

Università degli Studi Roma Tre
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali



Sintesi

**Soluzione numerica
di un modello di riduzione
di gas di scarico in marmitte
catalitiche**

Candidato
Matteo Laurenzi

Relatore
Professor Renato Spigler

Correlatore
Dottor Roberto Natalini

Anno accademico: 2009/2010

Introduzione

In questa Tesi si studia un problema di *gasdinamica* che utilizza dei dati forniti da Magneti Marelli al dott. Roberto Natalini dell'Istituto per le Applicazioni di Calcolo "M.Picone" del CNR, [8]. In particolare si è studiato il comportamento dei *gas di scarico* di un'autovettura attraverso un *marmitta catalitica*. Questo dispositivo è un condotto a sezione variabile, a simmetria cilindrica, caratterizzato da un precatalizzatore, un catalizzatore e due silenziatori. I catalizzatori sono progettati per abbattere la concentrazione di sostanze inquinanti quali il monossido di carbonio (CO), ossidi di azoto (NO_x) e idrocarburi incombusti (HC). All'interno di essi avvengono delle reazioni chimiche, e infatti sono costituiti da un supporto metallico o ceramico poroso avente una struttura a nido d'ape, sulla cui superficie sono depositati materiali catalizzanti quali il platino (Pt), il palladio (Pd) e il rodio (Rh). La struttura a nido d'ape è scelta per massimizzare l'esposizione dei gas ai reagenti posti su di essa.

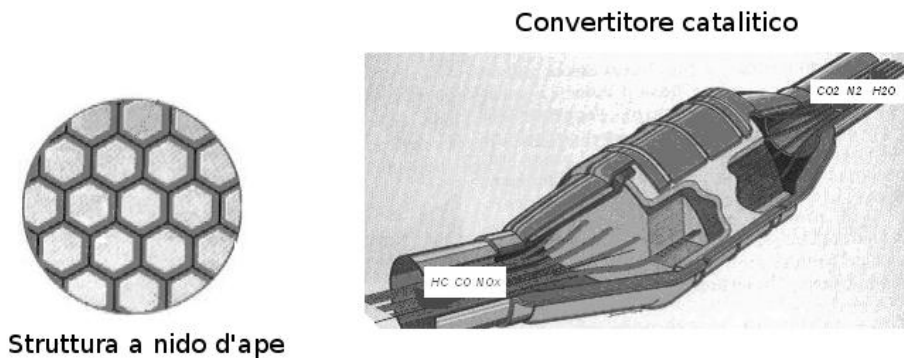


Figura 1: Sezione di un convertitore catalitico e dettaglio del supporto ceramico con struttura a nido d'ape.

I risultati originali di questo lavoro sono stati:

1. La risoluzione numerica del nostro problema con un metodo della famiglia degli schemi AHO sviluppati recentemente da Roberto Natalini in una serie di lavori con Maya Briani e Denise Aregba-Driollet, [1] [4].
2. Studiare il problema al variare della sezione del condotto, cercando cioè delle caratteristiche geometriche per cui si riesca ad abbattere il maggiore inquinante possibile.
3. Costruire uno schema asintotico-numerico per la risoluzione di leggi di bilancio, cioè equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo iperbolico, del primo ordine, alternativo al metodo AHO.

1 Formulazione del problema

Il problema che risolveremo è descritto dalle *equazioni di Eulero* della gasdinamica, più un'equazione che descrive l'evoluzione temporale della concentrazione del gas incombusto. Queste equazioni sono di tipo iperbolico e più precisamente sono *leggi di conservazione* con termine sorgente (*leggi di bilancio*). Si ha

- **Conservazione della massa.** La legge di conservazione della massa nella formulazione euleriana si ottiene uguagliando la variazione della massa contenuta in un dato volume al flusso della stessa attraverso la superficie che racchiude quel volume, in formule

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \oint_S \rho \bar{u} \cdot \hat{n} dS = 0.$$

Applicando il teorema della divergenza, si ottiene nel caso unidimensionale

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0.$$

- **Equazione di conservazione del momento.** La velocità in generale non si conserva, mentre si conserva il momento o quantità di moto. Il prodotto $\rho(\mathbf{x}, t)u(\mathbf{x}, t)$ è la densità di momento. Il flusso del momento

che attraversa una generica sezione consiste di due parti. Un momento trasportato con il fluire del gas, qu , dove $q = \rho u$, quindi il contributo di questo termine sarà dato da $(\rho u)u = \rho u^2$. Oltre a questo c'è una componente microscopica dovuta alla pressione del fluido, quindi il flusso del momento è dato da $\rho u^2 + p$. L'equazione differenziale che descrive la conservazione del momento è quindi

$$\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0.$$

- **Equazione di conservazione dell'energia.** L'energia totale E è spesso decomposta come

$$E = \rho e + \frac{1}{2}\rho u^2. \quad (1)$$

La quantità e indica l'*energia interna* per unità di massa; nelle equazioni di Eulero assumiamo che l'energia interna sia una funzione nota della densità e della pressione,

$$e = e(\rho, p).$$

L'energia totale trasportata con il flusso fornisce un termine macroscopico, Eu , mentre un termine microscopico è legato alla pressione, pu . In assenza di forze esterne, la legge di conservazione dell'energia totale prende la forma

$$\partial_t(E) + \partial_x[(E + p)u] = 0.$$

- **Equazione di chiusura.** Le tre equazioni sopra scritte richiedono un'equazione "di chiusura" in quanto vi compaiono quattro incognite, ρ , u , p ed E . Per ottenere un'equazione di chiusura, utilizziamo la teoria dei gas perfetti per i quali vale la legge

$$p = R\rho T,$$

dove R è la cosiddetta costante dei gas. Per una buona approssimazione, possiamo pensare l'energia interna direttamente proporzionale alla temperatura,

$$e = c_v T,$$

dove c_v è il calore specifico a volume costante. Dalla legge dei gas reali si ha $c_p - c_v = R$ dove c_p è il calore specifico a pressione costante. Ricordando l'esponente adiabatico, dato da

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v},$$

otteniamo

$$R = c_p(\gamma - 1),$$

e quindi

$$e = c_v T = \frac{c_v p}{R \rho} = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}.$$

Sostituendo nella (1) si ottiene infine

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho u^2.$$

Abbiamo così un modello di quattro equazioni in quattro incognite.

Scegliendo come insieme di variabili primitive ρ , u e p invece di ρ , ρu ed E , si ottiene un sistema iperbolico quasilineare più semplice rispetto al primo, da cui si possono ricavare più agevolmente gli autovalori e gli autovettori:

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c, \quad (2)$$

e

$$r_1 = \begin{bmatrix} -\rho/c \\ 1 \\ -\rho c \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r_3 = \begin{bmatrix} \rho/c \\ 1 \\ \rho c \end{bmatrix}, \quad (3)$$

dove con c indichiamo la velocità del suono, $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$.

Da ciò si può dedurre che un problema di Riemann per le equazioni di Eulero avrà sempre una soluzione composta da una discontinuità di contatto al centro e da onde d'urto o onde di rarefazione ai lati di questa, [11].

Il problema però deve essere studiato in un condotto a sezione variabile (la marmitta catalitica). Vediamo dunque come vengono modificate le equazioni per sfruttare il fatto che da tridimensionale il problema si può ridurre a unidimensionale. Considerando il caso tridimensionale, sia Ω un tronco di

cono di altezza h sufficientemente piccola che si possa approssimare con un cilindro. Allora il flusso attraverso la superficie laterale sarà nullo. Sia $\Omega := \{(s, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x < s < x + h, (y, z) \in A(s)\}$ dove $A(s)$ è l'area della sezione del condotto nel punto $x = s$. Essendo il cilindro simmetrico rispetto all'asse x , si può eliminare la dipendenza dalle variabili trasversali y e z . Considerando la conservazione della quantità di moto, dalla

$$\int_{\Omega} \partial_t(\rho u) d\bar{x} = - \int_{\partial\Omega} (\rho u^2 + p) \cdot \hat{n} dS$$

si ha

$$\int_x^{x+h} \int_{A(s)} \partial_t(\rho u) dz dy ds = - \left[\int_{A(s)} (\rho u^2 + p) dy dz \right]_{s=x}^{s=x+h},$$

da cui

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} \int_{A(s)} \partial_t(\rho u) dz dy ds = -\frac{1}{h} [((\rho u^2 + p)A)(x+h) - ((\rho u^2 + p)A)(x)].$$

Passando al limite per $h \rightarrow 0$, si ottiene

$$A(x) \partial_t(\rho u) + \partial_x(A(x)(\rho u^2 + p)) = 0,$$

da cui l'equazione della conservazione della quantità di moto

$$\partial_t(A\rho u) + \partial_x(A(\rho u^2 + p)) = 0.$$

Analogamente si può procedere con le altre equazioni.

