Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Schemi zero-dimensionali e postulazione

Candidato
Sara Lamboglia

Relatore
Prof. Edoardo Sernesi

Anno Accademico 2013-14
Luglio 2014

Classificazione AMS: 14H50,14J60,13D02,13D07
Parole chiave: curva, superficie, postulazione, fibrato vettoriale.

Sintesi

In questa tesi ci occuperemo della postulazione nel piano proiettivo ossia delle condizioni indipendenti imposte dai sistemi di punti alle curve di dato grado. Il teorema di Cayley-Bacharach sarà essenziale nella trattazione, a partire dalla forma classica fino agli sviluppi in relazione all'esistenza di particolari fibrati vettoriali. Utilizzeremo tale risultato anche per studiare le intersezioni complete e in questo ambito sarà molto importante il teorema di Hilbert-Burch che offre un punto di vista algebrico sul problema.

Sia nel campo della geometria algebrica ma anche in quello della matematica applicata è interessante studiare i polinomi che si annullano in un determinato insieme di punti del piano. L'annullarsi di un polinomio f in un punto è una condizione lineare imposta ai coefficienti di f. Quindi nel caso di n punti abbiamo n condizioni. Il problema è però calcolare il numero di condizioni *indipendenti* imposte ai polinomi di grado fissato d. Con esempi molto semplici (tre punti allineati e i polinomi di primo grado) si può vedere che in generale il numero delle condizioni indipendenti è minore di n e nasce quindi la questione di come calcolarlo. Il teorema di Cayley-Bacharach nella sua forma classica (4) dà una prima soluzione al problema considerando dei punti particolari ossia punti che sono l'intersezione di due curve. Se le curve hanno grado m e n allora tutte le curve di grado $m+n-3$ che passano per $mn-1$ punti contengono anche l'mn-esimo punto, cioè le condizioni indipendenti sono al più $mn-1$.
Dietro questo teorema possiamo riconoscere una lunga storia che viene deli-

neata nell'articolo di Eisenbud, Green ed Harris [7].
Il primo risultato a poter essere considerato un suo antecedente risale al IV sec d.C. ed è attribuito al matematico greco Pappo di Alessandria. Più precisamente ci riferiamo alla proposizione 139 del VII libro delle sue *Collectiones mathematicae*. Andando avanti con i secoli, quando nel '600 vari fattori contribuirono ad un rinnovato interesse per la geometria (ad esempio lo studio dello spazio proiettivo da parte di Cartesio e la scoperta di Keplero delle orbite ellittiche dei pianeti)Pascal provò un teorema che generalizza il risultato di Pappo e che diventa per lui uno strumento essenziale per dimostrare molte proprietà delle coniche.
A concludere la rassegna storica precedente a Cayley e Bacharach è il matematico francese Michael Chasles che nel suo *Traité des Sections Coniques*[13] propone un risultato più semplice e più potente di quello di Pascal. Egli dimostra che date due cubiche che si intersecano in nove punti distinti $p_1, ..., p_9$, una qualsiasi cubica contenente $p_1, ..., p_8$ contiene anche p_9. Notiamo che il teorema equivale a dire che tutte le cubiche che passano per questi otto punti si intersecano in un unico altro punto. Le coordinate di questo nono punto dipendono dalle coordinate degli altri otto e sono state calcolate esplicitamente nel recente articolo di Q.Ren,J.Richter-Gebert e B.Sturmfels [5].
Arriviamo quindi ai protagonisti del nostro percorso storico, i matematici Cayley e Bacharach. Nel 1843 Cayley pubblicò un lavoro su un'estensione del teorema di Chasles. Alla base del suo risultato c'era un metodo per calcolare il numero $h_\Gamma(k)$ delle condizioni indipendenti imposte da un sistema di punti Γ alle curve di grado k. Egli notò che dati $d \cdot e$ punti intersezione di due curve di grado d ed e allora $h_\Gamma(k)$ poteva essere calcolato esplicitamente:

$$h_\Gamma(k) = \binom{k+2}{2} - \binom{k-d+2}{2} - \binom{k-e+2}{2} + \binom{k-d-e+2}{2}.$$

