



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Costruzione ed analisi di convergenza degli schemi  
Semi-Lagrangiani in forma conservativa

Sintesi

**Candidato**

**Relatore**

Serena Garra

Prof. Roberto Ferretti

Anno Accademico 2010/2011

# Introduzione

L'interesse nei confronti di schemi di alto ordine a grandi passi in tempo per equazioni a derivate parziali del primo ordine è cresciuto negli ultimi decenni. La prima formulazione di questo tipo di schema fu proposta da Courant, Isaacson e Rees in [2] per sistemi di equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico, e si basa sull'uso numerico del metodo delle caratteristiche. Questa idea ha aperto la strada allo studio di tecniche più specifiche che sono alla base dei metodi oggi indicati come semi-lagrangiani (SL).

Questo tipo di schemi ha trovato applicazione in numerosi ambiti i più classici dei quali sono quello della meteorologia computazionale a partire dalla fine degli anni '50 (vedi l'articolo di rassegna [10]), e quello della fisica dei plasmi dalla metà degli anni '70.

Gli schemi semi-lagrangiani nascono come combinazione tra due modi diversi di rapportarsi al meccanismo fisico del trasporto in un fluido: da un lato l'approccio euleriano, che consiste nell'osservare l'evoluzione del fenomeno da un punto fissato esterno, dall'altro l'approccio lagrangiano che consiste nel seguire l'evoluzione di una particella di fluido. Il risultato di questa combinazione è uno schema che segue le linee di flusso del fluido (ad esempio, nel caso di trasporto lineare, mediante la formula delle caratteristiche), ma riproietta la soluzione ogni  $\Delta t$  su una griglia regolare. Questo fatto costituisce un tratto fondamentale per questi schemi che li distingue

---

sia dai metodi alle differenze finite (in cui gli operatori differenziali, che compaiono nell'equazione del trasporto, vengono sostituiti con i rapporti incrementali scelti opportunamente), sia dai metodi puramente lagrangiani, in cui ad ogni passo in tempo è necessario cambiare la griglia computazionale seguendo l'evoluzione delle particelle di fluido.

Il vantaggio principale nell'uso dei metodi SL è di non essere soggetti alla usuale restrizione degli schemi euleriani di lavorare con numeri di Courant piccoli per assicurarne la stabilità. Un altro vantaggio è la possibilità di ridurre (appunto mediante numeri di Courant grandi) la viscosità numerica. D'altra parte però l'uso di passi in tempo grandi determina un aumento del costo computazionale di una singola iterazione temporale dell'algoritmo in quanto, per ogni avanzamento in tempo, si deve tener conto, e lavorare, su un maggior numero di informazioni. Inoltre, gli schemi semi-lagrangiani sono costruiti in una forma che non garantisce la conservazione della massa.

Per superare questo secondo problema nel discreto si sono iniziate a costruire (vedi [7]) versioni di questi schemi che accoppiano l'idea delle caratteristiche e allo stesso tempo il vincolo della conservazione della massa (condizione alla base dei metodi conservativi classici). Proprio per questo motivo, questa tipologia di schema prende il nome di schema semi-lagrangiano in forma di flusso (Flux-Form Semi-Lagrangian o FFSL) e sarà l'argomento principale di questa tesi.

Nel corso del nostro lavoro, faremo riferimento al caso modello dell'equazione del trasporto in una dimensione e vedremo le sue approssimazioni numeriche mediante le varie tipologie di schemi semi-lagrangiani. Particolare attenzione verrà posta sulla costruzione dei metodi FFSL e sulla possibilità di aumentare la loro accuratezza. Lo scopo della tesi è quello di tentare un primo approccio di analisi di stabilità

---

sugli schemi FFSL di ordine alto; questione che ad oggi rimane ancora aperta o quanto meno risolta solo in parte. L'idea che ha guidato il nostro lavoro è stata quella di aver osservato una certa analogia tra le formule di aggiornamento degli schemi semi-lagrangiani classici e quelli in forma di flusso nel caso di velocità di trasporto costante. Lo studio di questa relazione, condotto da un punto di vista sperimentale, ha prodotto un risultato confermato recentemente in [3], in cui si dimostra l'equivalenza dei due schemi per ogni ordine. Questo risultato costituisce un elemento importante in termini di stabilità: infatti questa equivalenza fa sì che la proprietà di stabilità degli schemi semi-lagrangiani passi anche agli schemi semi-lagrangiani in forma di flusso. Spostando invece l'attenzione sullo schema FFSL nel caso di velocità variabile, si è iniziata una analisi preliminare di stabilità che può rappresentare la base per uno studio successivo su tale argomento.

Lo schema di questa tesi è il seguente. Nel primo capitolo saranno richiamati i principali risultati analitici sulla equazione del trasporto e sulla sua approssimazione. Nel secondo capitolo saranno introdotti i metodi SL classici e ne sarà analizzata la convergenza, mentre nel terzo analogo presentazione sarà fatta per i metodi conservativi euleriani. Infine, nel quarto capitolo saranno introdotti e studiati i metodi FFSL, e nel quinto si confronteranno i metodi SL e FFSL su alcuni test numerici con velocità di trasporto costante e non.