Vari effetti fisici dissipativi compongono i termini sorgente del problema:

- **Attrito con le pareti del condotto.** Quando un fluido scorre attraverso un condotto si sviluppano attriti e si genera una forza attrattiva esercitata su ogni unità di superficie. Matematicamente ciò si traduce nell'inserire a secondo membro dell'equazione per la conservazione della quantità di moto il termine

$$-C_f w \rho \frac{u^2}{2}.$$

Il coefficiente d'attrito C_f , che in letteratura è fornito dall'equazione di Darcy-Weisbach, è stato ricavato da una serie di test realizzati da Magneti Marelli [8].

- **Attrito con la struttura a nido d'ape.** La struttura a nido d'ape, che massimizza la superficie di esposizione del gas ai reagenti chimici, comporta una diminuzione della velocità e della pressione, dovuta alla resistenza esercitata sul gas. In termini matematici andrà aggiunto alla sorgente a secondo membro dell'equazione della conservazione della quantità di moto il termine

$$-C\rho u,$$

dove il coefficiente di attrito C viene determinato sperimentalmente [8].

- **Scambio termico per conduzione.** Gli scambi termici tra il gas e l'ambiente esterno possono essere regolati dalla *legge di Newton* secondo cui il trasferimento di calore da una superficie a temperatura T_w a un fluido a temperatura T è regolato dalla quantità

$$-wh(T - T_w), \quad (4)$$

ove il coefficiente h è stato calcolato sperimentalmente [8]. Questo termine andrà aggiunto a secondo membro dell'equazione di conservazione dell'energia in quanto, in base all'esperimento dell'espansione libera eseguito da Joule, l'energia interna di un gas dipende solo dalla sua temperatura.

La quarta equazione che compone il nostro problema è "l'equazione di continuità del gas incombusto". Consideriamo due stati, il gas bruciato e il gas incombusto. Il gas incombusto è trasformato in gas bruciato da una reazione chimica, che è regolata dalla *legge di Arrhenius*,

$$K(T) = K_0 \exp(-E^+/T),$$

dove K_0 è un tasso di reazione costante ed E^+ è l'energia di attivazione.

Per tener conto di queste considerazioni nel nostro modello dobbiamo introdurre la seguente equazione differenziale, che è un'equazione di continuità per il gas incombusto,

$$\partial_t(q_0\rho z) + \partial_x(uq_0\rho z) = -\rho z K(T),$$

dove con $z = z(x, t)$ indichiamo la *frazione totale di gas incombusto*, che è una quantità che varia tra 0 e 1, mentre q_0 è la quantità di calore liberata per unità di massa. Introducendo questa nuova equazione, dobbiamo apportare delle modifiche alla definizione di energia totale, che diventa $E = \rho e + \rho u^2/2 + q_0 \rho z$ [8].

Possiamo quindi formulare il problema da risolvere, come

$$\begin{cases} \partial_t(A\rho) + \partial_x(A\rho u) = 0 \\ \partial_t(A\rho u) + \partial_x(A(\rho u^2 + p)) = -C_f w \rho u^2/2 - C \rho u \\ \partial_t(AE) + \partial_x(Au(E + p)) = -wh(T - T_w) \\ \partial_t(Aq_0\rho z) + \partial_x(Auq_0\rho z) = -q_0\rho z K(T). \end{cases} \quad (5)$$

Questo è un sistema di leggi di bilancio, che può essere riscritto in forma vettoriale, $\partial_t(U) + \partial_x(F(U)) = S(U)$, dove $U(x, t) = [\rho, \rho u, E, q_0\rho z]^T \in \mathbb{R}^4$ e $F(U), S(U) \in \mathbb{R}^4$. Esso si dice *strettamente iperbolico* se la matrice jacobiana $Jac(F(U))$ ha autovalori reali e distinti, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$. Gli autovalori di questo problema sono

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c, \quad \lambda_4 = u,$$

quindi il problema è *semplicemente iperbolico* (si noti l'autovalore di molteplicità 2, $\lambda_2 = \lambda_4 = u$), [5].

2 Lo schema numerico

Lo schema utilizzato per la risoluzione numerica del problema (5) è uno schema AHO (Asymptotic High-Order) sviluppato da Roberto Natalini dell'Istituto per le Applicazioni di Calcolo "M. Picone" del CNR in una serie di lavori con Maya Briani e Denise Aregba-Driollet, [1], [4]. Si tratta di schemi alle differenze finite caratterizzati da una accuratezza elevata in regimi di tempo lunghi.

Definizione 1. Data una famiglia di stati asintotici (per $t \rightarrow \infty$) stabili per un dato problema evolutivo, diciamo che uno schema è AHO (*Asympto-*

tic high-order) se ha un'accuratezza di ordine superiore al primo per quanto riguarda l'errore di troncamento locale, quando viene ristretto ad ogni elemento di questa famiglia.

Consideriamo il generico problema

$$\begin{cases} \partial_t U + \partial_x(F(U)) = S(x, U), & U \in \mathbb{R}^4, (x, t) \in (0, L) \times (0, T) \\ U(x, 0) = U_0(x) & \text{per } x \in [0, L]. \end{cases} \quad (6)$$

Supponiamo che tale problema sia iperbolico, cioè che lo spettro σ della matrice jacobiana sia reale, $\sigma(\text{Jac}(F)) \subseteq \mathbb{R}$. Vogliamo approssimare il problema (6) mediante i seguenti

$$\begin{cases} \partial_t f_k^\epsilon + \lambda_k \partial_x f_k^\epsilon = \frac{1}{\epsilon}(M_k(Pf^\epsilon) - f_k^\epsilon) + a_k S(x, Pf^\epsilon) \\ f_k^\epsilon(x, 0) = M_k(U_0(x)) \end{cases} \quad (7)$$

per $k = 1, \dots, N$, dove

- $\epsilon > 0$,
- $f_k^\epsilon \in \mathbb{R}^4$ per $x \in (0, L)$ e $t \in (0, T) \forall k \in 1, \dots, N$,
- λ_k sono delle velocità che definiremo meglio in seguito,
- P è un operatore definito da $Pf = \sum_k f_k$,
- a_k sono costanti tali che $\sum_k a_k = 1$,
- $M_k : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ sono funzioni continue e C^1 a tratti, $\forall k \in 1, \dots, N$, che chiamiamo Maxwelliane.

Per maggiori approfondimenti si rimanda a [3], [8].

Per mettere in relazione i problemi (6) e (7) supponiamo che siano soddisfatte le seguenti relazioni

$$\begin{cases} \sum_k M_k(U) = U \\ \sum_k \lambda_k M_k(U) = F(U) \end{cases} \quad (8)$$

per ogni U nel dominio e consideriamo i seguenti fatti:

- Sommando su k per $k = 1, \dots, N$ tutti i termini f_k^ϵ dell'equazione (7) e sfruttando la notazione:

$$U^\epsilon := \sum_{k=1}^N f_k^\epsilon, \quad V^\epsilon := \sum_{k=1}^N \lambda_k f_k^\epsilon,$$

otteniamo

$$\partial_t U^\epsilon + \partial_x V^\epsilon = S(x, U^\epsilon). \quad (9)$$

- Moltiplicando l'equazione (7) per λ_k e sommando su k , $k = 1, 2, \dots, N$, otteniamo

$$\epsilon(\partial_t V^\epsilon + \partial_x \sum_k \lambda_k^2 f_k^\epsilon - \sum_k \lambda_k a_k S(x, U^\epsilon)) = (F(U^\epsilon) - V^\epsilon) \quad (10)$$

Da queste si conclude che se f_k^ϵ converge, per $\epsilon \rightarrow 0$, a un limite f_k , $\forall k \in 1, \dots, N$, e allo stesso tempo $\sum_k f_k^\epsilon$ tende a U , allora segue che V^ϵ tende a $F(U)$ dalla (10), mentre dalla (9) risulta che U è la soluzione del problema.

Per questi schemi molto importante è la scelta delle velocità λ_k che sono in parte la causa degli effetti più o meno viscosi che il metodo può sviluppare. Esse servono ad individuare delle *caratteristiche* artificiali che dovranno approssimare quelle reali. In prima istanza abbiamo scelto tre velocità, λ_1 , λ_2 e λ_3 con $\lambda_3 = -\lambda_1 =: \lambda \geq 0$ e $\lambda_2 = 0$, quindi simmetriche rispetto alla velocità nulla. Questa situazione è rappresentata in Figura 2. Si dimostra che sotto l'ipotesi $\Delta t = \frac{\Delta x}{\lambda}$ questo schema non è altro che il metodo di Lax-Friedrichs, che è un metodo del prim'ordine e la sua alta viscosità numerica è responsabile dell'eccessivo “arrotondamento” del profilo delle soluzioni. Per ridurre tale viscosità ed eliminare eventuali oscillazioni abbiamo introdotto i *limitatori di flusso*, che definiremo meglio nel seguito.