La sua conclusione è che qualsiasi curva di grado k che contiene un sottoinsieme di $h_\Gamma(k)$ punti contiene anche i rimanenti. Questo è falso e si può vedere considerando una retta L e un insieme di punti $\Gamma' = \{p_1, p_2, p_3\} \subset L$. Date C_1 e C_2 due cubiche contenenti Γ', che si intersecano nell'insieme Γ costituito

da nove punti distinti, abbiamo che $h_\Gamma(1) = 3$ ma la retta che passa per Γ' non contiene tutto Γ altrimenti avremmo che l'intersezione di C_1 e C_2 sarebbe una retta e non nove punti. A correggere Cayley e ad ampliare nel modo giusto il teorema di Pascal sarà Bacharach intorno al 1881. Egli osserverà che la conclusione di Cayley è vera nel caso in cui il resto dei punti non sia su una curva di un determinato grado. Da questa considerazione Bacharach giungerà ad un ampliamento (6) dell'enunciato per la cui dimostrazione vengono utilizzati argomenti e tecniche sviluppate in quel periodo, ad esempio il linguaggio dei divisori e delle serie lineari e il teorema di Riemann-Roch. Inoltre il teorema di Bacharach può essere ulteriormente ampliato al caso di ipersuperfici che hanno intersezione completa.
Nel XX secolo il teorema di Cayley-Bacharach viene interpretato alla luce del nuovo linguaggio degli schemi. Ulteriori numerosi sviluppi possono essere trovati sempre in [7] in cui il teorema viene generalizzato e considerato dal un punto di vista algebrico che dà luogo ad alcune interessanti congetture. Quest'ultime riguardano limiti superiori e inferiori per la funzione di Hilbert $h_\Gamma(k)$.
L'altra direzione in cui viene ampliato e approfondito il teorema di Cayley-Bacharach è la teoria dei fibrati vettoriali. La proprietà che caratterizza i punti del teorema diventa la proprietà di Cayley-Bacharach per sottoschemi zero-dimensionali. Attraverso la costruzione di Serre vediamo che tale proprietà per Z sottoschema zero-dimensionale garantisce l'esistenza di particolari fibrati di rango 2 associati a Z. Questi fibrati vengono utilizzati nel teorema di Reider ben illustrato nell'articolo di R.Lazarsfeld[12].
L'ultimo problema di cui ci occuperemo sarà di utilizzare la proprietà di C-B per caratterizzare le intersezioni complete ossia per risolvere il problema di Eulero-Cramer:

> Dato Z un insieme finito di punti di $\mathbb{P}^2$, trovare condizioni necessarie e sufficienti su Z perché esistano due curve $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ tali che $Z = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

Vedremo che la proprietà di Cayley-Bacharach dà una condizione solo necessaria e quindi per trovarne una anche sufficiente introdurremo il teorema di Hilbert-Burch. La nostra trattazione non sarà molto approfondita ma gli studi su questo argomento sono numerosi ed è interessante vedere la soluzione al problema illustrata nell'articolo di E.Davis-P.Maroscia [9].

Procediamo descrivendo nel particolare gli argomenti presenti nelle diverse sezioni di questa tesi.
Nel primo capitolo si trovano i concetti preliminari necessari per affrontare la trattazione successiva. Assumendo come note le nozioni di teoria delle categorie, coomologia e teoria del fasci, richiamiamo i funtori $\mathrm{Ext}^n(-, A)$ e $\mathrm{Ext}^n(C, -)$, il complesso di Koszul e alcuni risultati di algebra omologica. Infine nell'ultima parte del capitolo consideriamo i fibrati vettoriali, i fasci invertibili e i divisori illustrando la corrispondenza che sussiste tra questi oggetti.

Iniziamo il secondo capitolo con il matematico greco Pappo di Alessandria (IV a.C.), concentrando la nostra attenzione su un risultato che troviamo nel libro VII delle sue ″Collectiones mathematicae″.

Teorema 1 (Pappo di Alessandria)**.** *Siano L e M due rette nel piano affine. Si prendano q_1, q_2 e q_3 punti distinti in L e p_1, p_2 e p_3 punti distinti in M, nessuno dei quali è in $L \cap M$. Se per ogni $j \neq k \in \{1, 2, 3\}$ chiamiamo r_{jk} il punto di intersezione tra la retta per p_k e q_j e la retta per p_j e q_k allora i tre punti r_{jk} sono allineati.*

Osservazione 1. Il teorema è enunciato nel caso del piano euclideo ma appare subito evidente che esso è vero solo se si considera il piano proiettivo. Ad esempio se si prendono i punti in modo che la retta per p_1 e q_2 sia parallela a quella per p_2 e q_1, il punto r_{12} non esiste a meno di non considerare il punto all'infinito del piano proiettivo.

Il teorema precedente può essere visto come un caso particolare del seguente risultato pubblicato da Pascal nel 1640:

Teorema 2 (Pascal)**.** *Se si iscrive un esagono in una conica C contenuta nel piano proiettivo allora i lati opposti dell'esagono si intersecano in tre punti allineati.*

Vediamo subito che il teorema di Pappo discende da questo teorema. Infatti basta considerare l'unione delle due rette L e M come un caso particolare di conica e q_1, q_2, q_3, p_1, p_2 e p_3 sei suoi punti distinti. Tali punti determinano un esagono iscritto nella conica. Per vedere maggiormente il legame con le ipotesi di Pappo scegliamo come lati i segmenti $\overline{p_1q_2}, \overline{q_2p_3}, \overline{p_3q_1}, \overline{q_1p_2}, \overline{p_2q_3}$ e $\overline{q_3p_1}$. In questo modo i lati opposti sono sulle rette per p_j e q_k e per p_k e q_j e i punti r_{jk} risultano essere allineati per il teorema di Pascal.
Passiamo ora ad una estensione dei due teoremi precedenti dovuta al matematico francese Michel Chasles. Il risultato di Chasles è sia più semplice sia più interessante di quello di Pascal e comunemente, anche se erroneamente, va sotto il nome di Cayley-Bacharach.