# Capitolo 1

## Schemi Semi-Lagrangiani

All'interno della classe delle equazioni iperboliche, il più semplice modello di propagazione non viscosa è l'equazione del trasporto che nel caso lineare, tralasciando per semplicità le condizioni al bordo, assume la forma

$$u_t(x, t) + cu_x(x, t) = 0 \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T) \quad (1.1)$$

con condizione iniziale

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

dove  $c$  indica la velocità di trasporto e la soluzione  $u$  è una funzione definita  $u : \mathbb{R} \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ . Questo modello descrive il trasporto di un campo scalare e la sua interpretazione fisica è fornita dal *metodo delle caratteristiche*. In particolare la soluzione  $u(x, t)$  del problema (1.1)-(1.2) è data da

$$u(x, t) = u_0(x - ct) \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T) \quad (1.3)$$

dove  $x_0 = x - ct$  viene detto *pede della caratteristica* ed è la soluzione del problema

$$\begin{cases} \dot{y}(x, t; s) = c \\ y(x, t; t) = x \end{cases} \quad (1.4)$$

in cui abbiamo indicato con  $y(x, t; s)$  la posizione al tempo  $s$  della caratteristica che parte da  $x$  al tempo  $t$ . Per costruire una approssimazione della (1.3) generiamo

una griglia, ovvero una rappresentazione discreta del dominio spazio-tempo su cui si deve risolvere il problema, ortogonale e uniforme con passi in spazio  $\Delta x$  e in tempo  $\Delta t$ . Le posizioni spazio-tempo sulla griglia sono indicate rispettivamente con  $x_i = i\Delta x$  e  $t_n = n\Delta t$  mentre indichiamo con  $v_i^n$  una approssimazione di  $u$  calcolata nel nodo  $x_i$  al tempo  $t_n$ . Gli schemi semi-lagrangiani si costruiscono a partire dalla discretizzazione della (1.3), ovvero valutando la soluzione nei punti della griglia come segue:

$$v_i^{n+1} = v^n(x_i - c\Delta t).$$

Come si può notare in generale il punto  $x_i - c\Delta t$  non appartiene alla griglia è quindi necessario ricorrere ad esempio ad una tecnica di interpolazione per ricostruire i valori della soluzione numerica  $v^n$  in questi punti. Nella versione del primo ordine dello schema CIR per tale ricostruzione si è utilizzato il polinomio di Lagrange di primo grado (quindi utilizzando due nodi della griglia). Se indichiamo con  $I_r[V](x)$  l'operatore di interpolazione di grado  $r$ , che scritto come combinazione lineare di funzioni di base assume la forma  $I_r[V](x) = \sum_k v_k \psi_k(x)$ , dove  $V$  è un vettore le cui componenti sono i valori che la funzione  $v$  assume nei nodi  $x_i$  e la funzione  $\psi_k$  è una funzione di base *cardinale*, ovvero soddisfa  $\psi_k(x_i) = \delta_{ik}$ , possiamo riscrivere lo schema numerico CIR in un singolo passo in tempo

$$v_i^{n+1} = I_1[V^n](x_i - c\Delta t) \tag{1.5}$$

e condizione iniziale  $v_i^0 = u_0(x_i)$ . Nel caso di interpolazione di primo grado, la forma esplicita dell'operatore  $I_1$  è data da

$$I_1[V^n](x_i - c\Delta t) = \xi v_{i-1}^n + (1 - \xi)v_i^n \tag{1.6}$$

avendo posto  $\xi = c\Delta t / \Delta x$  detto *numero di Courant* e assumendo che  $c\Delta t < \Delta x$  in modo tale che  $x_i - c\Delta t \in (x_{i-1}, x_i]$ . Abbiamo quindi ottenuto lo schema *upwind* con

un procedimento differente rispetto al metodo delle differenze finite. Notiamo che per  $\xi$  può essere scelto un valore qualsiasi, in particolare un valore anche maggiore dell'unità e questo vuol dire che il piede della caratteristica in  $x_i$  non è più in una cella adiacente. Scomponendo  $\xi > 1$  in parte intera  $[\xi]$  e parte frazionaria  $\xi'$ , l'intervallo in cui si effettua la ricostruzione del valore di  $u$  diventa  $(x_{i-[\xi]-1}, x_{i-[\xi]})$  e lo schema assume la forma

$$v_i^{n+1} = \xi' v_{i-[\xi]-1}^n + (1 - \xi') v_{i-[\xi]}^n. \quad (1.7)$$

Per aumentare il grado di accuratezza per la ricostruzione dei valori della soluzione numerica nel piede della caratteristica  $x_i - c\Delta t$ ) consideriamo un polinomio interpolatore di grado più alto, che indichiamo con  $I_r$ , e quindi lo schema semi-lagrangiano si scrive

$$\begin{cases} v_i^{n+1} = I_r[V^n](x_i - c\Delta t) \\ v_i^0 = u_0(x_i) \end{cases} \quad (1.8)$$

In particolare, nel caso di interpolazione di terzo grado, consideriamo i quattro nodi  $x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, x_{j+2}$ , due a destra e due a sinistra del piede della caratteristica, e definiamo

$$\xi = \frac{x_i - c\Delta t - x_j}{\Delta x} \in [0, 1]. \quad (1.9)$$

Allora, il polinomio interpolatore di grado tre viene calcolato in  $\xi$  come segue:

$$\begin{aligned} I_3[V](\xi) &= \sum_{k=j-1}^{j+2} v_k \prod_{i \neq k, i=j-1}^{j+2} \frac{\xi + j - i}{k - i} = \left( -\frac{1}{6}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi \right) v_{j-1} + \\ &+ \left( \frac{1}{2}\xi^3 - \xi^2 - \frac{1}{2}\xi + 1 \right) v_j + \left( -\frac{1}{2}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^2 + \xi \right) v_{j+1} + \left( \frac{1}{6}\xi^3 - \frac{1}{6}\xi \right) v_{j+2} \end{aligned}$$

Inserendo nella (1.8) la forma esplicita del polinomio interpolatore, supponendo che  $x_i - c\Delta t \in [x_{j_i}, x_{j_i+1}]$  e che  $\xi$  sia definita dalla (1.9) (con  $j = j_i$  in funzione dell'indice

$i$ ), si ottiene lo schema

$$\begin{aligned}
 v_i^{n+1} &= I_3[V^n](x_i - c\Delta t) = \left(-\frac{1}{6}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi\right)v_{j_{i-1}} + \\
 &+ \left(\frac{1}{2}\xi^3 - \xi^2 - \frac{1}{2}\xi + 1\right)v_{j_i} + \left(-\frac{1}{2}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^2 + \xi\right)v_{j_{i+1}} + \\
 &+ \left(\frac{1}{6}\xi^3 - \frac{1}{6}\xi\right)v_{j_{i+2}}.
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Osserviamo che per l'interpolazione di grado tre, l'errore risulta essere dell'ordine di  $\Delta x^4$ .