Per ridurre la viscosità artificiale abbiamo pensato di scegliere diversamente le velocità. Partendo dall'idea che il problema in oggetto avesse solo velocità positive, abbiamo sviluppato un metodo che utilizzi la scelta $\lambda_3 > \lambda_2 > \lambda_1 \geq 0$, dove $\lambda_2 = \frac{1}{2}(\lambda_3 + \lambda_1)$. La situazione è illustrata in Figura 3. Questa scelta, nella costruzione dello schema, non sfrutta mai la condizione $\lambda_1 \geq 0$, da cui si deduce che può essere usata per ogni caso. Inoltre

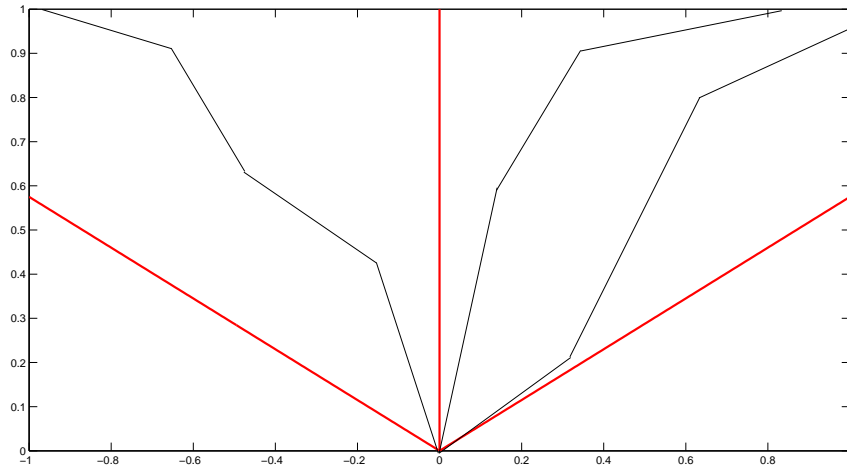


Figura 2: Schema ideale del posizionamento delle caratteristiche.

essa risulta essere la migliore tra tutti gli schemi a velocità simmetriche, in quanto le velocità artificiali risultano essere più vicine a quelle reali rispetto ad altri metodi.

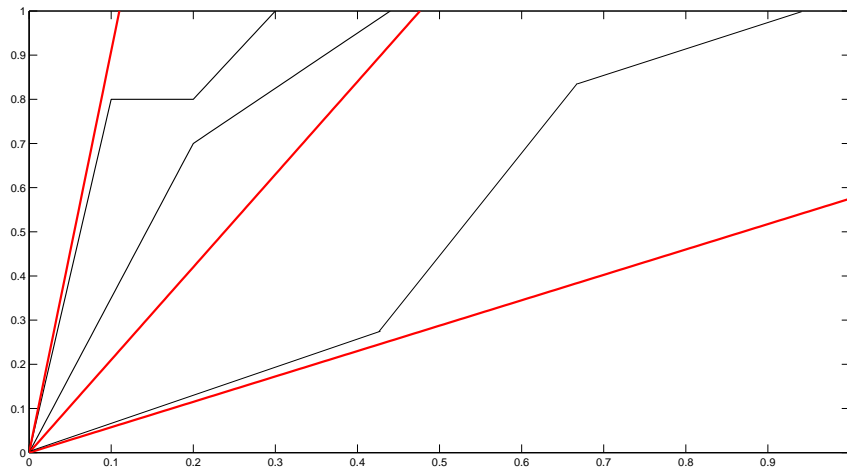


Figura 3: Schema ideale delle caratteristiche di un metodo a tre velocità positive.

Definiamo le funzioni Maxwelliane come

$$M_i := \alpha_i U + \beta_i F(U)$$

per $i = 1, 2, 3$, ove α_i e β_i sono da determinare. Supponiamo che sia

$$M_2 = \alpha_2 U + \beta_2 F(U) = \alpha_2 U.$$

Dovranno poi essere soddisfatte le due uguaglianze

$$\begin{cases} \sum_i M_i(U) = U \\ \sum_i \lambda_i M_i(U) = F(U), \end{cases} \quad (11)$$

Da queste si ricava

$$\begin{aligned} M_1(U) &= \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \left[U(\lambda_3 - \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{2} \alpha_2) - F(U) \right] \\ M_2(U) &= \alpha_2 U \\ M_3(U) &= \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} \left[-U(\lambda_1 + \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{2} \alpha_2) + F(U) \right] \end{aligned}$$

Si ha allora *consistenza* se

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_1} - \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha_2 = \alpha, \quad \alpha_3 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1} - \frac{\alpha}{2}, \\ \beta_1 &= -\frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1}, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Per la condizione di *stabilità* $\sigma(M'_i(U)) \subseteq \mathbb{R}^+$, si richiedono le condizioni

$$\begin{aligned} \lambda_3 - \mu &\geq \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{2} \alpha \geq 0, \\ \alpha_2 &\geq 0, \\ \mu - \lambda_1 &\geq \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{2} \alpha \geq 0, \end{aligned} \quad (13)$$

dove μ è il generico autovalore della matrice jacobiana di $F(U)$. Ponendo

$$\alpha = \frac{2\epsilon}{\lambda_3 - \lambda_1} \quad \text{con} \quad \epsilon > 0$$

e definendo

$$\begin{aligned}\lambda_3 &:= \sup \mu + \epsilon := \bar{\mu} + \epsilon \\ \lambda_1 &:= \inf \mu - \epsilon := \underline{\mu} - \epsilon \\ \lambda_2 &:= \frac{\lambda_3 + \lambda_1}{2} = \frac{\sup \mu + \inf \mu}{2} = \frac{\bar{\mu} + \underline{\mu}}{2}\end{aligned}\tag{14}$$

risulta che le condizioni di stabilità (13) sono soddisfatte. Possiamo ricavare allora le funzioni Maxwelliane,

$$\begin{aligned}M_1(U) &= \frac{1}{\bar{\mu} - \underline{\mu} + 2\epsilon} [U\bar{\mu} - F(U)], \\ M_2(U) &= \frac{2\epsilon}{\bar{\mu} - \underline{\mu} + 2\epsilon} U, \\ M_3(U) &= \frac{1}{\bar{\mu} - \underline{\mu} + 2\epsilon} [-U\underline{\mu} + F(U)].\end{aligned}\tag{15}$$

Una condizione necessaria ma non sufficiente perché si abbia *convergenza* è la condizione CFL (da Courant, Friedrichs e Lewy),

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\lambda},$$

dove $\lambda = \sup_l \{ \sup_x |\theta_l| \} + \epsilon$.

Discretizziamo il dominio $(0, L) \times (0, T)$ in griglie rettangolari $(N \times M)$,

$$\begin{aligned}(0, L) &= \bigcup_{0 \leq i \leq M-1} C_i = \bigcup_{0 \leq i \leq M-1} (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) = \bigcup_{0 \leq i \leq M-1} (i\Delta x, (i+1)\Delta x) \\ (0, T) &= \bigcup_{0 \leq n \leq N-1} (t_n, t_{n+1}) = \bigcup_{0 \leq n \leq N-1} (t_n, t_n + \Delta t_n),\end{aligned}$$

dove Δx e Δt sono rispettivamente il passo spaziale e temporale, mentre con C_i denotiamo l' i -esima cella. Poniamo $M_i^{n,j} := M_i(U^{n,j})$ per $i = 1, 2, 3$, per semplicità di notazione, e definiamo la quantità

$$f_i^{n+1/2,j} := M_i^{n,j} - \lambda_i \frac{\Delta t}{2\Delta x} (M_i^{n,j+1} - M_i^{n,j-1}) + |\lambda_i| \frac{\Delta t}{2\Delta x} (M_i^{n,j+1} - 2M_i^{n,j} + M_i^{n,j-1}).\tag{16}$$

Questo non è altro che uno schema *upwind*, che ha in generale meno viscosità numerica dello schema di Lax-Friedrichs. Vogliamo però ridurre ancora di

più la viscosità ed eliminare eventuali oscillazioni introducendo i limitatori di flusso. L'idea è di utilizzare lo schema introdotto in precedenza, quindi uno schema a tre punti, nelle regioni in cui non ci sono oscillazioni, per passare poi a uno a cinque punti nelle regioni con forti oscillazioni. Questo si può realizzare utilizzando una funzione che rilevi la presenza di oscillazioni e che quindi indirizzi l'algoritmo di risoluzione. Tale idea è stata introdotta per la prima volta da Sweby e Davis [15]. Definiamo, per una generica funzione f ,

$$\Delta_{j+1/2}f := f^{j+1} - f^j,$$

e i quozienti

$$r_+^{j+1/2} := \frac{\Delta_{j-1/2}f}{\Delta_{j+1/2}f}, \quad r_-^{j-1/2} := \frac{\Delta_{j+1/2}f}{\Delta_{j-1/2}f},$$

