

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI “ROMA TRE”  
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica  
di  
Serena Gozzo

# **Le rappresentazioni del gruppo lineare generale su un campo finito**

Relatore  
Prof. Francesco Pappalardi

ANNO ACCADEMICO 2001 - 2002  
Luglio 2002

Classificazione AMS : 06B15, 20C10, 20G05, 12E20.  
Parole Chiave : Campi finiti, caratteri di gruppi finiti.

L'oggetto di questa tesi è lo studio delle rappresentazioni irriducibili del gruppo generale lineare a coefficienti in un campo finito  $\mathbb{F}_q$ , meglio denotato con  $GL(n, q)$ . La Teoria delle rappresentazioni è una teoria vasta che ha affascinato molti studiosi dal secolo scorso fino ad oggi. La nostra tesi, in particolare, fa riferimento agli articoli [St1] e [St2], tratti dalla tesi di dottorato di Steinberg e da un articolo di Green [Gr], pubblicati intorno alla metà del secolo scorso.

Inizialmente abbiamo richiamato alcune nozioni fondamentali sulla Teoria dei campi finiti ed abbiamo in particolar modo prestato attenzione allo studio ed all'enumerazione dei polinomi irriducibili su un campo finito. Quindi abbiamo proseguito enunciando e dimostrando le principali proprietà della Teoria delle rappresentazioni e dei loro caratteri. I principali risultati di questa Teoria si focalizzano sullo studio delle rappresentazioni irriducibili del gruppo finito  $G$ , che sono in corrispondenza biunivoca con le classi di coniugazione del gruppo. Per questo motivo, al fine di calcolare i caratteri irriducibili di  $GL(n, q)$  si è reso necessario il calcolo esplicito di una formula per classificare tutte le classi di coniugazione di questo gruppo. Tale calcolo, a cui si fa riferimento in [Gr], è stato da noi fatto utilizzando la Teoria dei polinomi irriducibili su un campo finito, esposta brevemente nel primo capitolo. Abbiamo potuto così procedere al calcolo esplicito dei caratteri irriducibili di  $GL(2, q)$  e di  $GL(3, q)$ , facendo riferimento all'articolo di Steinberg [St1] che propone però solo la tabella dei caratteri irriducibili di questi gruppi unita a rapidi cenni sulla metodologia di calcolo da affrontare. Infine, attraverso lo studio dei caratteri irriducibili di  $GL(2, q)$  e  $GL(3, q)$  e di considerazioni generali su di essi, abbiamo proposto un metodo di calcolo per tutti i caratteri irriducibili di  $GL(n, q)$ , che è esposto in [St2], dove viene enunciato un teorema fondamentale per il calcolo di una parte dei caratteri irriducibili di  $GL(n, q)$ .

Ripercorriamo ora le linee generali della nostra Tesi.

Nel Capitolo 1 abbiamo enunciato alcune proprietà sulla Teoria dei campi finiti e sulla Teoria dei polinomi irriducibili su un campo finito. In seguito abbiamo richiamato la nozione di azione di un gruppo finito che assume un ruolo molto importante nella Teoria delle rappresentazioni. Abbiamo inoltre ricordato alcuni risultati inerenti le forme canoniche di Jordan e razionale.

Nel Capitolo 2 abbiamo definito le rappresentazioni di un gruppo finito  $G$ . Sia  $\tilde{G}$  un gruppo finito e sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  di dimensione finita.

Una **rappresentazione**  $\rho$  di  $G$  su  $V$  è un omomorfismo  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  dove  $GL(V)$  rappresenta il gruppo degli automorfismi di  $V$ . Il **grado** di una rappresentazione  $\rho$  è la dimensione su  $\mathbb{C}$  dello spazio vettoriale considerato  $V$ . Svolgono un ruolo molto importante le rappresentazioni unidimensionali ovvero di grado 1. Una rappresentazione  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  si dice **irriducibile** se  $V$  non ammette alcun sottospazio non banale  $G$ -invariante. Se  $\rho$  non è irriducibile allora si dice **riducibile**. Le rappresentazioni di un gruppo finito sono somma di rappresentazioni irriducibili.