Teorema 3 (Chasles)**.** *Siano X_1 e X_2 due cubiche proiettive piane, prive di componenti irriducibili comuni, che si intersecano in nove punti distinti $p_1, ..., p_9$. Se X è una qualsiasi cubica proiettiva piana contenente $p_1, ..., p_8$ allora X contiene anche p_9.*

Si può notare che il sistema di nove punti presi in considerazione, in un primo momento è diviso in tre parti(in Pappo ci sono tre punti su una retta, tre su un'altra e tre nell'intersezione di determinate rette), poi in due (Pascal divide i sei punti sull'esagono e i tre punti nell'intersezione del prolungamento dei lati) e infine è considerato senza ripartizioni da Chasles(nove punti nell'intersezione di due cubiche).

Arriviamo quindi ad enunciare il teorema dovuto a Cayley e a Bacharach che generalizza Chasles al caso di curve $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ di grado m ed n qualsiasi.

Teorema 4 (Teorema di Cayley-Bacharach). *Siano X_1 e X_2 due curve piane proiettive di grado rispettivamente m e n allora:*

(i) ogni curva C^{m+n-3} che contiene $mn-1$ punti dell'intersezione $X_1 \cap X_2$, costituita da mn punti distinti, contiene tutto $X_1 \cap X_2$;

(ii) ogni $C^{m+n-\gamma}$ ($\gamma > 3$) che contiene $mn - \frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)$ punti di $X_1 \cap X_2$ contiene tutto $X_1 \cap X_2$, tranne il caso particolare in cui i rimanenti $\frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)$ punti giacciano su una curva $C^{\gamma-3}$.

Osservazione 2. *Il teorema non dà informazioni sul comportamento in $X_1 \cap X_2$ delle curve di grado maggiore o uguale a $m+n-2$. Per vederlo abbiamo bisogno di un risultato più preciso di (4) che utilizza la coomologia dei fasci.*

Teorema 5. *Siano X_1 e X_2 due curve in $\mathbb{P}^2$ di grado rispettivamente* n *e* m *tali che $X_1 \cap X_2 = Z$ sia costituito da* nm *punti distinti. Se indichiamo con $\mathcal{I}_Z(d)$ il fascio di ideali di Z abbiamo che*

$$H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) = 0 \text{ se } d \geq m+n-2$$

$$H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) \neq 0 \text{ se } d = m+n-3.$$

In seguito interpretiamo il teorema di Cayley-Bacharach attraverso il linguaggio dei divisori, fornendone una dimostrazione che offre lo spunto per due estensioni del teorema. La prima dovuta allo stesso Bacharach è la seguente:

Teorema 6 (Bacharach). *Siano $X_1, X_2 \subset \mathbb{P}^2$ curve di grado rispettivamente m ed n e supponiamo che si intersechino in mn punti distinti.*
Sia $\Gamma = X_1 \cap X_2 = \{p_1, ..., p_{mn}\}$ e scriviamo $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$, cioè come unione di due sottoinsiemi disgiunti. Sia $s = m+n-3$, se $k \leq s$ è un intero non negativo, allora $h_\Gamma(k) - h_{\Gamma'}(k) = |\Gamma''| - h_{\Gamma''}(s-k)$, dove $|\Gamma''|$ indica la cardinalità di Γ''.

Osservazione 3. Vediamo che la parte (i) del teorema di Cayley-Bacharach (4) è semplicemente il caso $k = s$ e $\Gamma'' = \{p_{mn}\}$. Infatti ogni $p \in \Gamma$, in particolare p_{mn}, impone una sola condizione ai polinomi di grado zero e quindi

$$|\Gamma''| - h_{\Gamma''}(s - s) = 1 - 1 = 0,$$

cioè non ci sono curve di grado $m+n-3$ che si annullano in Γ' se non quelle che si annullano in tutto Γ. Inoltre si può ricavare anche la parte (ii) di (4) ponendo Γ'' uguale all'insieme dei $\frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)$ punti rimanenti.

Osservazione 4. Il teorema appena enunciato ha anche un'altra conseguenza. Ogni curva di grado $s - 1 = m + n - 4$ che contiene tutti i punti di Γ tranne 2 contiene tutto Γ. Inoltre esiste una curva di grado $s-1$ che contiene $\Gamma - \{p, q, r\}$ e non si annulla in tutto Γ se e solo se i tre punti p, q e r sono allineati.