Introduciamo poi, per $r \in \mathbb{R}$, la funzione di Sweby $\phi(r)$, che vale 0 per $r \leq 0$ ed è tale che

$$0 \leq \phi(r) \leq \min \left(\frac{2r}{|\lambda| \frac{\Delta t}{\Delta x}}, \frac{2}{1 - |\lambda| \frac{\Delta t}{\Delta x}} \right)$$

per $r \geq 0$. Infine definiamo la funzione continua del rapporto tra due gradienti successivi che è detta *limitatore*,

$$\psi_{j+1/2}^i := 1 - \left(1 - |\lambda_i| \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \phi \left(r_{\text{sgn} \lambda_i}^{n,j+1/2} \right),$$

e modifichiamo la (16) come segue

$$\begin{aligned} f_i^{n+1/2,j} = & M_i^{n,j} - \lambda_i \frac{\Delta t}{2\Delta x} (M_i^{n,j+1} - M_i^{n,j-1}) \\ & + |\lambda_i| \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\psi_{j+1/2}^i \Delta_{j+1/2} M_i^n - \psi_{j-1/2}^i \Delta_{j-1/2} M_i^n). \end{aligned} \quad (17)$$

Infine, sommando su $i = 1, 2, 3$ otteniamo la soluzione

$$U^{n+1,j} = \sum_i f_i^{n+1/2,j}.$$

Affinché lo schema sia AHO, è fondamentale l'upwinding del termine sorgente. Ricordiamo che vogliamo approssimare il problema (6) con (7), dove $\sum_k a_k = 1$. Le funzioni (17) sono strettamente legate alle velocità λ_i , e quello

che si fa per il termine sorgente è la media in avanti o all'indietro a seconda del segno delle velocità λ_i . Tali medie inoltre saranno moltiplicate per le costanti a_k in modo tale che sommando le $f_i^{n+1/2,j}$ si ottiene una discretizzazione a tre punti del termine sorgente. Ad esempio se fosse $\lambda_3 > \lambda_2 > \lambda_1 > 0$, sommando sulle i otterremmo la soluzione

$$U_j^n = \sum_i f_i^{n+1/2,j} + \frac{\Delta t}{2}(S_j^n + S_{j-1}^n).$$

3 Uno schema asintotico-numeric

Sulla scia dello schema AHO abbiamo provato a costruire uno schema che utilizzi la soluzione stazionaria e permetta poi di raffinarla per calcolare la soluzioni al variare del tempo. Tale metodo può essere utile in problemi di cui si è principalmente interessati a conoscere la soluzione a tempi molto grandi, tenuto conto che con metodi tradizionali ciò spesso comporta grandi errori o tempi di esecuzione molto lunghi.

Consideriamo il generico problema con dato al bordo

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = s(u, x) & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = h(x) \\ u(x_0, t) = g(x_0, t), \end{cases} \quad (18)$$

e rappresentiamo la soluzione mediante uno sviluppo asintotico in potenze di t^{-1} ,

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^N u_i t^{-i} + o(t^{-N}).$$

Per semplicità, ci limitiamo ai primi quattro termini, cioè al terzo ordine,

$$u(x, t) = u_0(x) + t^{-1}u_1(x) + t^{-2}u_2(x) + t^{-3}u_3(x) + o(t^{-3}),$$

e di conseguenza

$$f(u(x, t)) = f(u_0(x) + t^{-1}u_1(x) + t^{-2}u_2(x) + t^{-3}u_3(x) + o(t^{-3})),$$

da cui, utilizzando la formula di Taylor,

$$\begin{aligned} f(u(x, t)) = & f(u_0(x)) + t^{-1}u_1(x)f'(u_0(x)) \\ & + t^{-2}u_2(x)f'(u_0(x)) + t^{-3}u_3(x)f'(u_0(x)) + o(t^{-3}). \end{aligned} \quad (19)$$

Analogamente, si ottiene per il termine sorgente

$$\begin{aligned} s(u(x, t)) = & s(u_0(x)) + t^{-1}u_1(x)s'(u_0(x)) \\ & + t^{-2}u_2(x)s'(u_0(x)) + t^{-3}u_3(x)s'(u_0(x)) + o(t^{-3}). \end{aligned} \quad (20)$$

Inoltre si ha

$$u_t(x, t) = -t^{-2}u_1(x) - 2t^{-3}u_2(x) - 3t^{-4}u_3(x) + o(t^{-4}).$$

Sostituendo nell'equazione di partenza e raccogliendo secondo le potenze di t^{-n} , per $n = 0, \dots, 3$, il problema si potrà riscrivere come un sistema di quattro equazioni differenziali ordinarie del primo ordine,

$$\begin{cases} (f(u_0(x)))_x = s(u_0(x)) \\ (u_1(x)f'(u_0(x)))_x = u_1(x)s'(u_0(x)) \\ -u_1(x) + (u_2(x)f'(u_0(x)))_x = u_2(x)s'(u_0(x)) \\ -2u_2(x) + (u_3(x)f'(u_0(x)))_x = u_3(x)s'(u_0(x)). \end{cases} \quad (21)$$

Supponiamo ora che il dato al contorno sia anch'esso rappresentabile con lo sviluppo asintotico

$$g(x_0, t) = a_0 + t^{-1}a_1 + t^{-2}a_2 + t^{-3}a_3 + o(t^{-3}),$$

otteniamo i seguenti quattro problemi:

$$\begin{cases} (f(u_0(x)))_x = s(u_0(x)) \\ u_0(x_0) = a_0. \\ \\ \begin{cases} (u_j(x))_x = \frac{1}{f'(u_0(x))} \phi_j(u_j(x), u_{j-1}(x), \dots, u_0(x)) \\ u_j(x_0) = a_j, \quad \text{per } j = 1, 2, 3. \end{cases} \end{cases}$$

Data un'equazione iperbolica e un dato al bordo, in generale non possiamo dire che la soluzione stazionaria corrispondente sia unica. Nel nostro schema,

il dato iniziale non può essere utilizzato. Considereremo soltanto problemi per cui il problema stazionario ha una soluzione unica.

Molto importante è anche il fatto che questo metodo può funzionare solo nel caso di problemi dissipativi altrimenti non si avrebbe una soluzione stazionaria.

3.1 Test numerici

Mediante una serie di test numerici condotti su di un'equazione di tipo Burgers non omogenea, cioè con sorgente, abbiamo cercato di confermare la validità del metodo. Qui di seguito ne riportiamo alcuni. Per la risoluzione dei singoli problemi per le equazioni ordinarie abbiamo usato un metodo esplicito Runge-Kutta del quarto ordine. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left[\frac{1}{2} u^2 \right] = -u^2, & (x, t) \in [0, 5] \times [0, \infty) \\ u(0, t) = g(t) = 1 + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t^2+1} + \frac{1+t}{t^4+1}. \end{cases} \quad (22)$$

Dalle Figure 4 e 5 si può notare come fino al tempo $t = 10$ la soluzione non si raccordi completamente con quella data dal metodo di Godunov, dopo di che sostanzialmente coincidono. Abbiamo osservato inoltre che a partire da $T = 50$ la soluzione praticamente non cambia per tempi relativamente brevi, mentre considerando tempi ancora maggiori (ad esempio $T = 500$, come si può osservare dalla Figure 6), l'errore massimo si è ridotto a circa 10^{-4} .

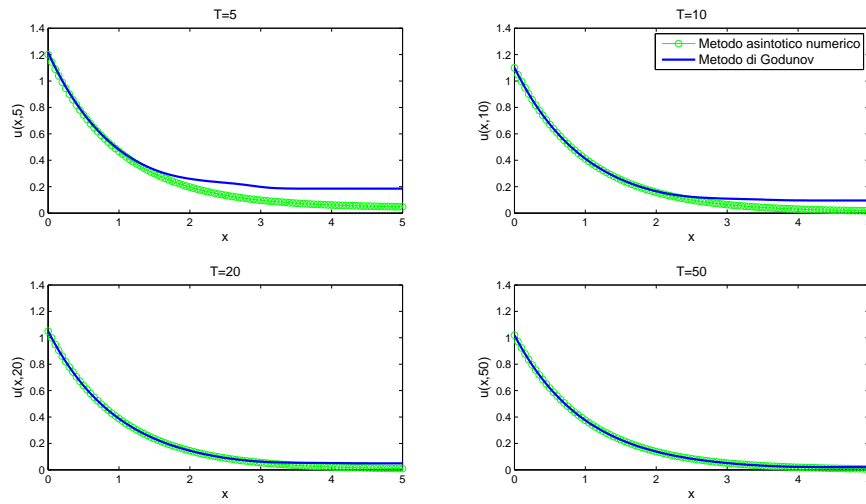


Figura 4: Soluzione al variare del tempo di un problema per l'equazione di Burgers con sorgente $-u^2$.