Abbiamo poi studiato le classi di similitudini di rappresentazioni, introducendo il concetto di carattere che è un invariante delle classi di rappresentazioni simili. Sia  $\rho : G \longrightarrow GL(V)$  una rappresentazione di un gruppo finito su uno spazio di dimensione finita. Il **carattere**  $\chi$  di  $\rho$  è l'applicazione:

$$\begin{aligned} \chi : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto \text{Tr}(\rho_g). \end{aligned}$$

Il grado di  $\chi$  è il grado della rappresentazione ad esso associata. In particolare si dimostra che i caratteri unidimensionali (di dimensione 1) formano un gruppo isomorfo al gruppo quoziente  $G/G'$ , (dove  $G'$  è il sottogruppo derivato di  $G$ ) denotato con  $\widehat{G}$ .

Sia  $\rho$  una rappresentazione e  $\chi$  il carattere ad essa associato.  $\chi$  si dice **irriducibile** se  $\rho$  è irriducibile.

Naturalmente come per le rappresentazioni, anche i caratteri si possono scrivere come somma di caratteri irriducibili.

Se  $\chi_1, \chi_2$  sono caratteri allora definiamo il prodotto scalare:

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_1(g) \cdot \overline{\chi_2(g)}.$$

Valgono le seguenti proprietà:

1.  $\langle \chi_1 + \chi_2, \chi_3 \rangle = \langle \chi_1, \chi_3 \rangle + \langle \chi_2, \chi_3 \rangle$ ;
2.  $\langle \alpha \chi_1, \chi_2 \rangle = \alpha \langle \chi_1, \chi_2 \rangle$ ;
3.  $\langle \alpha \chi_1, \chi_2 \rangle = \overline{\langle \alpha \chi_2, \chi_1 \rangle}$

Il prodotto scalare è utile per verificare se un carattere è irriducibile oppure no. Infatti il Primo Teorema di ortogonalità afferma che se  $\chi_1$  e  $\chi_2$  sono caratteri irriducibili allora

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } \chi_1 \neq \chi_2; \\ 1 & \text{se } \chi_1 = \chi_2. \end{cases}$$

Il carattere di una rappresentazione è invariante sulle classi di coniugazione di  $G$  ed è quindi una funzione di classe. Inoltre i caratteri risultano essere una base ortonormale per lo spazio delle funzioni di classe  $\mathbb{C}^{Cl(G)}$ . Pertanto i caratteri sono tanti quante le classi di coniugazione di  $G$ .

Per ultimo abbiamo studiato come ottenere rappresentazioni di  $G$  attraverso rappresentazioni di un suo sottogruppo  $H$ , abbiamo cioè studiato il concetto di induzione, introdotto da Frobenius all'inizio del secolo scorso.

**Definizione 2.21** Sia  $H \leq G$  un sottogruppo e sia  $\rho$  una rappresentazione di  $G$ . La **restrizione di  $\rho$  ad  $H$** ,  $\rho \downarrow_H^G$ , è definita da  $\rho \downarrow_H^G(h) = \rho(h)$ , per ogni  $h \in H$ . Se  $\chi$  è il carattere associato a  $\rho$ , allora denotiamo con  $\chi \downarrow_H^G$  il carattere associato a  $\rho \downarrow_H^G$ .

È chiaro che  $\rho \downarrow_H^G$  è una rappresentazione di  $H$ .

**Definizione 2.22** Sia  $H \leq G$ , fissiamo quindi un insieme di rappresentanti  $R = \{t_1, \dots, t_l\}$  per le classi laterali sinistre di  $H$ . Questo implica che

$$G = t_1H \oplus \dots \oplus t_lH.$$

Se  $\Psi : H \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  è una rappresentazione di  $H$  denotata in modo matriciale, la corrispondente **rappresentazione indotta**  $\Psi \uparrow_H^G$  è la rappresentazione che assegna ad ogni  $g \in G$  la matrice a blocchi così definita:

$$\Psi \uparrow_H^G(g) = (\Psi(t_i^{-1}gt_j)) = \begin{pmatrix} \Psi(t_1^{-1}gt_1) & \Psi(t_1^{-1}gt_2) & \dots & \Psi(t_1^{-1}gt_l) \\ \Psi(t_2^{-1}gt_1) & \dots & \dots & \Psi(t_2^{-1}gt_l) \\ \vdots & & & \vdots \\ \Psi(t_l^{-1}gt_1) & \dots & \dots & \Psi(t_l^{-1}gt_l) \end{pmatrix}$$

dove poniamo  $\Psi(g)$  la matrice nulla se  $g \notin H$ .

