UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

Sintesi della Tesi di Laurea

TEOREMA CENTRALE DEL LIMITE PER MARTINGALE

Relatore: Prof. PIETRO CAPUTO

Laureando: GIORGIO GRAVELA

Classificazione AMS: 60G40, 60G42, 60G44, 60G45, 60Fxx, 60F05.

Parole chiavi: martingale, moti browniani, principio d'invarianza, teorema centrale del limite.

ANNO ACCADEMICO 2004-2005

Maggio 2006

Indice

Capitolo 1

T.C.L. Per Martingale

Il Teorema Centrale del Limite (T.C.L.) è uno dei più importanti risultati nella teoria del calcolo delle probabilità. In breve, nella sua forma più elementare afferma che la distribuzione della somma di un numero elevato di variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.) è approssimata da una distribuzione normale, indipendentemente dalla distribuzione delle singole variabili, purchè queste abbiano momento secondo finito .

La teoria matematica delle martingale può essere considerata un'estensione della teoria delle variabili aleatorie indipendenti, ed il nostro lavoro ha lo scopo di dimostrare un T.C.L. per martingale.

Sia S_n, $n \geq 1$, una martingala rispetto alla filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}_n$, con $ES_n = 0$, $ES_n^2 < \infty$, e sia $X_n = S_n - S_{n-1}$, $n \geq 2$, con $S_0 = 0$, detta *martingala differenze*. Introduciamo la *varianza condizionata per martingale*

$$V_n = \sum_1^n E(X_i^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}),$$

che gioca un ruolo cruciale nella teoria di limite per martingale.

Essa rappresenta una delle numerose stime della varianza ES_n^2 e questo implica che il comportamento al limite di S_n è strettamente legato a quello di V_n. Quindi se il comportamento di V_n non è 'buono', potrebbe non essere possibile ottenere un T.C.L.

Nota. Osserviamo che $V_n = n\sigma^2$ se le X_i sono i.i.d. con la varianza di X_i uguale a σ^2.
Nel teorema centrale del limite per martingale si richiede che la varianza condizionata sia asintoticamente costante:

$$\sigma_n^{-2} V_n \to 1 \quad \text{in probabilità} \ , \tag{1.1}$$

dove $\sigma_n^2 = EV_n = ES_n^2$.
Un modo conveniente per introdurre V_n è attraverso la decomposizione di Doob delle submartingale $\{S_n^2, \mathcal{F}_n\}$. Possiamo scrivere

$$S_n^2 = M_n + A_n,$$

dove $\{M_n, \mathcal{F}_n\}$ è una martingala e $\{A_n\}$ è una successione crescente di v.a. non negative, con $A_n \in \mathcal{F}_{n-1}$. Allora la decomposizione è unicamente determinata (q.c.) dalla seguente relazione:

$$\begin{aligned}
A_n - A_{n-1} &= E(A_n - A_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) \\
&= E(S_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}) - S_{n-1}^2 \\
&= E((S_n - S_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}) \\
&= E(X_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}).
\end{aligned}$$

Quindi $A_n = V_n$.

1.0.1 Il Principio D'Invarianza

Con il termine **principio d'invarianza** indicheremo i T.C.L. per funzionali. Mentre con il T.C.L. si studia la convergenza delle somme S_n ad una normale standard[1], con un principio di invarianza studieremo la convergenza del processo S_t, con t parametro continuo, al moto browniano B_t .

Nel 1978 Durret ha presentato un approccio unificato per ottenere vari principi di invarianza per S_n partendo dal **teorema di rappresentazione di Skorokhod**.

Di solito nei vari metodi usati per stabilire principi d'invarianza, è necessario provare sia (a) la convergenza di distribuzioni finito-dimensionali che (b) **la tightness** [2]. Il teorema di rappresentazione di Skorokhod permette invece di stabilire il principio di invarianza direttamente, senza usare le due parti (a) e (b).

Nel nostro lavoro abbiamo seguito l'approccio di Durrett.