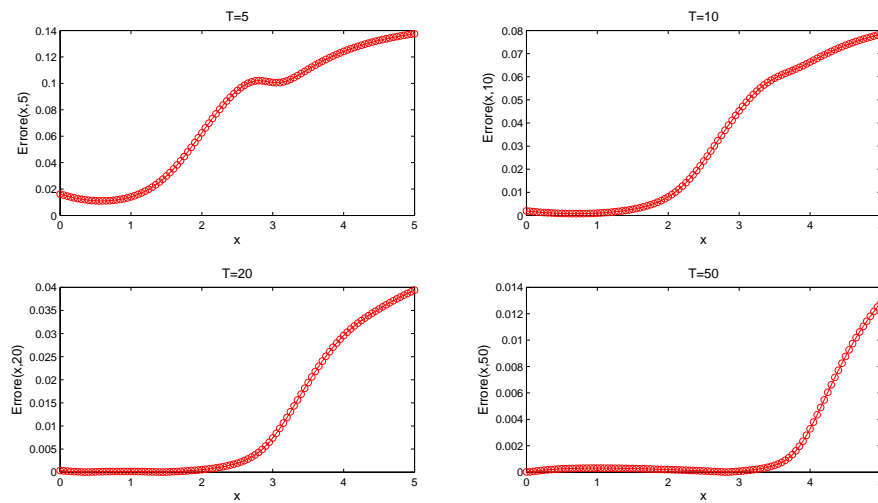


Figura 5: Errori al variare del tempo tra le soluzioni di un problema per l'equazione di Burgers con sorgente $-u^2$.

Se invece si prende una sorgente del tipo $-u^4$, dalle Figure 7 e 8 si osserva che il metodo AHO converge più rapidamente alla soluzione rispetto al caso precedente. Del resto da una non linearità più forte del termine sorgente ci

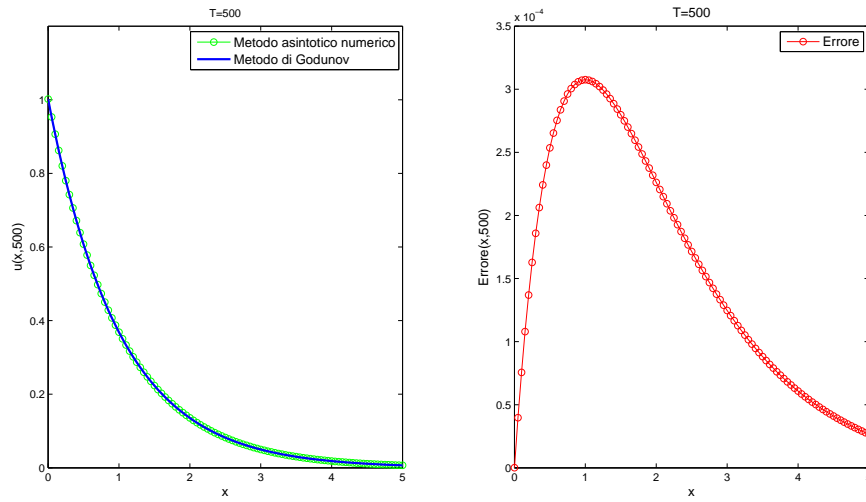


Figura 6: Confronto tra le soluzioni date dal due metodo asintotico numerico e da quello di Godunov al tempo $T = 500$ a sinistra; e grafico dell'errore a destra.

si aspetta una convergenza più rapida allo stato stazionario.

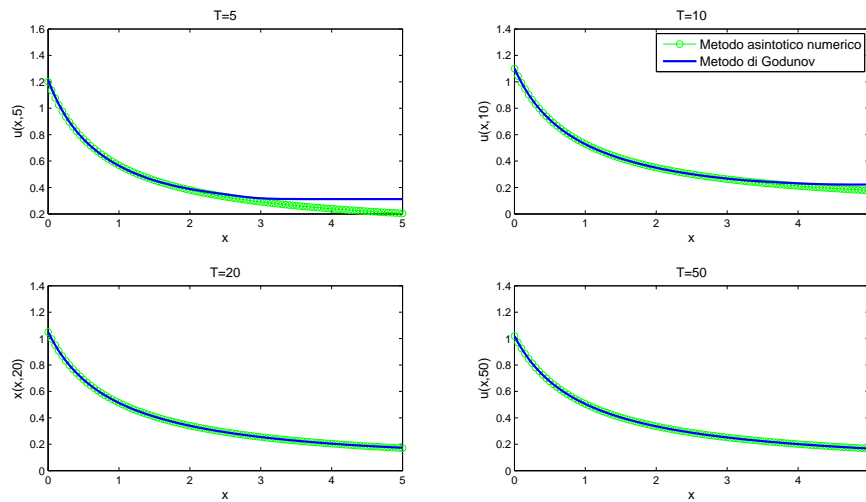


Figura 7: Soluzione in vari istanti, date dal metodo asintotico-numerico e il metodo AHO, di un problema con l'equazione di Burgers con sorgente $-u^4$.

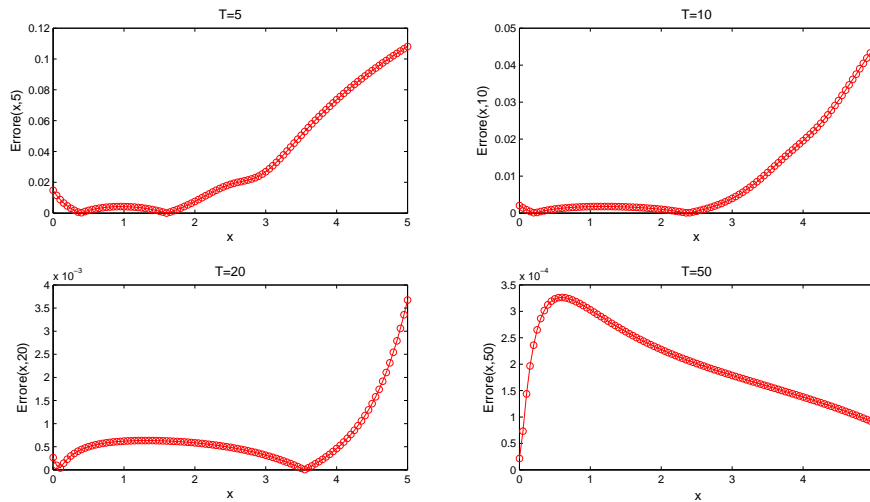


Figura 8: Errori in vari istanti tra le soluzioni, date dal metodo asintotico-numerico e il metodo AHO, di un problema con l'equazione di Burgers con sorgente $-u(x, t)^4$.

Risolvendo il problema

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = -u^2 + u \\ u(x, 0) = 1 \\ u(0, t) = 1 + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1+t^2} + \frac{1+t}{1+t^4} \end{cases} \quad (23)$$

abbiamo voluto mostrare come cambia la soluzione ottenuta con il metodo asintotico-numerico aggiungendo termini correttivi. La Figura 9 mostra la soluzione al tempo $t = 10$. Come si vede, le correzioni fanno convergere la soluzione a quella data dal metodo AHO. Già prendendo un'approssimazione del terzo ordine in t^{-1} si ottiene una soluzione quasi coincidente con quella ottenuta con lo schema AHO2. Prendendo un numero sufficiente di termini correttivi si può far coincidere praticamente il risultato con quello dato dal metodo AHO.

Se invece si prende una sorgente del tipo $\sin(u)$ si vede (Figura 10) che al crescere del numero di termini correttivi si ottiene una convergenza alla soluzione ottenuta col metodo AHO2 già per $t = 5$, in particolare l'aggiunta

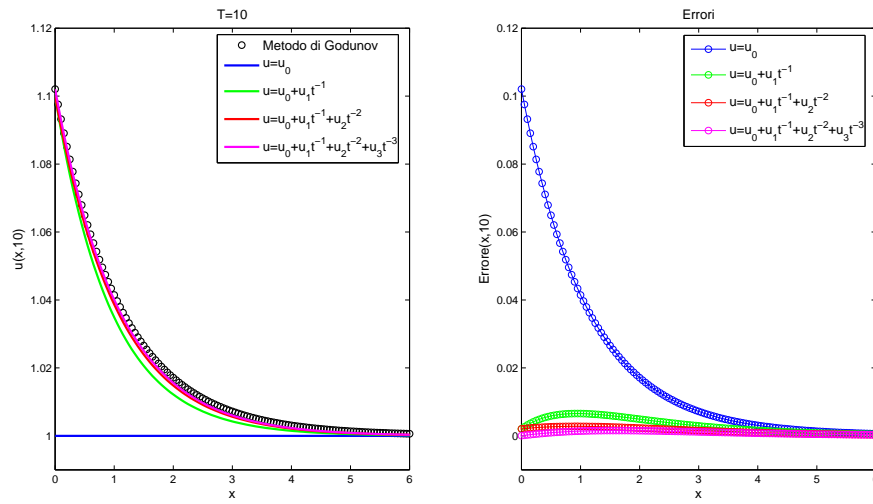


Figura 9: Soluzione ed errori al variare del numero di termini correttivi, per $t = 10$.

di termini correttivi fa in modo che la curva “si inarchi” via via sempre di più, in quanto in $x = 0$ e per valori maggiori di $x = 6$ le due soluzioni già coincidono.