Se  $\chi_{\Psi \uparrow_H^G}$  è il carattere associato alla rappresentazione  $\Psi \uparrow_H^G$  e  $\chi_\Psi$  è quello associato alla rappresentazione  $\Psi$ , allora è chiaro che per ogni  $g \in G$  risulta:

$$\chi_{\Psi \uparrow_H^G}(g) = \frac{|G|}{|H|} \frac{1}{|Cl(g)|} \sum_{t_i \in Cl(g) \cap H} \chi_\Psi(t_i) \quad (1)$$

dove  $Cl(g)$  è una classe di coniugazione dell'elemento  $g$ .

L'induzione, come la restrizione, non conserva l'irriducibilità di una rappresentazione, cioè non è detto che  $\Psi \uparrow_H^G$  sia irriducibile se  $\Psi$  è irriducibile; Una rappresentazione indotta dipende solamente dalle classi laterali  $\sigma \in G/H$  e non dalla scelta dei rappresentanti.

Nel Capitolo 3 abbiamo approfondito i risultati proposti sinteticamente in [Gr] riguardo le classi di coniugazione di  $GL(n, q)$ . Abbiamo in particolar modo ricavato una formula esplicita che ci ha permesso di determinare tutte le classi di coniugazione di  $GL(n, q)$  con tecniche che si basano sui Teoremi di esistenza di forme canoniche studiati nel primo capitolo.

Poiché i caratteri di un gruppo sono tanti quante le sue classi di coniugazione, una volta determinate quest'ultime è possibile enumerare i caratteri di  $GL(n, q)$ . Abbiamo quindi calcolato una formula generale, che raggruppa le classi di coniugazione in famiglie, e abbiamo concluso determinando in dettaglio tutte le classi di coniugazione di  $GL(n, q)$  per  $n = 2, 3, 4, 5$  (raggruppati rispettivamente in 4, 8, 23, 43 famiglie) e calcolando il numero degli elementi presenti in ogni famiglia ed il numero degli elementi contenuti in ogni classe per i gruppi  $GL(2, q)$ ,  $GL(3, q)$  e  $GL(4, q)$ .

Dato  $F \in \mathbb{F}_q[x]$ ,  $\partial F = n$ ,  $F$  monico,  $F = f_1^{k_1} \cdots f_t^{k_t}$ , con  $f_1, \dots, f_t$  polinomi irriducibili in  $\mathbb{F}_q[x]$ , il numero delle classi di coniugazione che hanno  $F$  come polinomio caratteristico è uguale a  $p(k_1) \cdots p(k_t)$ . Poiché il polinomio  $F$  è fissato, sommando su tutti gli  $F \in \mathbb{F}_q[x]$  tali che  $F(0) \neq 0$  (per escludere le matrici non invertibili), otteniamo l'insieme di tutte le classi di coniugazione di  $GL(n, q)$ . Se indichiamo con  $c(n, q)$  il numero delle classi di coniugazione di  $GL(n, q)$ , allora la sua funzione generatrice è data da:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c(n, q)x^n = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - x^m}{1 - qx^m}. \quad (2)$$

Qui di seguito riportiamo il calcolo di  $c(n, q)$  per  $n = 1, \dots, 10$  estratti dalla

formula (2):

$$\begin{aligned}
c(1, q) &= q - 1 \\
c(2, q) &= q^2 - 1 \\
c(3, q) &= q^3 - q \\
c(4, q) &= q^4 - q \\
c(5, q) &= q^5 - q^2 - q + 1 \\
c(6, q) &= q^6 - q^2 \\
c(7, q) &= q^7 - q^3 - q^2 + 1 \\
c(8, q) &= q^8 - q^3 - q^2 + q \\
c(9, q) &= q^9 - q^4 - q^3 + q \\
c(10, q) &= q^{10} - q^4 - q^3 + q.
\end{aligned}$$

**Osservazione.** Notiamo che la formula ottenuta per la funzione generatrice dei  $c(n, q)$  è analoga a quella ottenuta da Eulero per il gruppo  $S_n$  dove