**Consistenza schemi SL** A differenza di quanto viene fatto nei tradizionali metodi alle differenze finite, in cui si utilizza lo sviluppo di Taylor della soluzione esatta dell'equazione alle derivate parziali, qui si confronta lo schema con la formula di rappresentazione (1.3). Definendo quindi lo schema CIR come segue

$$S_j^{CIR}(\Delta; t, V) = I_1[V](x_j - \Delta t f(x_j, t + \Delta t)). \tag{1.11}$$

dal confronto con la (1.3) otteniamo la seguente stima

$$\|L_j^{CIR}(\Delta; t, U(t))\| \leq C \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta t} + \Delta t \right).$$

Osserviamo che se invece di utilizzare l'interpolazione di primo grado utilizziamo l'interpolazione cubica (introdotta precedentemente), allora si ottiene la seguente stima per l'errore di consistenza

$$\|L_j^{SL}(\Delta; t, U(t))\| \leq C \left( \frac{\Delta x^4}{\Delta t} + \Delta t \right).$$

**Stabilità** Ricorrendo all'analisi di Von Neumann si dimostra l'incondizionata stabilità in norma 2 dello schema CIR, infatti si ha

$$\rho = e^{-i[\xi]\omega} (\xi' e^{i\omega} + (1 - \xi'))$$



il cui modulo è

$$|\rho| = |(1 - \xi') + \xi' \cos(\omega) + i\xi' \sin(\omega)|.$$

In particolare, se  $\xi \in [0, 1]$  gli autovalori sono localizzati su un cerchio di centro  $1 - \xi$  e raggio  $\xi$  e in questo caso lo schema CIR coincide con lo schema upwind. Mentre invece se  $\xi > 1$  viene introdotto un termine di fase  $e^{-i[\xi]\omega}$  che dipende solo da  $[\xi]$  e che risulta irrilevante ai fini della stabilità. Quindi il modulo degli autovalori viene regolato solo dalla parte frazionaria del numero di Courant e in generale la condizione di stabilità di Von Neumann è soddisfatta per qualsiasi valore di  $\xi \geq 0$ . Quanto appena ottenuto tramite l'analisi di Von Neumann vale anche per gli schemi SL costruiti con interpolazioni di Lagrange di ordine alto e per tali schemi questo tipo di analisi è l'unica che permette di analizzare rigorosamente la loro stabilità. Un risultato di stabilità analogo a quello appena visto ma più generale si ottiene dimostrando l'equivalenza tra gli schemi semi-lagrangiani e quelli di Lagrange-Galerkin per i quali si hanno risultati di stabilità basati sul fatto che la proiezione di Galerkin è una proiezione ortogonale. In conclusione gli schemi semi-lagrangian risultano essere schemi convergenti.

## Capitolo 2

# Schemi Semi-Lagrangiani in Forma di Flusso

Gli schemi semi-lagrangiani in forma conservativa nascono come risultato di una combinazione tra due classi di schemi: semi-lagrangiani e conservativi. Questi ultimi sono metodi alle differenze finite costruiti quindi sotto la restrizione di numeri di Courant piccoli, per motivi di stabilità, ma con il vantaggio di conservare nel discreto la massa. Gli schemi FFSL sono quindi costruiti mettendo insieme i due elementi caratterizzanti i due schemi. In particolare, hanno la stessa struttura formale dei metodi conservativi a meno di una ridefinizione appropriata del flusso numerico, sfruttando allo stesso tempo l'idea di seguire le caratteristiche propria degli schemi semi-lagrangiani. La nostra esposizione sulla costruzione del metodi semi-lagrangiani in forma di flusso viene condotta sull'equazione del trasporto in forma conservativa

$$u_t(x, t) + (cu(x, t))_x = 0 \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) \quad (2.1)$$

Restringiamo il nostro dominio di calcolo all'intervallo  $[a, b]$  e assumiamo le condizioni periodiche al bordo  $u(a, t) = u(b, t)$  in modo da poter poi estendere i risultati per periodicità a tutto l'asse reale. Identifichiamo con  $x_{\frac{1}{2}}$  l'estremo di sinistra e con  $x_{N+\frac{1}{2}}$  l'estremo di destra dell'intervallo  $[a, b]$  ottenendo i punti  $x_{i\pm\frac{1}{2}}$  aventi il seguente

ordinamento

$$a = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \dots < x_{N+\frac{1}{2}} = b.$$