Abbiamo iniziato mostrando il legame tra le martingale e i moti browniani per poi fornire alcuni utili strumenti di calcolo per i tempi di primo ingresso per i moti browniani.

Teorema 1.0.1 *Sia X_t una martingala continua a destra adattata ad una filtrazione continua a destra. Se T è uno stopping time limitato allora*

$$EX_T = EX_0.$$

---

[1] con le opportune normalizzazioni.

[2] Una successione $\{\mu_n\}_n$ di misure di probabilità si dice **tight** se $\forall\epsilon > 0\ \ \exists k$ tale che:

$$\inf_n \mu_n([-k, k]) \geq 1 - \epsilon$$

Teorema 1.0.2 B_t *è una martingala rispetto alla filtrazione* $\mathcal{F}_t$[3].

Teorema 1.0.3 *Se* $a < x < b$ *allora*

$$P_x(T_a{}^4 < T_b) = \frac{(b-x)}{(b-a)}$$

Teorema 1.0.4 $B_t^2 - t$ *è una martingala rispetto alla filtrazione* $\mathcal{F}_t$.

Teorema 1.0.5 *Sia* $T = \inf\{t : B_t \notin (a,b)\}$, *dove* $a < 0 < b$. *Allora*

$$E_0 T = -ab.$$

Teorema 1.0.6 $\exp(\theta B_t - (\theta^2 t/2))$ *è una martingala rispetto alla filtrazione* $\mathcal{F}_t$.

Teorema 1.0.7 *Sia* $T = \inf\{t : B_t \notin (-a,a)\}$. *Allora*

$$E_0(\exp(-\lambda T)) = 1/\cosh(a\sqrt{2\lambda})$$

Teorema 1.0.8 $B_t^3 - 3tB_t, B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2, \ldots$ *sono martingale rispetto alla filtrazione* $\mathcal{F}_t$.

Teorema 1.0.9 *Sia* $T = \inf\{t : B_t \notin (-a,a)\}$. *Allora*

$$E(T^2) = 5a^4/3$$

---

[3] Sia $\mathcal{F}_t^0 = \sigma(B_r : r \leq t)$, allora

$$\mathcal{F}_t = \cap_{s>t} \mathcal{F}_s^0.$$

[4] $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$

Nel terzo capitolo siamo partiti dal teorema di rappresentazione di Skorokhod per dimostrare il primo generale principio d'invarianza per somme di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite (**Teorema di Donsker**) di cui un immediato corollario è il T.C.L 'classico'.

Teorema 1.0.10 (di rappresentazione di Skorokhod) *Sia X una variabile aleatoria con $EX = 0$ e $EX^2 < \infty$. Allora esiste uno stopping time T per un moto Browniano B_t con $B_0 = 0$ tale che*

$$B_T =_d X \quad e \quad ET = EX^2.$$

Il teorema di rappresentazione di Skorokhod si generalizza facilmente ottenendo il seguente:

Teorema 1.0.11 *Siano $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. con funzione di distribuzione F, $EX = 0$ e $EX^2 = 1$, e sia $S_n = X_1 + \dots + X_n$.*
Allora esiste una successione di stopping times $T_0 = 0, T_1, T_2, \dots$ tale che

$$S_n =_d B_{T_n} \quad e \quad T_n - T_{n-1} \textit{ sono i.i.d. .}$$

Teorema 1.0.12 (di Donsker) *Sotto le ipotesi di 1.0.11, se definiamo*

$$S_{(u)} = \begin{cases} S_k & \textit{se } u = k \in \mathbf{N} \\ \textit{lineare su } [k, k+1] & \textit{per } k \in \mathbf{N} \end{cases}$$

dove $\mathbf{N}$ è l'insieme dei naturali, allora

$$\frac{S_{(n\cdot)}}{\sqrt{n}} \Rightarrow B_{(\cdot)}$$

Con la notazione $S_{(n\cdot)}/\sqrt{n} \Rightarrow B_{(\cdot)}$ intendiamo la **convergenza debole** della misura su $C[0,1]$[5] associata al processo $S_{(n\cdot)}/\sqrt{n}$ alla misura su $C[0,1]$ associata al moto browniano $B_{(\cdot)}$. La topologia su $C[0,1]$ è quella determinata dalla norma $\| \omega \| = \sup\{|\omega(s)| : s \in [0,1]\}$, che rende $C[0,1]$ uno spazio metrico completo separabile.
Ricordiamo inoltre la seguente:

Definizione 1.0.1 *Una successione di misure di probabilità μ_n su $C[0,1]$* ***converge debolmente*** *ad un limite μ se per ogni funzione continua limitata $\varphi : C[0,1] \to \mathbf{R}$,*

$$\int \varphi d\mu_n \to \int \varphi d\mu.$$

Vediamo come si passa da un principio d'invarianza al T.C.L.
Vale il seguente corollario del teorema di Donsker:

Corollario 1.0.1 *Sia $\psi : C[0,1] \to \mathbf{R}$ è continua P_0-q.c.*[6]*, allora*

$$\psi(S_{(n\cdot)}/\sqrt{n}) \Rightarrow \psi(B_{(\cdot)}) \tag{1.2}$$

Quindi basta porre $\psi(\omega) = \omega(1)$. Infatti in questo caso $\psi : C[0,1] \to \mathbf{R}$ è continua , e quindi applicando il corollario 1.0.1 al teorema di donsker otteniamo il T.C.L.

Con un procedimento del tutto analogo, nel quarto e ultimo capitolo siamo partiti dal **teorema di Strassen**, che è un'estensione per martingale

[5] $C[0,1] = \{\omega : [0,1] \to \mathbf{R},\ \text{con } \omega \text{ funzione continua }\}$.

[6] P_0 è la misura sotto la quale B_t è un moto browniano che parte da 0 cioè

$$P_0(B_0 = 0) = 1.$$

del teorema di rappresentazione di Skorokhod, per dimostrare un principio di invarianza per martingale di cui un immediato corollario è il T.C.L. per martingale.

Teorema 1.0.13 (di Strassen) *Se S_n è una martingala con $S_0 = 0$ e B_t è un moto browniano, allora esiste una successione di stopping times $0 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \ldots$ per B_t tale che*

$$(S_0, S_1, \ldots, S_k) =_d (B_{T_0}, B_{T_1}, \ldots, B_{T_k}) \quad \forall k \geq 0.$$

In analogia a quanto visto nel teorema 1.0.12, introduciamo la seguente notazione:

1. $X_{n,m}$,$1 \leq m \leq n$, è una **martingala vettore differenze** rispetto ad $\mathcal{F}_{n,m}$, se $X_{n,m} \in \mathcal{F}_{n,m}$ e $E(X_{n,m} \mid \mathcal{F}_{n,m-1}) = 0$ per $1 \leq m \leq n$, dove $\mathcal{F}_{n,0} = \{\emptyset, \Omega\}$.

2. $V_{n,k} = \sum_{1 \leq m \leq k} E(X^2_{n,m} \mid \mathcal{F}_{n,m-1})$ è la **varianza condizionata** di $X_{n,m}$.

3. $B_{(\cdot)}$ è un moto browniano con $B_0 = 0$.

4. $S_{n,(n\cdot)}$ denota l'interpolazione lineare di $S_{n,m}$ definita da

$$S_{n,(u)} = \begin{cases} S_{n,m} & \text{se } u = m \in \mathbf{N} \\ \text{lineare per } u \in [m, m+1] & \text{per } m \in \mathbf{N} \end{cases}$$

Un principio d'invarianza per martingale è dato dal seguente:

Teorema 1.0.14 (di Freedman) *Sia $X_{n,m}$ una martingala vettore differenze rispetto ad $\mathcal{F}_{n,m}$, e sia $S_{n,m} = X_{n,1} + \ldots + X_{n,m}$. Se valgono le seguenti affermazioni:*