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

Nel resto del Capitolo 3 abbiamo definito il concetto di famiglia di classi di coniugazione, di cui ci siamo serviti per classificare tutte le classi di coniugazione di  $GL(n, q)$ : Dati  $k_1, \dots, k_t, d_1, \dots, d_t \in \mathbb{N}$  tali che  $\sum_{i=1}^t k_i d_i = n$  e  $\pi(k_1), \dots, \pi(k_t)$  tali che  $\pi(k_i)$  è una partizione di  $k_i$ . La **famiglia**

$$([d_1, \dots, d_t], [k_1, \dots, k_t], [\pi(k_1), \dots, \pi(k_t)])$$

è l'insieme delle classi di coniugazione di matrici  $A$  tali che il polinomio caratteristico  $P_A(t)$  ha una decomposizione del tipo  $P_A(t) = h_1^{k_1} \dots h_t^{k_t}$  (dove  $h_i$  è irriducibile di grado  $d_i$ ) e la forma canonica razionale ha il blocco relativo a  $h_i^{k_i}$  che è parametrizzato dalla partizione  $\pi(k_i)$  (come mostrato nel **Corollario 1.7**).

Quindi

$$c(n, q) = \sum_{\mathbf{F} \text{ famiglia di } GL(n, q)} |\mathbf{F}|.$$

Riportiamo come esempio le quattro famiglie di classi di coniugazione di  $GL(2, q)$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}1 &= \left\{ A1(a) \mid a \in \frac{\mathbb{Z}}{(q-1)\mathbb{Z}} \right\} \\ \mathcal{A}2 &= \left\{ A2(a) \mid a \in \frac{\mathbb{Z}}{(q-1)\mathbb{Z}} \right\} \\ \mathcal{A}3 &= \left\{ A3(a, b) \mid \{a, b\} \subseteq \frac{\mathbb{Z}}{(q-1)\mathbb{Z}} \right\} \\ \mathcal{B}1 &= \left\{ B1(a) \mid a \in \frac{\mathbb{Z}}{(q^2-1)\mathbb{Z}}, q+1 \nmid a \right\}\end{aligned}$$

ove le classi  $A1(a)$ ,  $A2(a)$ ,  $A3(a, b)$ ,  $B1(a)$  sono le seguenti

$$\begin{aligned}A1 = A1(a) &= \begin{bmatrix} \rho^a & 0 \\ 0 & \rho^a \end{bmatrix} & A2 = A2(a) &= \begin{bmatrix} \rho^a & 0 \\ 1 & \rho^a \end{bmatrix} \\ A3 = A3(a, b) &= \begin{bmatrix} \rho^a & 0 \\ 0 & \rho^b \end{bmatrix} & B1 = B1(a) &= \begin{bmatrix} \sigma^a & 0 \\ 0 & \sigma^{aq} \end{bmatrix}^*.\end{aligned}\tag{3}$$

Qui  $\rho$  e  $\sigma$  sono rispettivamente generatori di  $\mathbb{F}_q^*$  e di  $\mathbb{F}_{q^2}^*$  tali che  $\rho = \sigma^{q+1}$  e con  $[X]^*$  indichiamo la classe di coniugazione della matrice compagna del polinomio caratteristico di  $X$ .

Nel Capitolo 4 abbiamo calcolato in maniera dettagliata i caratteri irriducibili di  $GL(2, q)$ . In questo gruppo abbiamo individuato quattro famiglie di classi di coniugazione ed abbiamo quindi calcolato quattro famiglie di caratteri irriducibili. Le prime due famiglie di caratteri che abbiamo determinato sono  $\chi_0^{\alpha_i}$  e  $\chi_1^{\alpha_i}$  dove  $\alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}$  sono caratteri di  $\mathbb{F}_q^*$ , ottenuti considerando la rappresentazione permutazione indotta dall'azione transitiva di  $GL(2, q)$  sullo spazio proiettivo  $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_q)$ :

$$\begin{aligned}\pi : GL(2, q) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q) &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q) \\ \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times [x, y] \right) &\longmapsto [ax + by, cx + dy].\end{aligned}$$

Il carattere associato a questa rappresentazione è

$$\chi_{\rho_g} = \#\{\omega \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q) \mid g\omega = \omega\}.$$

Poiché  $\langle \chi_{\rho\pi}, \chi_{\rho\pi} \rangle = 2$ , questo carattere è la somma di due caratteri irriducibili  $\chi_0 + \chi_1$ , dove  $\chi_0$  è il carattere banale e  $\chi_1$  è un carattere di dimensione  $q$ . Moltiplicando questi caratteri per i  $q - 1$  caratteri unidimensionali  $\alpha_i \in \widehat{\mathbb{F}_q^*}$  si ottengono  $\chi_0^{\alpha_i}$  e  $\chi_1^{\alpha_i}$ .