I punti  $x_{i\pm\frac{1}{2}}$  costituiscono gli estremi della cella  $i$ -esima  $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$  avente ampiezza  $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{N}$  e centro  $x_i = \frac{1}{2}(x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}})$ . Fissando poi un passo  $\Delta t$  sull'asse dei tempi otteniamo una suddivisione del dominio in  $N$  celle. Dopo aver fornito una discretizzazione dell'intervallo su cui è definita l'equazione differenziale (2.1) possiamo illustrare in che modo deriviamo lo schema FFSL. Consideriamo la regione triangolare  $\Omega_i$  avente come vertici i tre punti  $(x_{i+\frac{1}{2}}, t_{n+1})$ ,  $(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n)$  e  $(x_{i+\frac{1}{2}}^*, t_n)$  in cui abbiamo denotato con  $x_{i+\frac{1}{2}}^*$  il piede della linea caratteristica che parte dal punto della griglia  $(x_{i+\frac{1}{2}}, t_{n+1})$ . Come avviene negli schemi semi-lagrangiani in cui si sfrutta la speciale natura della soluzione esatta  $u(x_{i+\frac{1}{2}}, t_{n+1}) = u(x_{i+\frac{1}{2}}^*, t_n)$ , ovvero il fatto che questa rimane costante lungo le linee caratteristiche (in questo caso linee rette e parallele con pendenza  $\frac{1}{a}$  nel piano  $x - t$ ), anche qui si utilizza questa idea ma in un modo leggermente diverso. Integriamo (2.1) sulla regione  $\Omega_i$

$$\int_{\Omega_i} u_t + (cu)_x = 0 \quad (2.2)$$

e applichiamo il teorema della Divergenza al membro di sinistra dell'equazione ottenendo così

$$\int_{\Omega_i} u_t + (cu)_x = \int_{\partial\Omega_i} u \cdot n_t + cu \cdot n_x = - \int_{x_{i+\frac{1}{2}}^*}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t_n) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} cu(x_{i+\frac{1}{2}}, \tau) d\tau,$$

in cui l'integrale lungo il lato obliquo del triangolo dà contributo nullo in quanto il campo scalare è parallelo a questo lato. Ora sfruttando quanto appena ottenuto e l'uguaglianza in (2.2) abbiamo

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} cu(x_{i+\frac{1}{2}}, \tau) d\tau = \int_{x_{i+\frac{1}{2}}^*}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t_n) dx. \quad (2.3)$$

Questa relazione ci dice che il flusso che attraversa l'interfaccia  $x_{i+\frac{1}{2}}$  nell'intervallo di tempo tra  $t_n$  e  $t_{n+1}$  si può esprimere in termini di integrale di soluzione tra i punti  $x_{i+\frac{1}{2}}^*$  e  $x_{i+\frac{1}{2}}$  al tempo  $t_n$ . In analogia con i metodi conservativi, indichiamo con  $v_i^n$  una approssimazione della *media di cella*  $\bar{u}_i^n$  che esprime il valore medio della soluzione all'interno della cella  $I_i$  ad un tempo fissato  $t_n$  ovvero

$$\bar{u}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} u(x, t_n) dx.$$

Sempre in analogia con i metodi conservativi, ricorrendo quindi al bilanciamento dei flussi lungo le due interfacce di una cella, otteniamo lo schema numerico FFSL

$$v_i^{n+1} = v_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i-\frac{1}{2}}(V^n) - F_{i+\frac{1}{2}}(V^n)) \quad (2.4)$$

in cui la definizione di flusso numerico cambia in accordo con la (2.3) nel modo seguente

$$F_{i+\frac{1}{2}}(V^n) = \frac{1}{\Delta t} \int_{x_{i+\frac{1}{2}}^*}^{x_{i+\frac{1}{2}}} R[V^n](x) dx, \quad (2.5)$$

dove abbiamo indicato con  $R$  l'operatore di ricostruzione che opera sulle medie di cella. In altre parole, il flusso numerico  $F$  è l'integrale sulla ricostruzione mediato rispetto al passo in tempo  $\Delta t$ . L'operatore di ricostruzione  $R$  genera una funzione definita per ogni  $x$  ed è caratterizzato da due proprietà: la prima è che  $R$  conserva le medie di cella, ovvero le medie di cella di  $R[V^n]$  coincidono con  $v_i^n$ , la seconda è che  $R$  ricostruisce la soluzione anche con un alto ordine di accuratezza se la soluzione è regolare. Forniamo qui di seguito i passi necessari per la costruzione degli schemi semi-lagrangiani in forma di flusso:

1. tracciare in ogni punto della griglia al livello temporale  $t_{n+1}$ , diciamo  $(x_{i+\frac{1}{2}}, t_{n+1})$ , la linea caratteristica indietro fino al livello temporale  $t_n$  per localizzare il piede della caratteristica  $x_{i+\frac{1}{2}}^*$  ovvero  $x_{i+\frac{1}{2}}^* = x_{i+\frac{1}{2}} - c\Delta t$

2. una volta stabilito il tipo di ricostruzione  $R$ , calcolare  $F_{i+\frac{1}{2}}$  per  $i = 1, \dots, N$
3. aggiornare la soluzione  $v_i^n$  per  $i = 1, \dots, N$  attraverso lo schema (2.4) con  $F_{i\pm\frac{1}{2}}$  calcolata nel passo precedente.