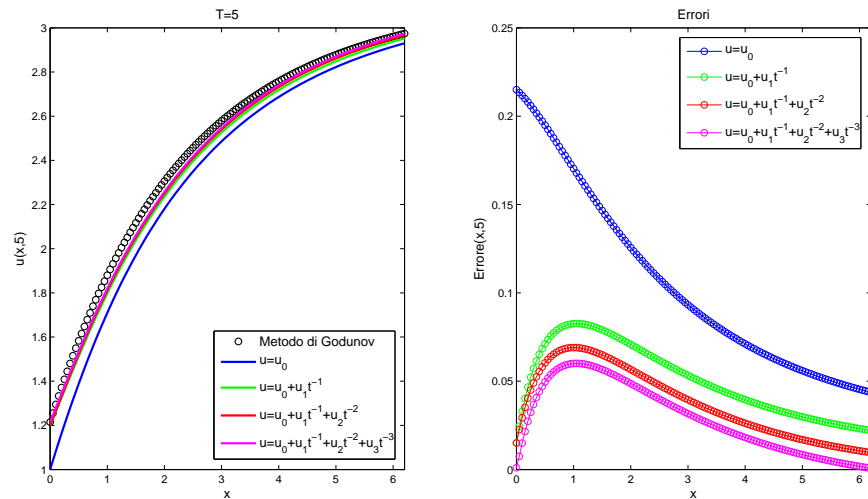


Figura 10: Soluzione ed errori al variare del numero di termini correttivi, per $t = 4$.

3.2 Conclusioni e prospettive future

Il nostro metodo risolve, invece del problema evolutivo originario, un insieme di equazioni differenziali ordinarie. Le soluzioni di tali problemi permettono poi di costruire un'approssimazione di $u(x, t)$ per t sufficientemente grande. Non si osserva quindi un'amplificazione degli errori al crescere del tempo, come si verifica con metodi "marching" nel tempo. Altro fatto importante è che per $t \rightarrow \infty$ il metodo converge alla soluzione stazionaria esatta, e dunque al crescere del tempo l'approssimazione della soluzione non può che migliorare.

4 Risultati al variare della geometria del condotto

Uno degli scopi principali di questa Tesi era di capire se si potesse ottimizzare la riduzione dei gas nocivi per l'ambiente agendo sulle caratteristiche geometriche del condotto. Inizialmente ci siamo limitati a modificare solo i raccordi tra i diversi dispositivi, dopo di che abbiamo provato anche a modificare l'intero profilo del condotto. Abbiamo utilizzato i seguenti dati iniziali e al contorno per il problema (5)

$$\left\{ \begin{array}{lll} \rho(x, 0) = 1.21; & \rho(0, t) = 1; & x \in (0, L] \quad t \in [0, \infty) \\ u(x, 0) = 413.22; & u(0, t) = 600; & x \in (0, L] \quad t \in [0, \infty) \\ T(x, 0) = 295; & T(0, t) = 800; & x \in (0, L] \quad t \in [0, \infty) \\ p(x, 0) = 1.0247 \times 10^5; & p(0, t) = 2.2966 \times 10^5; & x \in (0, L] \quad t \in [0, \infty) \\ z(x, 0) = 0; & z(0, t) = 1 & x \in (0, L] \quad t \in [0, \infty) \end{array} \right. \quad (24)$$

Il condotto proposto da Magneti Marelli aveva le varie componenti raccordate da profili rettilinei, e la frazione totale di gas incombusto alla fine della marmitta ($x = L$) al tempo $t = 1$, è risultata essere $z(L, 1) = 7.006$. Ecco alcuni risultati ottenuti al variare dei raccordi, lasciando invariate le caratteristiche principali del condotto proposto da Magneti Marelli.

- **Componenti raccordati mediante un arco di parabola.** In base al tipo di parabola, se concava o convessa si sono ottenuti risultati differenti, nel primo caso la frazione totale di gas incombusto è diminuita, $z(L, 1) = 0.68$, verosimilmente a causa dell'aumento del volume dei catalizzatori. Nel secondo caso è aumentata, $z(L, 1) = 0.7097$ a causa della diminuzione di volume.
- **Componenti raccordati mediante due archi di parabola.** Il volume resta uguale al caso con i raccordi rettilinei, ma si osserva comunque un lieve miglioramento, infatti $z(L, 1) = 0.6918$.
- **Componenti raccordati mediante un arco di cubica.** Le condizioni che si richiedono per questo raccordo è che la cubica abbia derivata nulla nei punti di raccordo. Il volume anche in questo caso resta uguale ma, la frazione totale di gas incombusto all'uscita del condotto, diminuisce ulteriormente, $z(L, 1) = 0.69$.

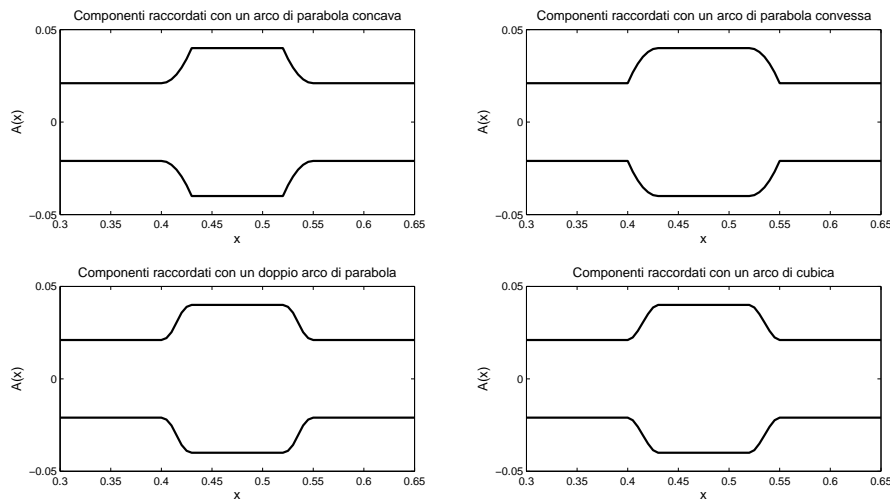


Figura 11: Sezione del catalizzatore al variare del raccordo tra le componenti.

- **Catalizzatori sinusoidali raccordati mediante un arco di parabola.** Un andamento non troppo regolare del condotto può creare delle

micro turbolenze all'interno di esso, quindi l'idea è dare ai catalizzatori un profilo sinusoidale in modo da ottenere una maggiore esposizione dei gas di scarico alle sostanze reagenti. In Figura 12 si ha una possibile rappresentazione di un tale catalizzatore.

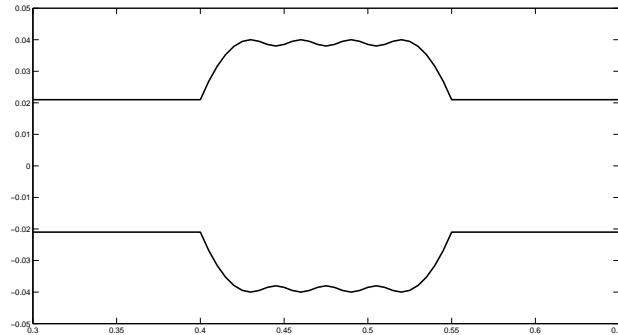


Figura 12: Sezione del precatalizzatore con profilo sinusoidale raccordato con un'arco di parabola.

In questo caso il volume aumenta, avendo utilizzato un raccordo con una parabola concava, questo volume è uguale a quello sviluppato nel caso del raccordo con la stessa parabola, ma il risultato è decisamente migliore, infatti $z(L, 1) = 0.667$.

- **Profilo sinusoidale.** Sulla scia dei risultati ottenuti nel precedente paragrafo si è pensato di considerare un profilo sinusoidale su tutto il tratto dei catalizzatori, in modo da rallentare la velocità del gas e far quindi in modo che lo si esponga alle reazioni chimiche nei catalizzatori per un tempo più lungo (Figura 13). In questo caso abbiamo utilizzato come profilo di raccordo tra le varie componenti una cubica, quindi rispetto al caso precedente il volume dei catalizzatori è diminuito, ma tuttavia si è ottenuto un risultato migliore, $z(L, 1) = 0.655$.