Abbiamo poi considerato il sottogruppo  $GL(1, 1, q)$  di  $GL(2, q)$  di indice  $q+1$ :

$$GL(1, 1, q) = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \mid A_1, B_1 \in \mathbb{F}_q^*, C_1 \in \mathbb{F}_q \right\}$$

e la rappresentazione unidimensionale:

$$W_{\alpha, \beta} : GL(1, 1, q) \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \longmapsto \alpha(A_1)\beta(B_1)$$

con  $\alpha, \beta \in \widehat{\mathbb{F}_q^*}$ , distinti. Abbiamo indotto un carattere irriducibile da noi denotato  $\chi_{V_{\alpha, \beta}}$  di grado  $q + 1$  (dove  $V_{\alpha, \beta}$  è la rappresentazione indotta da  $W_{\alpha, \beta}$  su  $GL(2, q)$ ), che al variare di  $\alpha, \beta$  ci ha fornito  $\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$  caratteri irriducibili di  $GL(2, q)$ .

Infine abbiamo considerato  $H_{f,2}$  il sottogruppo ciclico di  $GL(2, q)$ :

$$H_{f,2} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{pmatrix} \right\rangle$$

di ordine  $q^2 - 1$  dove  $f(x) = x^2 + ax + b$  è un polinomio primitivo in  $\mathbb{F}_q[X]$ .  $H_{f,2}$  è isomorfo a  $\mathbb{F}_{q^2}^*$  tramite l'applicazione

$$T_{f,2} : H_{f,2} \longrightarrow \mathbb{F}_{q^2}^* \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{pmatrix}^i \longmapsto \sigma^i$$

dove  $\sigma$  è una radice di  $f(x)$ . Data  $\eta \in \widehat{\mathbb{F}_{q^2}^*}$ , abbiamo considerato il corrispondente carattere unidimensionale:

$$\eta : H_{f,2} \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ x \longmapsto \eta(T_{f,2}(x))$$



da cui abbiamo indotto in  $GL(2, q)$  una rappresentazione  $\varphi$  di grado  $q^2 - q$  e, attraverso la (1), è individuato un carattere  $\chi_\varphi$  ad essa associato.  $\chi_\varphi$  è un carattere riducibile, e per ottenerne uno irriducibile abbiamo dovuto considerare il carattere generalizzato

$$\chi_\psi = \chi_{\rho_1 \otimes V_{\alpha,1}} - \chi_{V_{\alpha,1}} - \chi_\varphi$$

di grado  $q - 1$ , dove  $\alpha = \eta|_{\mathbb{F}_q^*}$ . Poiché  $\chi_\psi(\text{Id}) = q - 1 > 0$  e  $\langle \chi_\psi, \chi_\psi \rangle = 1$ , risulta che  $\chi_\psi$  è un carattere di  $GL(2, q)$  e poiché è necessario assumere  $\psi \neq \psi^q$  abbiamo ottenuto  $\frac{1}{2}q(q - 1)$  caratteri irriducibili. Qui di seguito riportiamo la tabella dei caratteri irriducibili di  $GL(2, q)$ , dove  $\alpha$  varia in  $\mathbb{F}_q^*$ :

$GL(2, q)$	$\chi_0^{\alpha_i}$	$\chi_1^{\alpha_i}$	$\chi_{V_{\alpha,\beta}}$	$\chi_\psi$
A1	$\alpha(\rho^{2a})$	$q\alpha(\rho^{2a})$	$(q + 1)\alpha(\rho^a)\beta(\rho^a)$	$(q - 1)\eta(\rho^a)$
A2	$\alpha(\rho^a)\beta(\rho^a)$	0	$\alpha(\rho^a)\beta(\rho^a)$	$-\eta(\rho^a)$
A3	$\alpha(\rho^{a+b})$	$\alpha(\rho^{a+b})$	$\alpha(\rho^a)\beta(\rho^b) + \alpha(\rho^b)\beta(\rho^a)$	0
B1	$\alpha(\sigma^{a(q+1)})$	$-\alpha(\sigma^{a(q+1)})$	0	$-(\eta(\sigma^a) + \eta(\sigma^{aq}))$