**Ricostruzione lineare del primo ordine** Utilizzare una ricostruzione lineare del primo ordine equivale ad utilizzare l'operatore di ricostruzione  $R$  in forma costante a tratti, utilizzando per il suo calcolo solamente una media di cella, ovvero

$$R[V^n](x) = v_i^n, \quad x \in [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]. \quad (2.6)$$

Il termine lineare si riferisce al fatto che si ha una dipendenza lineare dai valori delle medie di cella, ovvero che  $R[V](x)$  ha una dipendenza lineare da  $V$  (ma non necessariamente da  $x$ ). Possono presentarsi diversi casi che corrispondono rispettivamente al caso di numeri di Courant minori di uno e maggiori di uno:  $|c|\Delta t \leq \Delta x$  o  $|c|\Delta t > \Delta x$ . Nel primo caso, limitandoci a  $c \leq 0$ , lo spostamento della soluzione è quindi da sinistra verso destra e il piede della caratteristica  $x_{i+\frac{1}{2}}^*$  si trova a sinistra del punto  $x_{i+\frac{1}{2}}$ . Allora si ha:

$$F_{i+\frac{1}{2}}(V^n) = \frac{1}{\Delta t} \int_{x_{i+\frac{1}{2}}^*}^{x_{i+\frac{1}{2}}} R[V^n](x) dx = \frac{1}{\Delta t} (x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{1}{2}}^*) v_i^n = c v_i^n. \quad (2.7)$$

Inserendo questa funzione flusso nell'equazione (2.4) otteniamo lo schema

$$v_i^{n+1} = v_i^n + \frac{c\Delta t}{\Delta x} (v_{i-1}^n - v_i^n) = v_i^n + \xi (v_{i-1}^n - v_i^n), \quad (2.8)$$

dove abbiamo posto  $\xi = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ . Osserviamo che quando  $c\Delta t = \Delta x$  lo schema (2.8) si riduce a  $v_i^{n+1} = v_{i-1}^n$ . L'estensione a numeri di Courant maggiori di uno è naturale se si tiene conto della definizione (2.5) per il flusso numerico. L'idea alla base della strategia che permette di estendere questo tipo di schema a passi temporali di questo genere è quella di dividere il calcolo della funzione flusso in due parti: una relativa alle

celle attraversate per intero dalla soluzione e un'altra relativa alla cella attraversata solo parzialmente ovvero la cella in cui è localizzato il piede della caratteristica. Sia  $i^*$  l'indice tale che  $x_{i+\frac{1}{2}}^* \in (x_{i^*-\frac{1}{2}}, x_{i^*+\frac{1}{2}}]$  e  $\xi = \frac{x_{i^*+\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{1}{2}}^*}{\Delta x}$  allora abbiamo

$$F_{i+\frac{1}{2}}(V^n) = \frac{1}{\Delta t} \int_{x_{i+\frac{1}{2}}^*}^{x_{i+\frac{1}{2}}} R[V^n](x) dx = \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=i^*+1}^i v_j^n \Delta x + (x_{i^*+\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{1}{2}}^*) v_{i^*}^n. \quad (2.9)$$

A questo punto inserendo nell'equazione (2.4) il flusso appena calcolato relativo alle due interfacce  $i - \frac{1}{2}$  e  $i + \frac{1}{2}$  otteniamo

$$\begin{aligned} v_i^{n+1} &= v_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{1}{\Delta t} \left( \sum_{j=i^*}^{i-1} v_j^n \Delta x + (x_{i^*-\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}^*) v_{i^*}^n \right) - \frac{1}{\Delta t} \left( \sum_{j=i^*+1}^i v_j^n \Delta x + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (x_{i^*+\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{1}{2}}^*) v_{i^*}^n \right) \right) = v_i^n + \frac{1}{\Delta x} (\Delta x (v_{i^*}^n - v_i^n) + \xi \Delta x (v_{i^*}^n - v_{i^*}^n)) \\ &= v_{i^*}^n + \xi (v_{i^*}^n - v_i^n). \end{aligned} \quad (2.10)$$

**Ricostruzione lineare del terzo ordine** Per ottenere una accuratezza migliore nell'approssimazione del flusso esatto, dobbiamo utilizzare una ricostruzione che sia un polinomio di grado più alto e che quindi coinvolgerà più medie di cella. Le seguenti assunzioni si riferiscono al caso della ricostruzione di grado due ma si estendono al caso di ricostruzioni di ogni grado pari:

1. la ricostruzione  $R[V]$  sulla cella  $I_i$  è basata sulle medie di cella  $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$
2. le medie di cella di  $R$  su  $I_{i-1}, I_i, I_{i+1}$  sono  $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$
3.  $R \in \mathbb{P}_2$

In particolare il flusso numerico lungo l'interfaccia  $i + \frac{1}{2}$  si scrive nel modo seguente

$$\begin{aligned} F_{i+\frac{1}{2}}(V^n) &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \left( \left( \frac{1}{6} \xi^3 - \frac{1}{6} \xi \right) v_{i-1}^n + \left( -\frac{1}{3} \xi^3 + \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{5}{6} \xi \right) v_i^n + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{6} \xi^3 - \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{1}{3} \xi \right) v_{i+1}^n \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

e lo schema assume la forma

$$\begin{aligned}
 v_i^{n+1} &= v_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i-\frac{1}{2}}(V^n) - F_{i+\frac{1}{2}}(V^n)] = \\
 &= \left( \frac{1}{6}\xi^3 - \frac{1}{6}\xi \right) v_{i-2}^n + \left( -\frac{1}{2}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^2 + \xi \right) v_{i-1}^n + \\
 &\quad + \left( 1 + \frac{1}{2}\xi^3 - \xi^2 - \frac{1}{2}\xi \right) v_i^n + \left( -\frac{1}{6}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi \right) v_{i+1}^n. \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

Quanto visto finora vale anche nel caso di velocità di trasporto variabile con l'unica differenza che per ogni nodo della griglia ad ogni passo temporale è necessario calcolare una approssimazione delle caratteristiche.