Un' ulteriore generalizzazione riguarda lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ e n ipersuperfici che si intersecano trasversalmente:

Teorema 7. *Siano $X_1, ..., X_n$ ipersuperfici in $\mathbb{P}^n$ di grado rispettivamente $d_1, ..., d_n$ che si intersecano trasversalmente. Sia $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$ l'intersezione e siano Γ' e Γ'' due sottoinsiemi disgiunti. Poniamo $s = \sum d_i - n - 1$. Se $k \leq s$ è un intero non negativo allora $h_\Gamma(k) - h_{\Gamma'}(k) = |\Gamma''| - h_{\Gamma''}(s - k)$.*

Nel teorema di Cayley-Bacharach (4) vediamo che i punti nell'intersezione di due curve hanno un comportamento particolare, ossia tutte le curve di un dato grado che contengono tutti questi punti tranne uno contengono anche il restante punto. A partire da questo caso specifico possiamo definire la proprietà di Cayley-Bacharach per un sistema di punti e in seguito generalizzarla agli schemi zero-dimensionali, cosa di cui ci occupiamo nel terzo capitolo.
Consideriamo una superficie proiettiva non singolare X. Indichiamo con L un fibrato di rango 1 su X e con Z un sottoschema zero-dimensionale di X.

Definizione 1 (Proprietà C-B)**.** *Il sottoschema Z soddisfa la* **proprietà di Cayley-Bacharach** *rispetto al fibrato $L \otimes K_X$ se dato un sottoschema*

$Z' \subset Z$ con $h^0(X, \mathcal{O}_{Z'}) = h^0(X, \mathcal{O}_Z) - 1$ allora per ogni $s \in H^0(X, L \otimes K_X)$ tale che $s|_{Z'} = 0$ si ha $s|_Z = 0$.

Teorema 8. (Teorema di Cayley-Bacharach per fibrati)
Sia Z un sottoschema ridotto zero dimensionale di X. Allora Z ha la proprietà di Cayley-Bacharach rispetto al fibrato $L \otimes K_X$ se e solo se esistono un fibrato E di rango 2 e una sezione $s \in H^0(X, E)$ tali che $\det E = L$ e $Z(s) = Z$, dove $Z(s)$ è lo schema di annullamento di s.

L'interesse per questo teorema va oltre la semplice estensione di Cayley-Bachrach ai fibrati, in quanto esso implica l'esistenza di fibrati vettoriali di rango 2 su X che hanno come determinante L e sono tali che esiste una loro sezione globale s per cui $Z = Z(s)$. Per dimostrare il teorema studiamo prima le condizioni per cui esistono dei tali E ed s a partire dal fibrato lineare L e dal sottoschema finito Z, cioè spostiamo l'attenzione sulla seguente domanda:

Quando esistono un fibrato E su X di rango 2 e una sezione $s \in H^0(X, E)$ tali che $\det E = L$ e $Z(s) = Z$?

La risposta a questa domanda prevede l'utilizzo della *costruzione di Serre*. Fissiamo un fibrato lineare L su X e un sottoschema finito $Z \subset X$ non necessariamente ridotto.
L'idea di Serre è quella di costruire il fibrato E tramite un'estensione di $L \otimes \mathcal{I}_Z$ per $\mathcal{O}_X$, dove $\mathcal{I}_Z \subset \mathcal{O}_X$ è il fascio di ideali di Z. Una tale estensione è un elemento dello spazio vettoriale $Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X)$ cioè è una successione esatta corta del tipo:

$$e : 0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}^e \to L \otimes \mathcal{I}_Z \to 0$$

dove $\mathcal{F}^e$ è un $\mathcal{O}_X$−modulo di rango 2 privo di torsione in quanto sia $\mathcal{O}_X$ che $L \otimes \mathcal{I}_Z$ sono privi di torsione. Se $\mathcal{F}^e$ fosse localmente libero, quindi un fibrato vettoriale, l'omomorfismo $\mathcal{O}_X \to \mathcal{F}^e$ definirebbe una sezione s tale che $Z(s) = Z$. Dunque per rispondere alla domanda iniziale bisogna capire quando il fascio $\mathcal{F}^e$ è localmente libero. Iniziamo dando una condizione affinché non sia localmente libero:

Proposizione 9. *Sia data* $e \in Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X)$.
Il corrispondente fascio $\mathcal{F}^e$ *non è localmente libero se e solo se esiste un sottoschema proprio* $Z' \subset Z$*(eventualmente vuoto) tale che*

$$e \in Im\{Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_{Z'}, \mathcal{O}_X) \to Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X)\}.$$

Questa proposizione ha come conseguenza il seguente risultato:

Corollario 10. *Sia* Z *sia uno schema finito ridotto.*
Esiste un'estensione $e \in \mathrm{Ext}^1(L \otimes \mathcal{I}_Z)$ *con* $\mathcal{F}^e$ *localmente libero se e solo se per ogni sottoschema proprio* $Z' \subset Z$*, eventualmente vuoto, si ha che l'immagine di* $\mathrm{Ext}^1(L \otimes \mathcal{I}_{Z'}, \mathcal{O}_X)$ *è un sottospazio proprio di* $\mathrm{Ext}^1(L \otimes \mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X)$.