Nel Capitolo 5 abbiamo calcolato, come per  $GL(2, q)$  tutti i caratteri irriducibili di  $GL(3, q)$  che abbiamo diviso in modo naturale in otto famiglie di caratteri, esattamente come il numero delle classi di coniugazione del gruppo. Le prime tre famiglie le abbiamo ottenute studiando le azioni  $\pi_1$ , e  $\pi_2$  di  $GL(3, q)$  rispettivamente sullo spazio proiettivo  $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$  e sull'insieme  $\Omega$  formato dalle coppie di punti  $([P], r_{[P,Q]})$  dove  $[P]$  è un punto di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$  e  $r_{[P,Q]} : [\alpha P + \beta Q]$  è una retta in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$  che attraversa  $[P]$  e  $[Q]$ , definite in questo modo:

$$\pi_1 : GL(3, q) \times \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$$

$$\left( \left( \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) \longmapsto \begin{bmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \\ gx + hy + iz \end{bmatrix} \right)$$

$$\pi_2 : GL(3, q) \times \Omega \longrightarrow \Omega$$

$$(A \times [P, r]) \longmapsto ([AP], r_{[AP, AQ]})$$

Da queste due azioni abbiamo indotto due rappresentazioni permutazione  $\rho_{\pi_1}$  e  $\rho_{\pi_2}$  entrambe riducibili. Infatti è risultato che  $\rho_{\pi_1} = \chi_0 + \chi_{q^2+q}$  e  $\rho_{\pi_2} = \chi_0 + 2\chi_{q^2+q} + \chi_{q^3}$  da cui abbiamo estratto tre caratteri irriducibili

$\chi_0, \chi_{q^2+q}, \chi_{q^3}$  di grado rispettivamente  $1, q^2 + q$  e  $q^3$ . Moltiplicando ognuno di questi caratteri per i caratteri  $\alpha_i \in \widehat{\mathbb{F}_q^*}$ ,  $i = 1, \dots, q-1$  abbiamo ottenuto i caratteri irriducibili  $\chi_0^{\alpha_i}, \chi_{q^2+q}^{\alpha_i}, \chi_{q^3}^{\alpha_i}$ .

Abbiamo poi considerato il sottogruppo  $GL(1, 2, q)$  di  $GL(3, q)$  di indice  $q^2 + q + 1$ :

$$GL(1, 2, q) = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} A_1 & 0 & 0 \\ \gamma & & A_2 \\ \delta & & \end{array} \right) \mid A_1 \in GL(1, q), A_2 \in GL(2, q), \gamma, \delta \in \mathbb{F}_q \right\}$$

e, date rappresentazioni  $\rho_1 : GL(1, q) \longrightarrow GL(V_1)$ ,  $\rho_2 : GL(2, q) \longrightarrow GL(V_2)$ , la rappresentazione definita da:

$$\rho_1 \boxtimes \rho_2 : GL(1, 2, q) \longrightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$$

$$\begin{aligned} A = \left( \begin{array}{ccc} A_1 & 0 & 0 \\ \gamma & & A_2 \\ \delta & & \end{array} \right) &\longmapsto (\rho_1 \boxtimes \rho_2)(A)(v_1 \otimes v_2) \\ &= \rho_1(A_1)(v_1) \otimes \rho_2(A_2)(v_2). \end{aligned}$$

Il carattere associato a questa rappresentazione è

$$\chi_{\rho_1 \boxtimes \rho_2} \left( \left( \begin{array}{ccc} A_1 & 0 & 0 \\ \gamma & & A_2 \\ \delta & & \end{array} \right) \right) = \chi_{\rho_1}(A_1) \chi_{\rho_2}(A_2)$$

da cui abbiamo indotto quattro famiglie di caratteri irriducibili in  $GL(3, q)$  denotate rispettivamente:

1.  $\chi_{q^2+q+1}^{\gamma, \alpha}$  di grado  $q^2 + q + 1$
2.  $\chi_{q(q^2+q+1)}^{\gamma, \alpha}$  di grado  $q(q^2 + q + 1)$
3.  $\chi_{(q+1)(q^2+q+1)}^{\gamma, \alpha, \beta}$  di grado  $(q+1)(q^2 + q + 1)$
4.  $\chi_{(q-1)(q^2+q+1)}^{\gamma, \alpha}$  di grado  $(q-1)(q^2 + q + 1)$

che forniscono altri  $\frac{(q-1)(2q^2+2q-9)}{3}$  caratteri irriducibili.