**Consistenza FFSL** Riscriviamo lo schema (2.4) in modo tale che corrisponda all'equazione del trasporto scritta in forma conservativa,

$$u_t + (cu)_x = 0,$$

nel seguente modo

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}}(V^n) - F_{i-\frac{1}{2}}(V^n)) = 0. \quad (2.13)$$

Osservando che, per il termine relativo alla derivata in tempo vale

$$v_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} u(x, t_n) dx = u(x_i, t_n) + O(\Delta x^2), \quad (2.14)$$

si ha

$$\frac{u(x_i, t_{n+1}) + O(\Delta x^2) - (u(x_i, t_n) + O(\Delta x^2))}{\Delta t} \rightarrow u_t(x_i, t_n) + O\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\right).$$

Mentre per il secondo termine della (2.13) vale la seguente condizione

$$\frac{1}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}}(V^n) - F_{i-\frac{1}{2}}(V^n)) \rightarrow (cu(x, t))_x.$$

# Capitolo 3

## Equivalenza SL e FFSL

Confrontando le formule di aggiornamento degli schemi CIR e FFSL, rispettivamente la (1.6) e la (2.8), osserviamo che nell'aggiornamento vengono coinvolti gli stessi elementi del vettore della soluzione numerica e si ha la stessa dipendenza polinomiale dal numero di Courant  $\xi$ . In particolare, le due rispettive matrici di iterazione coincidono e gli unici elementi non nulli e positivi sono quelli sopra e sotto diagonale. Quest'ultima osservazione naturalmente vale per numeri di Courant minori di uno. Nel caso di numeri di Courant maggiori di uno si ha la stessa struttura ma gli elementi non nulli si troveranno spostati di un certo numero di colonne come si può osservare in (1.7) e (2.10). Notiamo inoltre che gli elementi della matrice sono polinomi di primo grado rispetto a  $\xi$  come ci aspettiamo dagli schemi semi-lagrangiani con interpolazione di Lagrange. Questa corrispondenza tra i due schemi si ha anche nel caso di ricostruzione del terzo ordine. Questa è la conclusione che si ottiene se si confronta la formula (2.12) con la (1.10), tenendo conto però che valori crescenti di  $\xi$  corrispondono a valori dell'indice di cella decrescenti. Questo vuol dire che si ha la stessa dipendenza polinomiale dal numero di Courant  $\xi$  per i due schemi con l'unica differenza che per lo schema FFSL il vettore della soluzione numerica  $V^n$  corrisponde alle medie di cella mentre per lo schema semi-lagrangiano corrisponde



ai valori puntuali. L'aver scritto esplicitamente la dipendenza di  $v_i^{n+1}$  dai valori  $v_k^n$  per  $k = i - 2, \dots, i + 1$  ci consente di conoscere tutti gli elementi della matrice di iterazione dello schema FFSL; questo ci permette di condurre un'analisi sulle proprietà spettrali della matrice. In particolare, calcolando gli autovalori della matrice si osserva che sono tutti interni al disco unitario: lo schema FFSL con ricostruzione di ordine 3 risulta quindi stabile in norma 2. Questo lavoro è stato condotto prima di venire a conoscenza di una recente dimostrazione di questo risultato, valida più in generale per ogni grado dispari di interpolazione (ed il corrispondente grado pari di ricostruzione). A questo punto vogliamo capire se questa equivalenza tra le due tipologie di schemi si mantiene anche nel caso di velocità variabile o quanto meno capire se possiamo affermare qualcosa a proposito della stabilità degli FFSL a partire dal confronto con gli SL. Iniziamo osservando che affinché due schemi abbiano le stesse proprietà di stabilità è sufficiente che le due matrici di iterazione differiscano per  $O(\Delta t)$  rispetto ad una qualche norma. Quindi quello che ora faremo è di verificare questa condizione. L'equazione del trasporto con velocità variabile scritta in forma conservativa equivale alla forma avvettiva con la differenza che compare un termine di reazione:

$$u_t(x, t) + f_x(x, t)u(x, t) + f(x, t)u_x(x, t) = 0. \quad (3.1)$$

Supponendo che la velocità sia lineare e quindi la sua derivata una costante ( $f_x \equiv \lambda$ ), abbiamo che la soluzione analitica di (3.1) è

$$u(x, t) = e^{-\lambda \Delta t} u(y(x, t; -\Delta t), t - \Delta t).$$

Utilizzando l'interpolazione lineare per l'approssimazione di  $u$  e il metodo di Eulero per l'approssimazione delle caratteristiche, otteniamo lo schema semi-lagrangiano

$$v_i^n = e^{-\lambda \Delta t} I_1[V^n](x_i - f(x_i)\Delta t) = e^{-\lambda \Delta t} \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} f(x_i) v_{i-1}^n + \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} f(x_i)\right) v_i^n \right]. \quad (3.2)$$

Applicando invece lo schema FFSL si ha

$$v_i^{n+1} = v_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(x_{i-\frac{1}{2}})v_{i-1}^n - f(x_{i+\frac{1}{2}})v_i^n). \quad (3.3)$$

Osserviamo che nel caso di velocità variabile il numero di Courant varia da cella a cella quindi per definirlo globalmente considero il massimo modulo di  $f$ . Ora nel caso di numero di Courant minore di uno, il confronto tra i due schemi, (3.2) e (3.3), viene condotto facendo la differenza tra le due matrici di iterazione e calcolandone l'errore in norma 2. Seguendo questa strada, quello che si evince è che effettivamente le due matrici differiscono per un  $O(\Delta t)$ . Possiamo concludere che, essendo la matrice di iterazione degli schemi FFSL una perturbazione  $\Delta t$  della matrice degli schemi SL, la proprietà di stabilità di questi ultimi passa agli schemi FFSL. Una simile analisi si conduce per numeri di Courant grandi giungendo alla stessa conclusione.