Osservazione 5. Si vede che è sufficiente verificare la condizione solo per i sottoschemi Z' del tipo $Z \setminus \{x\}$. Infatti preso un sottoschema qualsiasi Z'', esiste $Z' = Z \setminus \{x\}$ tale che $Z'' \subset Z'$ e quindi si può considerare il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_{Z'}, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "\phi"] & Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X) \\
Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_{Z''}, \mathcal{O}_X). \arrow[u, "\mu"] \arrow[ur, "\phi'"'] &
\end{tikzcd}$$

Nel caso in cui Z' verifica la condizione del corollario abbiamo che ϕ ha come immagine un sottospazio proprio di $Ext^1(L \otimes \mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X)$ e questo è vero anche per ϕ' perché è data dalla composizione di μ e ϕ.

La costruzione di Serre appena illustrata definisce una relazione tra i sottoschemi di X di dimensione zero e i fasci localmente liberi di rango 2 su X. Tale relazione è detta ***corrispondenza di Serre***. A questo punto la dimostrazione di (8) procede utilizzando quanto visto finora e la dualità di Serre-Grothendieck:

Teorema 11 (Dualità di Serre-Grothendieck)**.** *Se* $\mathcal{G}$ *è un fascio coerente su* X *allora c'è un isomorfismo naturale* $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}, K_X) \to H^1(X, \mathcal{G})^\vee$.

A conclusione del nostro lavoro illustriamo nel quarto capitolo varie applicazioni nel piano proiettivo. Per prima cosa vogliamo far vedere che un insieme di punti intersezione completa di due curve, considerati nel teorema di Cayley-Bacharach (4),verificano la proprietà di Cayley-Bacharach rispetto a dei particolari fibrati.

Siano quindi X_1 e X_2 due curve, di grado m e n rispettivamente, e sia $Z = X_1 \cap X_2$. Facciamo vedere che Z soddisfa la proprietà C-B rispetto al fibrato $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m+n-3) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m+n) \otimes K_{\mathbb{P}^2}$.

Vogliamo applicare il teorema di Cayley-Bacharach per fibrati (8) a Z, quindi è necessario trovare un fibrato E di rango 2 e una sua sezione globale s tale che $Z = Z(s)$ e $\det E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m+n)$.

A questo punto consideriamo il fibrato $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)$ e la sua sezione $s = (s_1, s_2)$ con s_1 polinomio omogeneo che definisce X_1 e s_2 polinomio omogeneo che definisce X_2. Vediamo che $\det E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m+n)$ e $Z(s) = Z$, in quanto Z è il luogo dei punti dove si annullano entrambi i polinomi. Abbiamo quindi il seguente risultato:

Lemma 12. *Condizione necessaria affinché un sistema di* d *punti Z sia intersezione completa è che esistano due interi* m *e* n *tali che* d=mn *e Z soddisfi la proprietà di Cayley-Bacharach (1) per il fibrato $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m+n-3)$.*

Viene naturale chiedersi se la condizione data è anche sufficiente per dimostrare se un insieme di punti è intersezione completa. La risposta è no e il seguente controesempio lo dimostra:

Esempio 1 (Controesempio)**.** Si consideri un insieme Z costituito da $d = 9$ punti su una conica C irriducibile. Se scegliamo $m = n = 3$ abbiamo che $mn = 9 = d$. Inoltre Z soddisfa la proprietà di Cayley-Bacharach per il fibrato $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3+3-3) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(6) \otimes K_{\mathbb{P}^2}$ perché ogni cubica che contiene 8 di tali punti contiene anche il nono (per il teorema di Bézout essa contiene tutta la conica). D'altra parte Z non è intersezione completa di due cubiche perché due cubiche che si intersecano in quei nove punti contengono, sempre per Bézout, tutta la conica quindi non hanno intersezione completa.