Infine abbiamo considerato un sottogruppo ciclico di  $GL(3, q)$ ,

$$H_{f,3} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -c \end{pmatrix} \right\rangle$$

di ordine  $q^3 - 1$  e  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ , un polinomio primitivo.  $H_{f,3}$  è isomorfo a  $\mathbb{F}_{q^3}^*$  tramite l'applicazione:

$$\begin{array}{ccc} T_{f,3} : & H_{f,3} & \longrightarrow \mathbb{F}_{q^3}^* \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -c \end{pmatrix}^i & \longmapsto \sigma^i \end{array}$$

dove  $f(\sigma) = 0$ .

Dato  $\gamma \in \widehat{\mathbb{F}_{q^3}^*}$ , abbiamo considerato la rappresentazione unidimensionale:

$$\begin{array}{ccc} \gamma : & H_{f,3} & \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ & x & \longmapsto \gamma(T_{f,3}(x)) \end{array}$$

da cui abbiamo indotto una rappresentazione  $\xi$  in  $GL(3, q)$  di grado  $[G : H_{f,3}] = q^3(q-1)^2(q+1)$ . Se  $\chi_\xi$  è il carattere associato a  $\xi$ , poiché  $\langle \chi_\xi, \chi_\xi \rangle \neq 1$  risulta che questo carattere è riducibile (per i dettagli del calcolo rimandiamo a [St1]) e per ottenerne uno irriducibile abbiamo dovuto considerare il carattere, denotato con  $\chi_\theta^\gamma$ , ottenuto sottraendo a  $\chi_\xi$  il carattere generalizzato

$$[\chi_{q^3} - \chi_{q^2+q} + \chi_1] \cdot \chi_{(q-1)(q^2+q+1)}^\gamma$$

e quindi anch'esso generalizzato.

D'altronde poiché  $\chi_\theta^\gamma(\text{Id}) = (q-1)^2(q+1) > 0$  esso è un carattere di  $GL(3, q)$ , irriducibile se  $\gamma^{q^2+q+1} \neq \chi_0$ . Inoltre poiché  $\chi_\theta^\gamma = \chi_\theta^{\gamma^q} = \chi_\theta^{\gamma^{q^2}}$  abbiamo ottenuto infine  $\frac{1}{3}q(q-1)(q+1)$  caratteri irriducibili.

Nel Capitolo 6 abbiamo determinato  $p(n)$  rappresentazioni irriducibili di  $GL(n, q)$  ottenute da un risultato di Steinberg (Cfr. [St2]). Abbiamo evidenziato come questa costruzione generalizzi quella fatta per  $GL(2, q)$  e  $GL(3, q)$ . Si definisce innanzitutto il concetto di Bandiera:

Sia  $\nu$  una partizione di  $n$ ,  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k)$  tale che  $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \leq \nu_k \leq n$ .

**Definizione 6.1** Definiamo **bandiera** con indice  $(\nu = \nu_1, \dots, \nu_k)$  l'insieme delle catene di sottospazi  $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_k = \mathbb{F}_q^n$  tali che  $\dim V_i = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Denotando con  $B(\nu_1, \dots, \nu_k)$  l'insieme delle bandiere con indice  $(\nu_1, \dots, \nu_k)$  abbiamo che

$$|B(\nu_1, \dots, \nu_k)| = \frac{\{n\}}{\{\nu_1\} \cdot \{\nu_2\} \cdots \{\nu_k\}} \quad (4)$$

dove  $\{r\} = \prod_{i=1}^r [i]$ , e  $[r] = q^{r-1} + q^{r-2} + \dots + q + 1$ . Le bandiere di  $B(\nu)$  sono permutate dagli elementi di  $GL(n, q)$ , tramite l'azione  $\theta_\nu$  transitiva:

$$\begin{aligned} \theta_\nu : \quad & GL(n, q) \times B(\nu) & \longrightarrow & B(\nu) \\ & (A, (V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_k)) & \longmapsto & (AV_1 \subseteq AV_2 \subseteq \dots \subseteq AV_k) \end{aligned}$$

e posto  $V = \langle B(\nu) \rangle_{\mathbb{C}}$ , consideriamo la rappresentazione permutazione indotta dall'azione  $\theta_\nu$ :

$$\begin{aligned} \rho(\nu) : \quad & GL(n, q) & \longrightarrow & GL(V) \\ & A & \longmapsto & \rho(\nu)_A \end{aligned}$$

il cui grado è  $|B(\nu)|$ .