# Capitolo 4

## Test numerici

Riportiamo i risultati di test numerici svolti sugli schemi SL e sugli schemi FFSL nel caso di velocità variabile. In particolare calcoliamo l'errore tra la soluzione esatta e quella numerica con l'aggiunta del calcolo dell'errore di conservazione della massa nel caso dello schema semi-lagrangiano non conservativo. Come velocità abbiamo considerato una funzione lineare e positiva nell'intervallo  $[0, 1]$  con derivata prima negativa. Le tabelle e le figure 4.1 e 4.3 riguardano il problema

$$\begin{cases} u_t(x, t) + (-(x - 1.1)u_x(x, t))_x = 0 & (x, t) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1 & x \in (0.25, 0.5) \\ 0 & x \notin (0.25, 0.5) \end{cases} \end{cases}$$

mentre le tabelle e le figure 4.2 e 4.4 riguardano il problema

$$\begin{cases} u_t(x, t) + u_x(x, t) = 0 & (x, t) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ u(x, 0) = \max(1 - 16(x - 0.25)^2, 0) \end{cases}$$

Come si nota nelle figure 4.1-4.4 il termine di reazione, essendo negativo, fa aumentare la soluzione. Il numero di Courant è preso costante  $\xi = 2.5$ . Osserviamo che utilizzando una ricostruzione di grado maggiore di zero l'errore tra la soluzione analitica e quella numerica si riduce come si vede nelle tabelle 4.3 e 4.4 con dato iniziale rispettivamente discontinuo e Lipschitziano. Inoltre, mentre nel caso FFSL l'errore di conservazione della massa è identicamente nullo, nel caso SL converge a

		SL		FFSL
nodì	$\Delta t$	errore	conservazione	errore
25	$1 \cdot 10^{-1}$	$3.13 \cdot 10^{-1}$	$1.28 \cdot 10^{-2}$	$4.60 \cdot 10^{-1}$
50	$5 \cdot 10^{-2}$	$2.88 \cdot 10^{-1}$	$7.26 \cdot 10^{-3}$	$2.87 \cdot 10^{-1}$
100	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$2.29 \cdot 10^{-1}$	$3.55 \cdot 10^{-3}$	$2.54 \cdot 10^{-1}$
200	$1.25 \cdot 10^{-2}$	$1.97 \cdot 10^{-1}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-1}$
400	$6.25 \cdot 10^{-3}$	$1.67 \cdot 10^{-1}$	$9.2 \cdot 10^{-4}$	$1.70 \cdot 10^{-1}$
rate		0.22	0.95	0.35

Tabella 4.1: Schemi SL con interpolazione di grado uno e schema FFSL con ricostruzione di grado zero con dato discontinuo

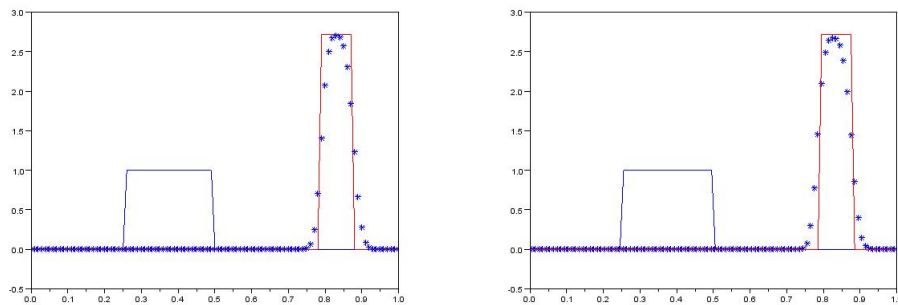


Figura 4.1: Schemi SL con interpolazione di grado uno e schema FFSL con ricostruzione di grado zero con dato discontinuo

zero solo come risultato della convergenza dello schema. Nel confronto diretto tra schemi dello stesso ordine, gli schemi FFSL sembrano anche essere leggermente più accurati.

		SL		FFSL
nodì	$\Delta t$	errore	conservazione	errore
25	$1 \cdot 10^{-1}$	$1.62 \cdot 10^{-1}$	$1.06 \cdot 10^{-2}$	$2.44 \cdot 10^{-1}$
50	$5 \cdot 10^{-2}$	$9.78 \cdot 10^{-2}$	$5.2 \cdot 10^{-3}$	$1.36 \cdot 10^{-1}$
100	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$5.75 \cdot 10^{-2}$	$2.63 \cdot 10^{-3}$	$8.21 \cdot 10^{-2}$
200	$1.25 \cdot 10^{-2}$	$3.58 \cdot 10^{-2}$	$1.32 \cdot 10^{-3}$	$4.53 \cdot 10^{-2}$
400	$6.25 \cdot 10^{-3}$	$2.12 \cdot 10^{-2}$	$6.65 \cdot 10^{-4}$	$2.60 \cdot 10^{-2}$
rate		0.73	0.99	0.80

Tabella 4.2: Schemi SL con interpolazione di grado uno e schema FFSL con ricostruzione di grado zero con dato Lipschitziano

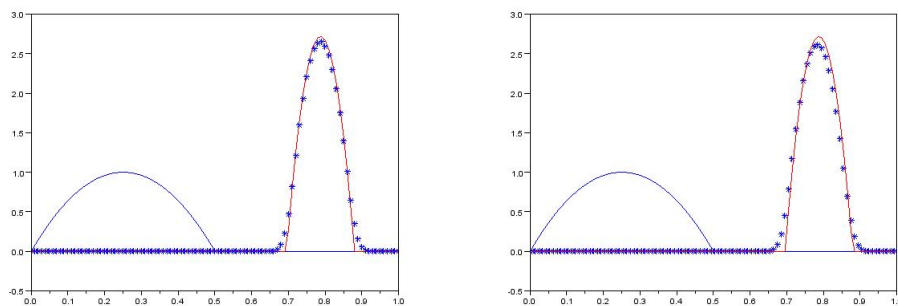


Figura 4.2: Schemi SL con interpolazione di grado uno e schema FFSL con ricostruzione di grado zero con dato Lipschitziano