Deduciamo che la condizione di C-B è necessaria ma non sufficiente perché un gruppo di mn punti Z sia intersezione completa.
Al fine di affrontare la questione dell'intersezione completa e trovare un condizione necessaria e sufficiente applichiamo ora il teorema di Hilbert-Burch per trovare la matrice della risoluzione dell'ideale $I = I(Z)$. In particolare calcoliamo i gradi dei polinomi che costituiscono le entrate della matrice in quanto essi costituiscono degli invarianti per Z. Per utilizzare Hilbert-Burch è utile richiamare alcune definizioni e alcuni risultati:

Proposizione 13. *L'ideale omogeneo I di un insieme finito di punti Z di $\mathbb{P}^2$ ha una risoluzione libera di lunghezza 1.*

Definizione 2. *Un risoluzione libera di un $S-$modulo graduato L*

$$0 \to F_n \xrightarrow{\delta_n} \cdots \xrightarrow{\delta_i} F_{i-1} \to \cdots \xrightarrow{\delta_1} F_0 \xrightarrow{\delta_0} L \to 0$$

si dice **minimale** *se* $\mathrm{Im}(\delta_i)$ *è contenuta in* S_+F_{i-1}.

Lemma 14. *Se L è un $S-$modulo finitamente generato e graduato allora la dimensione proiettiva di L è uguale alla lunghezza di una risoluzione libera minimale.*

Possiamo ora applicare Hilbert-Burch per ottenere il seguente risultato:

Corollario 15. *Per ogni insieme finito di punti $Z \subset \mathbb{P}^2$ esiste una matrice M $k+1 \times k$ tale che $I = I(Z)$ sia generato dai minori di ordine k della matrice M.*

Il precedente corollario ha un'importante conseguenza:

Lemma 16. *Sia Z un insieme finito di punti di $\mathbb{P}^2$. Allora Z è intersezione completa se e solo se la matrice M della risoluzione minimale di $I(Z)$ è 2×1.*

Il lemma fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché Z sia intersezione completa. Resta da capire come calcolare la matrice M nel caso in cui non si conosca una risoluzione di $I(Z)$. Denotiamo $I(Z)$ con I e consideriamo una risoluzione libera graduata minimale di S/I ottenuta da una risoluzione minimale di I:

$$0 \to F \to G \to S \to S/I \to 0.$$

La risoluzione ha lunghezza 2 per (13) e per (14), F e G hanno rispettivamente rango t e $t+1$ e dunque M è una matrice $t+1 \times t$. Scriviamo

$$G = \bigoplus_1^{t+1} S(-a_i) \text{ e } F = \bigoplus_1^{t} S(-b_i)$$

dove $S(-a)$ con $a \in \mathbb{Z}$ indica il modulo libero di rango 1 con generatore di grado a. Per il teorema di Hilbert-Burch i gradi dei generatori minimali di I sono gli interi a_i quindi l'entrata (i,j) della matrice M ha grado $b_j - a_i$. Poniamo attenzione ai gradi delle entrate (i,i) e $(i+1,i)$ che sono le entrate delle due diagonali principali. Indichiamo $e_i = b_i - a_i$ e $f_i = b_i - a_{i+1}$ e assumiamo che $a_1 \geq a_2 ... \geq a_{t+1}$ e $b_1 \geq b_2 ... \geq b_t$. Notiamo che a_i, b_i, e_i e f_i sono invarianti di Z perché le risoluzioni minimali sono uniche a meno di isomorfismo. Utilizzando le notazioni appena introdotte abbiamo che:

Proposizione 17. *Sia*

$$\boldsymbol{F} : 0 \to \bigoplus_1^{t} S(-b_i) \xrightarrow{M} \sum_1^{t+1} S(-a_i) \to S$$

una risoluzione libera graduata e minimale di S/I e siano a_i e b_i ordinati come sopra. Allora :

1. $e_i \geq 1$ *e* $f_i \geq 1$*;*

2. $a_i = \sum_{j<i} e_j + \sum_{j \geq i} f_j$

3. $b_i = a_i + e_i$ *e per ogni* $i = 1, ..., t$ *si ha che* $\sum_1^t b_i = \sum_1^{t+1} a_i$

4. $f_i \geq e_i,\ f_i \geq e_{i+1}$.

Abbiamo ora tutti gli strumenti per calcolare in alcuni casi le dimensioni e i gradi della matrice M e quindi capire se Z è intersezione completa. Iniziamo con un esempio in cui vale la C-B ma i punti non sono intersezione completa.

Esempio 2. (Sei punti in posizione generale,*si veda definizione 4*) Consideriamo l'insieme Z costituito da 6 punti in posizione generale. Per definizione abbiamo che i 6 punti non sono allineati e nessuna conica non nulla passa per tutto Z(le coniche contengono al più 5 punti di Z per (ii) di 4). D'altra parte esiste sicuramente una cubica non identicamente zero che contiene Z perché lo spazio di tali curve ha dimensione 10. Abbiamo quindi che $a_{t+1} = 3$. Dal fatto che $a_{t+1} = e_1 + ... + e_t$ segue che possiamo avere tre casi:

- $t = 1$ e $e_1 = 3$, quindi abbiamo che la matrice è 2×1 cioè Z è intersezione completa di una cubica e una conica, ma questo non è possibile perché abbiamo detto che una conica non può contenere tutti i punti di Z;

- $t = 2$ e $e_1 = 1$, $e_2 = 2$ o viceversa, allora Z non è intersezione completa perché la matrice è 3×2;

- $t = 3$ e $e_1 = e_2 = e_3 = 1$ allora la matrice è 4×3 e quindi Z non è intersezione completa.