(i) $|X_{n,m}| \leq \epsilon_n, \quad \forall m, \;$ *con* $\epsilon_n \to 0$

(ii) $\forall t, \quad V_{n,[nt]} \to t$ *in probabilità*

allora

$$S_{n,(n\cdot)} \Rightarrow B_{(\cdot)}$$

Con ipotesi meno forti rispetto a quelle del teorema di Freedman, abbiamo dimostrato il seguente principio d'invarianza per martingale , da cui poi con facili calcoli, si ottiene il T.C.L. per martingale.

Teorema 1.0.15 (di Lindeberg-Feller per martingale) *Sia $X_{n,m}$ una martingala vettore differenze rispetto ad $\mathcal{F}_{n,m}$, $1 \leq m \leq n$, e sia $S_{n,m} = X_{n,1} + \ldots + X_{n,m}$. Se valgono le seguenti affermazioni:*

(i) $\forall t \in [0,1] \;\; V_{n,[nt]} \to t$ *in probabilità*

(ii) $\forall \epsilon > 0 \;\; \sum_{m \leq n} E(X_{n,m}^2 \boldsymbol{1}_{(|X_{n,m}|>\epsilon)} \mid \mathcal{F}_{n,m-1}) \to 0$ *in probabilità*

allora

$$S_{n,(n\cdot)} \Rightarrow B_{(\cdot)}.$$

Dal teorema 1.0.15 si dimostra facilmente il seguente principio d'invarianza per martingale:

Teorema 1.0.16 *Sia X_n una martingala successione differenze rispetto alla filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}_n$, cioè $E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 0$, e sia $V_k = \sum_{n=1}^{k} E(X_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1})$. Se valgono*

(i) $V_k/k \to \sigma^2 > 0$ *in probabilità*

(ii) $n^{-1} \sum_{m=1}^{n} E(X_m^2 \boldsymbol{1}_{(|X_m|>\epsilon\sqrt{n})}) \to 0$

allora

$$\frac{S_{(n\cdot)}}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma B_{(\cdot)}.$$

Alla luce di quanto detto fin'ora, dimostriamo il T.C.L. per martingale.

Teorema 1.0.17 *Sotto le stesse ipotesi di 1.0.16 si ha*

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma\chi$$

dove χ *è la normale standard.*

Dimostrazione. Basta applicare il corollario 1.0.1 alla $\psi : C[0,1] \to \mathbf{R}$ con $\psi(\omega) = \omega(1)$ e ricordarsi che B_1 è una normale standard. ∎

Bibliografia

[1] Dvoretsky A. Asymptotic normality for sums of dependent random variables. In *Proc. 6th Berkeley Symp.*, volume II, pages 513–535, 1972.

[2] Freedman D. *Brownian motion and diffusion.* Springer-Verlag, New York, 1971.

[3] Root D.H. The existence of certain stopping times on brownian motion. In *Ann.Mat.Statist. 40*, pages 715–718, 1969.

[4] Dubins L.E. On a theorem of skorokhod. In *Ann.Math.Statist. 39*, pages 2094–2097, 1968.

[5] Donsker M. An invariance principle for certain probability limit theorems. In *Memoirs of the AMS*, No.6, 1951.

[6] Billingsley P. *Probability and measure.* John Wiley and Sons, New York, 1979.

[7] Hall P. and Heyde C.C. *Martingale limit theory and its application.* Academic Press, New York, 1980.

[8] Durrett R. *Probability:Theory and Examples.* Duxbury, terza edizione, 2005.

[9] Durrett R. and Resnick S. Functional limit theorems for dependent random variables. In *Ann.Probab. 6*, pages 829–846, 1978.

[10] Strassen V. Almost sure behavior of the sum of independent random variables and martingales. In *Proc. 5th Berkeley Symp.*, volume II, pages 315–343, 1967.