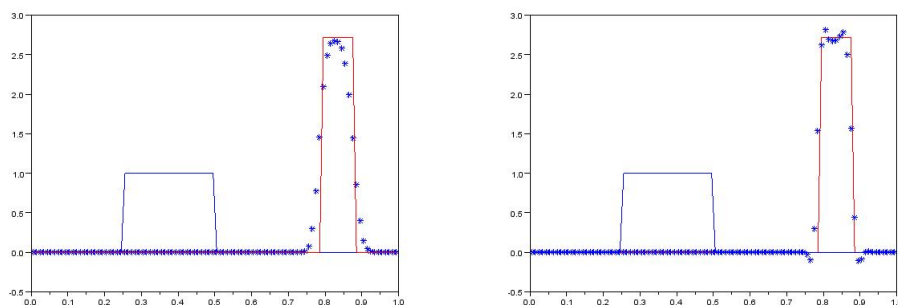


Figura 4.3: Schemi FFSL grado zero e grado due con dato discontinuo

		FFSL	FFSL 2
nodì	$\Delta t$	errore	errore
25	$1 \cdot 10^{-1}$	$4.60 \cdot 10^{-1}$	$4.58 \cdot 10^{-1}$
50	$5 \cdot 10^{-2}$	$2.87 \cdot 10^{-1}$	$2.10 \cdot 10^{-1}$
100	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$2.54 \cdot 10^{-1}$	$2.01 \cdot 10^{-1}$
200	$1.25 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$1.29 \cdot 10^{-1}$
400	$6.25 \cdot 10^{-3}$	$1.70 \cdot 10^{-1}$	$1.09 \cdot 10^{-1}$
rate		0.35	0.51

Tabella 4.3: Schemi FFSL con ricostruzione di grado zero e con ricostruzione di grado due con dato discontinuo

		FFSL	FFSL 2
nodì	$\Delta t$	errore	errore
25	$1 \cdot 10^{-1}$	$2.44 \cdot 10^{-1}$	$2.19 \cdot 10^{-1}$
50	$5 \cdot 10^{-2}$	$1.36 \cdot 10^{-1}$	$1.07 \cdot 10^{-1}$
100	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$8.21 \cdot 10^{-2}$	$5.90 \cdot 10^{-2}$
200	$1.25 \cdot 10^{-2}$	$4.53 \cdot 10^{-2}$	$2.88 \cdot 10^{-2}$
400	$6.25 \cdot 10^{-3}$	$2.60 \cdot 10^{-2}$	$1.46 \cdot 10^{-2}$
rate		0.80	0.97

Tabella 4.4: Schemi FFSL grado zero e grado due con dato Lipschitziano

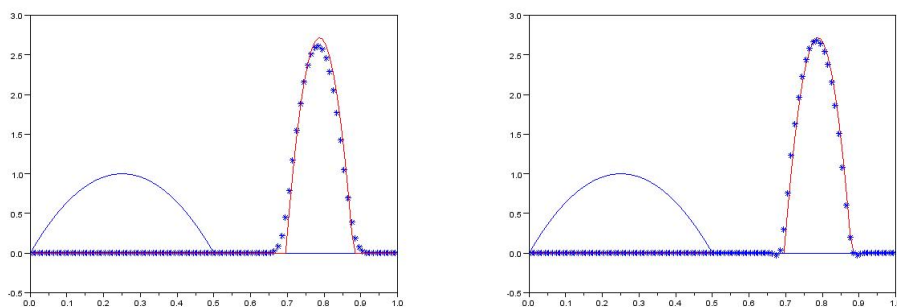


Figura 4.4: Schemi FFSL grado zero e grado due con dato Lipschitziano

# Bibliografia

- [1] P. Colella and P. Woodward. “The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations”. *Journal of Computational Physics*, 54:174–201, 1984.
- [2] R. Courant, E. Isaacson, and M. Rees. “On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences”. *Comm. Pure Appl. Math.*, 5:243–255, 1952.
- [3] N. Crouseilles, M. Mehrenberger, and E. Sonnenducker. “Conservative semi-lagrangian schemes for Vlasov equation”. *Journal of Computational Physics*, 229:1927–1953, 2010.
- [4] M. Falcone and R. Ferretti. “Convergence analysis for a class of Semi-Lagrangian advection schemes”. *SIAM J. Num. Anal.*, 35:909–940, 1982.
- [5] M. Falcone and R. Ferretti. *Semi-Lagrangian approximation schemes for linear and Hamilton-Jacobi equations*. SIAM, in corso di stampa.
- [6] R. Ferretti. “Equivalence of semi-lagrangian and Lagrange-Galerkin schemes under constant advection speed”. *Journal of Computational Mathematics*, 28:461–473, 2010.

- [7] S.-J. Lin and R. B. Rood. “Multidimensional flux-form Semi-Lagrangian transport schemes”. *Monthly Weather Review*, 124(1):2046–2070, 1996.
- [8] J.-M. Qiu and C.-W. Shu. “Convergence of Godunov-type schemes for scalar conservation laws under large time steps”. *SIAM J. Num. Anal.*, 46:2211–2237, 2008.
- [9] J.-M. Qiu and C.-W. Shu. “Conservative high order semi-Lagrangian finite difference WENO methods for advection in incompressible flow”. *Journal of Computational Physics*, 230:863–889, 2011.
- [10] A. N. Staniforth and J. Cotè. “Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models-A review”. *Mon. Wea. Rev.*, 119:2206–2223, 1991.
- [11] R. J. L. Veque. *Numerical methods for conservation laws*. Birkhauser, 1992.