Osserviamo che la condizione necessaria data dal lemma (12) è verificata. Infatti se $m = 2$ e $n = 3$ abbiamo che C-B è soddisfatta per $m + n - 3 = 2$ in quanto $t_n = 2$ e C-B vale per $t_n + 2 = 4$ e dunque per 2. Nonostante ciò usando il lemma (16) abbiamo visto che Z non è intersezione completa.

Nell'ultima parte del capitolo ci dedichiamo allo studio dei fibrati di rango 2 di cui il teorema di Cayley-Bacharach per fibrati (8) garantisce l'esistenza.

Definizione 3. *Un fibrato E di rango 2 su $\mathbb{P}^2$ si dice* **associato** *a un insieme di punti Z se esiste una sezione $s \in H^0(\mathbb{P}^2, E)$ tale che $Z(s) = Z$. Inoltre dato L fibrato lineare, l'insieme delle classi di equivalenza dei fibrati associati a Z e di determinante L si denota con $\mathbb{E}(L, Z)$.*

Notiamo subito che i fibrati presenti nel teorema di Cayley-Bacharach sono proprio quelli che appartengono a $\mathbb{E}(L,Z)$, in particolare il teorema fornisce una condizione per cui $\mathbb{E}(L,Z)$ sia non vuoto cioè vale la seguente proposizione:

Proposizione 18. *L'insieme $\mathbb{E}(a,Z)$ è diverso dal vuoto se e solo se Z soddisfa la proprietà di Cayley-Bacharach rispetto al fibrato $\mathcal{O}(a)\otimes K_{\mathbb{P}^2}$.*

Come abbiamo visto dal teorema (5) all'inizio del capitolo, per un insieme di punti Z soddisfare C-B per il fibrato $O_{\mathbb{P}^2}(a)\otimes K_{\mathbb{P}^2}=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a-3)$ equivale a dire che Z impone condizioni dipendenti alle curve di grado minore o uguale a $a-3$. Consideriamo ora il massimo di questi interi a cioè introduciamo la seguente notazione:

Notazione 1. *Sia $Z=\{z_1,\cdots,z_n\}$. Denotiamo con a_Z il più grande intero a tale che per ogni i, $1\leq i\leq n$, tutte le curve di grado $a-3$ che contengono $Z\setminus\{z_i\}$ contengono anche z_i.*

Possiamo provare con facilità che:

Corollario 19. *L'insieme $\mathbb{E}(a,Z)$ è non vuoto se e solo se $a\leq a_Z$.*

Inoltre è possibile dare un limite superiore e un limite inferiore per a_Z.

Lemma 20. *Se $n\geq 2$ allora $3\leq a_Z\leq n+1$. Inoltre $a_Z=3$ se e solo se $n-1$ punti sono allineati e $a_Z=n+1$ se e solo se tutti i punti sono allineati.*

Passiamo ora alla coomologia dei fibrati in $\mathbb{E}(a,Z)$.
Sia $E\in\mathbb{E}(a,Z)$ allora consideriamo la successione esatta data da:

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}\xrightarrow{s}E\longrightarrow\mathcal{I}_Z(a)\longrightarrow 0.$$

Da $H^1(\mathbb{P}^2,\mathcal{O}(t))=0$ per ogni $t\in\mathbb{Z}$ e $H^2(\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(t))=0$ per $t\geq -2$, passando alla successione lunga di coomologia, segue che

$$h^0(\mathbb{P}^2,E(t))=h^0(\mathbb{P}^2,\mathcal{O}(t))+h^0(\mathbb{P}^2,\mathcal{I}_Z(a+t))\text{ per ogni }t\in\mathbb{Z},$$

mentre

$$h^1(\mathbb{P}^2, E(t)) = h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(a+t)) \text{ per ogni } t \geq -2.$$

Per calcolare $h^0(\mathbb{P}^2, E(t))$ e $h^1(\mathbb{P}^2, E(t))$ è dunque necessario calcolare $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(a+t))$ e $h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(a+t))$.

Osservazione 6. Sia n il numero di punti di Z allora per qualsiasi intero d vale la seguente disuguaglianza:

$$h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) \geq \max\{0, (\frac{(d+1)(d+2)}{2} - n)\}$$

dove $(\frac{(d+1)(d+2)}{2} - n)$ è la differenza tra la dimensione delle curve di grado d e la cardinalità di Z mentre $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d))$ è la dimensione delle curve di grado d che contengono Z.