Abbiamo poi provato a cambiare completamente il profilo del condotto aumentando la lunghezza del catalizzatore e usando funzioni sinusoidali. I

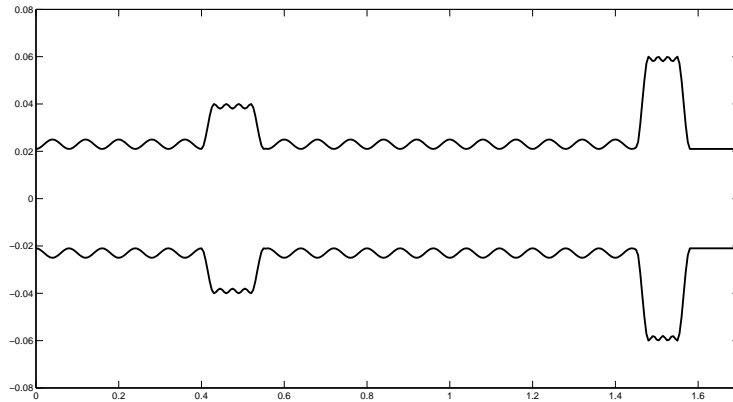


Figura 13: Sezione del condotto nel tratto dei catalizzatori con profilo sinusoidale.

risultati ottenuti sono molto buoni, ma si registrano delle temperature troppo alte durante il processo.

Vediamo ora quali fattori geometrici migliorano o peggiorano le prestazioni e perché. Usando un solo catalizzatore abbiamo provato a fissare il raggio e a variare la lunghezza del dispositivo oppure a fissarne la lunghezza variando il raggio.

Prendiamo in esame il precatalizzatore. Fissato il raggio $r_1 = 0.04m$, al variare della lunghezza L si ottengono i risultati riportati nella Tabella 1. I valori della frazione totale di gas incombusto sono presi all'uscita del condotto ($x = L$) mentre quelli della temperatura sono i valori massimi che essa ammette per ogni lunghezza. In Figura 14 sono riportati i grafici della frazione totale di gas incombusto e delle temperature.

Come ci aspettavamo più è grande la lunghezza, più aumenta il tempo di esposizione del gas nel catalizzatore, e più diminuisce la frazione totale di gas incombusto e aumenta la temperatura.

Le stesse osservazioni si possono fare per il catalizzatore, fissando il suo raggio al valore $r_2 = 0.06m$, e facendone variare la lunghezza (Tabella 2 e Figura 15).

Lunghezza (m)	Gas incombusto	Temperatura ($^{\circ}C$)	Volume (m^3)
0.05	0.8506	921.0	0.00043
0.06	0.8346	929.1	0.00048
0.09	0.7883	951.8	0.00063
0.10	0.7736	959.0	0.00068
0.11	0.7591	966.0	0.00073

Tabella 1: Risultati per la frazione totale di gas incombusto, la temperatura massima e il volume, ottenuti variando la lunghezza, e tenendo fisso il raggio del precatalizzatore al valore $r_1 = 0.04m$.

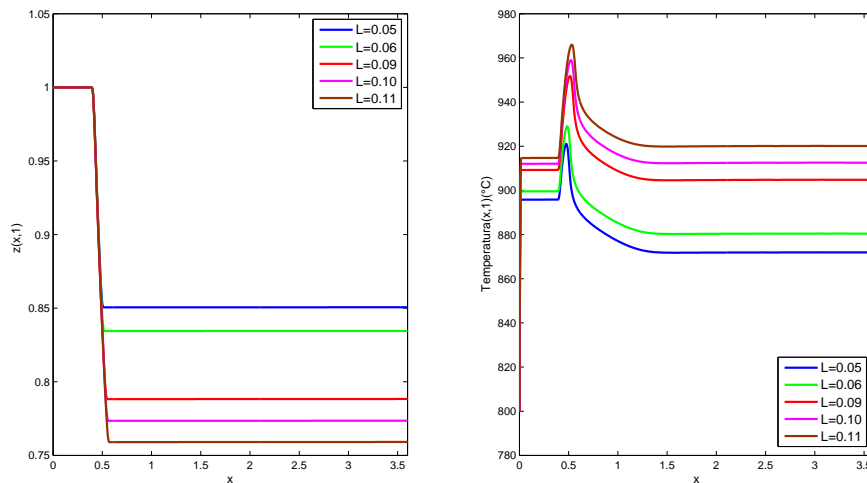


Figura 14: Frazione totale di gas incombusto (a sinistra) e temperatura (a destra) nel condotto al variare della lunghezza del precatalizzatore.

Fissando la lunghezza del precatalizzatore al valore $L = 0.09m$ e facendone variare il raggio, si ottengono i risultati di Tabella 3 e Figura 16.

Osservazione 1. Un aumento di un'unità di raggio r di un cilindro è più significativo, in termini di volume V , di un aumento di lunghezza h dello stesso, essendo

$$V = \pi r^2 h.$$

Lunghezza (m)	Gas incombusto	Temperatura ($^{\circ}C$)	Volume (m^3)
0.05	0.8946	896.7	0.00090
0.06	0.8833	902.5	0.00101
0.07	0.8721	908.1	0.00112
0.08	0.8611	913.6	0.00068
0.09	0.8502	919.0	0.00124

Tabella 2: Risultati per la frazione totale di gas incombusto, la temperatura e il volume variando la lunghezza e tenendo fisso il raggio del catalizzatore al valore $r_2 = 0.06m$.

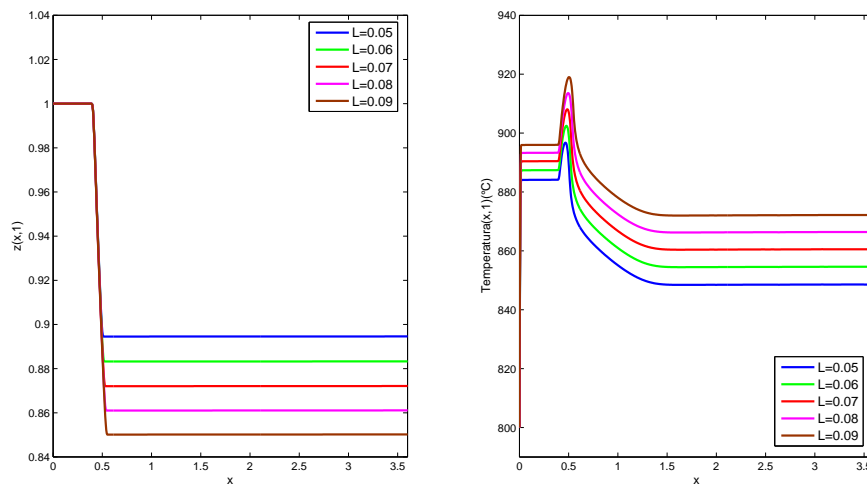


Figura 15: Frazione totale di gas incombusto (a sinistra) e temperatura (a destra) nel condotto al variare della lunghezza del catalizzatore.

Per il catalizzatore invece fissiamo la lunghezza $L = 0.07m$ e facciamone variare il raggio. In Tabella 4 sono riportati i risultati per la frazione totale di gas incombusto, la temperatura massima e il volume ottenuti al variare del raggio, mentre in Figura 17 sono riportati i grafici della frazione totale di gas incombusto e delle temperature.

Raggio (m)	Gas incombusto	Temperatura ($^{\circ}C$)	Volume (m^3)
0.021	0.6516	1023	0.00021
0.040	0.7883	951.8	0.00063
0.060	0.8502	919.0	0.00135
0.080	0.8842	900.9	0.00234
0.100	0.9056	889.4	0.00362

Tabella 3: Risultati per la frazione totale di gas incombusto, la temperatura e il volume al variare del raggio, tenendo fissa la lunghezza.

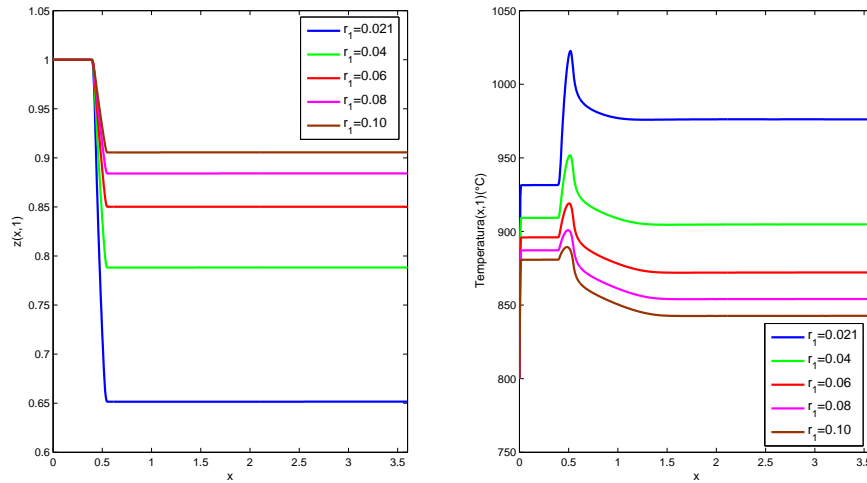


Figura 16: Frazione totale di gas incombusto (a sinistra) e temperatura (a destra) nel condotto al variare del raggio del precatalizzatore.

