricondotti a meno di trasformazioni biolomorfe ai tre casi ellittico, parabolico ed iperbolico, cioè $\mathbb{P}^1, \mathbb{C}$ e D. Il risultato di queste considerazioni è che ogni superficie dotata di struttura Riemanniana è conformemente equivalente al quoziente di uno di questi tre rappresentanti semplicemente connessi su un gruppo di isometrie senza punti fissi; infatti studiando le trasformazioni conformi di queste tre superfici ci si rende conto che nel caso del disco unitario e del piano complesso esse coincidono con le isometrie degli stessi dotati rispettivamente della metrica iperbolica e di quella eiuclidea; il caso della sfera è leggermente più ostico: cioè i gruppi di trasformazioni conformi della sfera in sé senza punti fissi sono sempre *coniugati* al gruppo $\{Id, -Id\}$ costituito dall'identità e dalla mappa antipodale, che sono entrambe isometrie della sfera dotata della metrica piatta; dalla teoria dei rivestimenti sappiamo che gruppi coniugati danno origine a quozienti equivalenti tramite la trasformazione che definisce il coniugio, che nel nostro caso è una trasformazione conforme: se ne può concludere che se X è una superficie Riemanniana, $\tilde{X}$ il suo rivestimento universale e se Γ è un gruppo di isometrie senza punti fissi di $\mathbb{P}^1, \mathbb{C}$ o D (denotate genericamente con F) in sé allora il seguente diagramma è commutativo

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \tilde{X} & \xrightarrow{\phi} & F & \\
p & \downarrow & & \downarrow & p'_\Gamma \\
 & X & \xrightarrow[\psi]{} & F/\Gamma &
\end{array} \quad ,
$$

dove ϕ e ψ sono trasformazioni conformi; cioè che superficie dotata di struttura Riemanniana è conformemente equivalente ad una di curvatura costante (rispettivamente $1, 0$ o -1): in questo senso gli spazi a curvatura costante esauriscono tutte le possibilità per quanto riguarda le superfici. L'ultima considerazione interessante da fare è che i le superfici di tipo F/Γ sono complete, cioè hanno le geodetiche $\alpha(t)$ definite per ogni $t \in \mathbb{R}$: dunque anche una superficie non completa è conformemente isomorfa a una completa.

Bibliografia

[Ahlf1] Ahlfors, L.V. : *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1979

[Ahlf2] Ahlfors, L.V. e Sario, L. : *Riemann Surfaces*, Princeton University Press, 1960

[Chern] Chern, S.S. : "An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface", Proc. Amer. Math. Soc 6(1955), 771–782

[Cohn] Cohn, H. : *Conformal Mapping on Riemann Surfaces*, McGraw-Hill, 1967

[doC1] do Carmo, M.P. : *Differential Geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall,1976

[doC2] do Carmo, M.P. : *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992

[Forster] Forster, O. : *Lectures on Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, 1984

[Fulton] Fulton, W. : *Algebraic Topology: a first course*, Springer-Verlag, 1995

[Greenberg] Greenberg, M.J. e Harper,J.R. : *Algebraic Topology: a first course*, Benjamin-Cummings, 1981

[G-H] Griffiths, P. e Harriss, J.: *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley and sons, 1978

[Miranda] Miranda, R. : *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, AMS, 1995

[Warner] Warner, F.W. : *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, 1983

[Wolf] Wolf, A.J. : *Spaces of constant curvature*, Publish or Perish, 1984