Nel caso in cui la (6) sia un'uguaglianza il calcolo di $h^0(\mathbb{P}^2, E(t))$ e $h^1(\mathbb{P}^2, E(t))$ è immediato. Un esempio di punti con questa proprietà è dato dai punti in *posizione generale.*

Indichiamo con t_n il più piccolo intero tale che

$$\frac{(t+1)(t+2)}{2} \geq 2.$$

Definizione 4. *Un insieme di n punti Z si dice in posizione generale quando sono verificate le due condizioni seguenti:*

(i) per ogni intero p, tutte le curve di grado p contengono al più $\frac{(p+1)(p+2)}{2} - 1$ *punti di* Z*;*

(ii) per ogni $z \in Z$ *esiste una curva* C *di grado* t_n *tale che* $C \cap Z = Z \setminus \{z\}$*.*

Osservazione 7. Se i punti sono in posizione generale allora la proprietà di C-B vale per $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(t_n - 1)$ e non per $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(t_n)$ quindi $a_Z = t_n + 2$.
Infatti per (ii) esiste una curva di grado t_n che contiene esattamente $Z \setminus \{p\}$ quindi C-B non vale per $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(t_n)$. D'altra parte ogni curva di grado $t_n - 1$ che contiene $n-1$ punti deve essere identicamente 0 per (i) e quindi contiene tutto Z.

Lemma 21. *Se Z è in posizione generale allora anche ogni sottoinsieme $Z' \subset Z$ è in posizione generale.*

Proposizione 22. *Un insieme Z è in posizione generale se e solo se per ogni d e ogni $Z' \subset Z$ (6) è un' uguaglianza. Ossia i punti in posizione generale impongono condizioni indipendenti a tutte le curve di grado d tali che $\frac{(d+1)(d+2)}{2} > n$.*

Corollario 23. *Sia Z un insieme di n punti in posizione generale. Allora per ogni intero d si ha che $h^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_Z(d)) = \max\{0, n - \frac{(d+1)(d+2)}{2}\}$.*

I risultati illustrati finora ci permettono di provare l'esistenza di insiemi di punti in posizione generale.

Proposizione 24. *Per ogni intero n esiste un insieme Z di n punti in posizione generale.*

Possiamo ora calcolare $h^0(\mathbb{P}^2, E(t))$ e $h^1(\mathbb{P}^2, E(t))$ nel caso di $E \in \mathbb{E}(a, Z)$ con $a \leq a_Y = t_n + 2$ e Z insieme di punti in posizione generale, infatti abbiamo che:

$$h^0(\mathbb{P}^2, E(t)) = h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(t)) + \max\{0, (\frac{(a+t+1)(a+t+2)}{2} - n)\} \text{ per ogni } t \in \mathbb{Z}$$

$$h^1(\mathbb{P}^2, E(t)) = \max\{0, n - \frac{(a+t+1)(a+t+2)}{2}\} \text{ per ogni } t \geq -2.$$

Bibliografia

[1] D.A.Buchsbaum. Lectures on regular local rings. *Category Theory,Homology Theory and their Application (Battelle Institute Conference, Seattle, Wash.(1968))*, I:13–32, 1969.

[2] D.Eisenbud. *Commutative Algebra with a view toward algebraic geometry*. Springer-Verlag, 1995.

[3] D.Eisenbud. *The geometry of Syzygies*, pages 32–47. Springer, 2005.

[4] P.Griffiths e J.Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley Classics Library, 1994.

[5] Q.Ren e J.Richter-Gebert e B.Sturmfels. Cayley-bacharach formulas, arxiv:1405.6438 [math.ag]. 2014.

[6] J.G.Semple e L.Roth. *Introduction to algebraic geometry*, pages 94–100. Clarendon Press, 1949.

[7] D.Einsenbud e M.Green e J.Harris. Cayley-bacharach theorem and conjectures. *Bull. AMS*, 33:295–310, 1996.

[8] C.Okonek e M.Schneider e H.Spindler. *Vector Bundles on Complex Projective Spaces*. Modern Birkhäuser Classics, 1988.

[9] E.Davis e P.Maroscia. Complete intersections in $\mathbb{P}^2$. cayley-bacharach characterization. *Lecture Notes in Mathematics*, 1902:253–269, 1984.

[10] I.R.Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1977.

[11] J.Brun. Les fibrés de rang deux sur $\mathbb{P}^2$ et leurs sections. *Bull. Soc. Math. France*, 107:457–473, 1979.

[12] R. Lazarsfeld. Lectures on linear series. *IAS/Park City Math. Ser., 3, Complex algebraic geometry AMS*, 107:161–219, 1997.

[13] M.Chasles. *Traité des sections coniques.* Gauthier-Villars, Paris, 1885.

[14] R.Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, 1977.

[15] S.MacLane. *Homology*, pages 63–72. Springer, 1995.