Da queste rappresentazioni permutazione si possono estrarre  $p(n)$  rappresentazioni irriducibili, come afferma il seguente

**Teorema 6.1** Sia  $\nu$  una partizione di  $n$ , e sia  $\lambda_i = \nu_i + (i - 1)$ , con  $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$ .

1. Sia

$$\Gamma(\nu) = \sum_k \operatorname{sgn}(k) \rho(\lambda_1 - k_1, \dots, \lambda_n - k_n) = \sum_k \operatorname{sgn}(k) \rho(\lambda - k)$$

$\Gamma(\nu)$  è una rappresentazione irriducibile di  $GL(n, q)$ .

La somma è fatta su tutti i  $k = (k_1, \dots, k_n)$  visti come permutazioni dei numeri  $0, 1, \dots, n-1$ . Poniamo inoltre  $\rho(\lambda - k) = 0$  se  $\exists i$  tale che  $\lambda_i - k_i \leq 0$ .

2. Le rappresentazioni così ottenute sono tutte distinte. Se poi moltiplichiamo ognuno di questi caratteri per i  $q - 1$  caratteri unidimensionali di  $\mathbb{F}_q^*$ , otterremo  $(q - 1)p(n)$  caratteri irriducibili di  $GL(n, q)$ .

Nel caso  $n = 2$  otteniamo la rappresentazione banale e quella ottenuta dall'azione sullo spazio proiettivo  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ . Mentre per  $n = 3$  otteniamo oltre quella banale e quella indotta dall'azione su  $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ , anche quella indotta dall'azione di  $GL(3, q)$  sulle coppie "punto, retta".

Abbiamo poi proseguito con lo studio di particolari sottogruppi denotati con  $GL(\nu, q)$  e  $H_{f,n}$ , dove se  $\nu = (n_1, \dots, n_k)$  è una partizione di  $n$ ,

$$GL(n_1, \dots, n_k, q) = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ * & \ddots & \\ * & & A_k \end{pmatrix} \in GL(n, q) \mid A_i \in GL(n_i, q) \right\}$$

e

$$H_{f,n} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & \cdots & -a_0 \end{pmatrix}^d, d \in \mathbb{F}_q^* \right\}.$$

Le rappresentazioni indotte da questi sottogruppi permettono di calcolare le restanti rappresentazioni. In conclusione abbiamo fatto vedere l'applicazione di questo metodo per il calcolo delle rappresentazioni irriducibili di  $GL(4, q)$ .

In generale quindi, è possibile costituire tre tipi di rappresentazioni per  $GL(n, q)$  :

1. Rappresentazioni tipo Bandiere;
2. Rappresentazioni tipo indotte da Sottogruppi  $GL(n_1, \dots, n_k, q)$ ;
3. Rappresentazioni tipo indotte da Sottogruppi  $H_{f,n}$ .

# Bibliografia

- [Be] E.R. Berlekamp, *Algebraic Coding Theory*, Aegean Park Press, New York, 1984.
- [FH] W. Fulton e J. Harris, *Representation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [Gr] J. A. Green, *The characters of the finite general linear group*, Trans. Amer. Math. Soc. **80** (1955), 402-447.
- [He] I. N. Herstein, *Algebra*, Editori Riuniti, Roma, 1994.
- [LN] Rudolf Lidl e Harald Niederreiter, *Finite Fields*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [Ma] Antonio Machì, *Introduzione alla Teoria dei Gruppi*, Feltrinelli, Milano, 1974.
- [Ro] Steven Roman, *Field Theory*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [Sa] Bruce Sagan, *The symmetric group*, Springer, New York, 1991.
- [Se1] J-P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [Se2] J-P Serre, *cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Parigi, 1970.
- [S] E. Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, Torino, 1989.
- [St1] R. Steinberg, *The Representations of  $GL(3, q)$ ,  $GL(4, q)$ ,  $PGL(3, q)$ , and  $PGL(4, q)$* , Can. J. Math. **3** (1951), 225-235.

- [St2] R. Steinberg, *A Geometric Approach to the Representation of the Full Linear Group over a Galois Field*, Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951), 274-282.