Mettendo a confronto le Tabelle 1 e 3 si osserva che un volume maggiore non porta necessariamente a risultati migliori. Infatti ad esempio il primo risultato per il gas incombusto della Tabella 1 è circa uguale al terzo risultato della Tabella 3 che però corrisponde ad un volume più grande. Se consideriamo le aree di due sezioni $A_1 > A_2$, dall'equazione di continuità applicata alla fluidodinamica, si ha che la portata entrante nella prima sezione deve essere uguale a quella entrante nella seconda sezione. Da ciò, segue che, dato

Raggio (m)	Gas incombusto	Temperatura ($^{\circ}C$)	Volume (m^3)
0.021	0.6988	1000	0.00018
0.040	0.8188	936.8	0.00053
0.060	0.8721	908.1	0.00112
0.080	0.9011	892.3	0.00194
0.100	0.9191	882.4	0.00299

Tabella 4: Risultati della frazione totale di gas incombusto, della temperatura e del volume variando il raggio e tenendo fissa la lunghezza del catalizzatore.

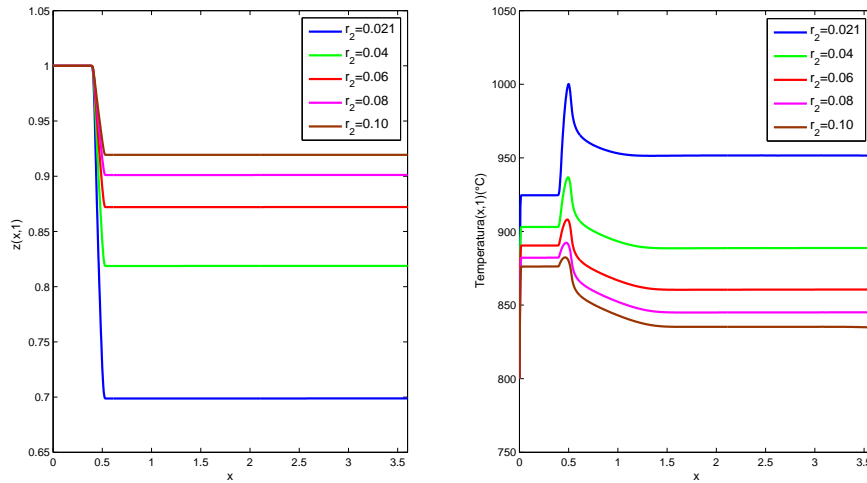


Figura 17: Frazione totale di gas incombusto (a sinistra) e temperature (a destra) nel condotto al variare del raggio del catalizzatore.

che la portata è il prodotto della velocità del fluido per la sezione in cui passa, ci sarà un aumento di velocità nella seconda sezione rispetto alla prima. Modificando opportunamente l'*equazione di Bernoulli*, si ottiene la relazione

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{costante}.$$

Quindi nei due catalizzatori si sviluppano pressioni diverse e quindi differenti temperature, essendo le due grandezze fisiche, nel caso dei gas, legate dalla

relazione

$$p = R\rho T.$$

Sappiamo che la reazione chimica nel catalizzatore è descritta dalla *legge di Arrhenius*

$$K(T) = K_0 \exp(-E^+/T),$$

quindi se la temperatura è molto bassa la reazione diventa trascurabile e viene meno il termine sorgente nella quarta equazione. Nel caso dei due catalizzatori che hanno volumi diversi ma risultati uguali accade proprio questo, infatti il catalizzatore con raggio maggiore ha bisogno per ottenere lo stesso risultato di quello con raggio minore, cioè per ottenere le stesse prestazioni, di una maggiore esposizione del gas al reagente e quindi di una maggiore lunghezza.

Saremmo quindi portati a scegliere un catalizzatore con un piccolo raggio e con una lunghezza sufficiente da abbattere totalmente l'inquinante. Il problema è che dispositivi di questo tipo creano temperature molto elevate. Magneti Marelli ha fornito delle misure di temperatura in alcuni punti del condotto e tali valori, considerando una temperatura del motore pari a $800^\circ C$, non superano mai i $1000^\circ C$ circa. Sulla base di queste considerazioni si evince che il migliore è proprio il precatalizzatore scelto da Magneti Marelli cioè quello con raggio $r_1 = 0.04m$ e lunghezza $L = 0.09m$. Un ragionamento analogo si può fare per il catalizzatore, dove il risultato migliore ottenuto è dato dal catalizzatore di lunghezza $L = 0.07m$ e raggio $r_2 = 0.04m$. Mettendo insieme questi due dispositivi si ottiene una frazione di gas incombusto all'uscita del condotto pari a 0.6859, mentre per il condotto di Magneti Marelli si aveva 0.7075. In Figura 18 i due risultati sono stati messi a confronto.

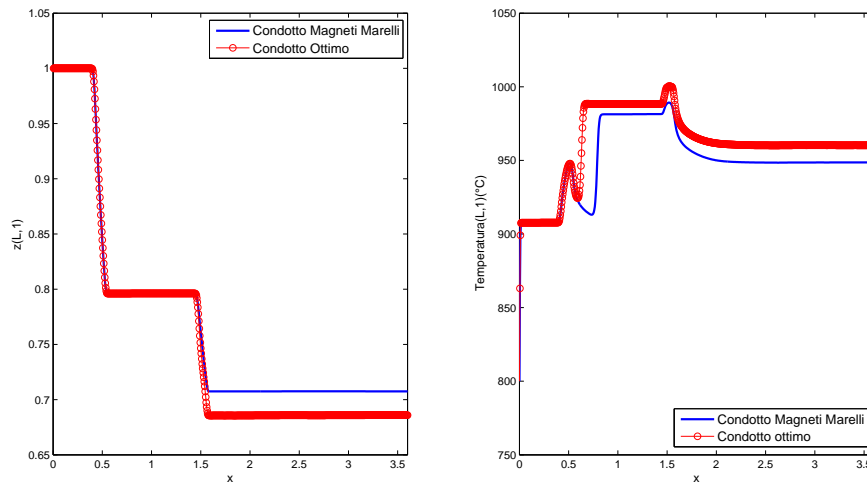


Figura 18: Confronto tra i grafici della frazione totale di gas incombusto (a sinistra) e i grafici delle temperature (a destra).

5 Approccio perturbativo

Inizialmente in questa Tesi si era scelto di risolvere il problema mediante un approccio perturbativo, cercando così di ovviare alle difficoltà portate dai termini sorgente. L'idea era di supporre che la soluzione si potesse rappresentare con uno sviluppo asintotico del tipo

$$u(x, t) = u^\epsilon(x, t) = u_0(u, t) + \epsilon u_1(x, t) + \epsilon^2 u_2(x, t) + o(\epsilon^2),$$

Il problema quindi si può riscrivere come

$$u_t^\epsilon + (f(u^\epsilon))_x = \epsilon s(u^\epsilon, x). \quad (25)$$

Con perturbazione sulla sorgente

$$s(u, t) = \epsilon s^\epsilon(u, t) \quad \text{con } 0 < \epsilon \ll 1.$$

Da questa si ottengono tre problemi più semplici da risolvere rispetto a quello di partenza, uno non lineare omogeneo e gli altri lineari ma non omogenei. Il problema riscontrato per cui abbiamo deciso di abbandonare tale strada è

dovuto al fatto che si era pensato di risolvere i vari problemi con il metodo di Godunov, che però nel caso di un sistema non lineare non sempre si riesce a trovare un risolutore di Riemann, in particolare non è facile trovare una linearizzazione efficace come quella di Roe. Quello che si è provato a fare è stata una semplice media tra i valori del problema di Riemann locale che però portava a autovalori immaginari e quindi soluzioni immaginarie, in disaccordo con l'iperbolicità del problema, [11].

Riferimenti bibliografici

- [1] Aregba-Driollet D., Briani M., and Natalini R., *Asymptotic High-Order schemes for 2×2 dissipative hyperbolic systems*, SIAM J. Numer. Anal., **46**, No. 2, (2008), 869-894.
- [2] Aregba-Driollet D., and Milišić V., *Kinetic approximation of a boundary value problem for conservation laws*, Numer. Math. **97**, (2004), 595-633.
- [3] Aregba-Driollet D., and Natalini R., *Discrete Kinetic schemes for multidimensional conservation laws*, SIAM J. Numer. Anal. **37**, (2000), 1973-2004.
- [4] Briani M., Natalini R., *Asymptotic High-Order schemes for integro-differential problems arising in markets with jump* SIAM J. Numer. **37**, No. 6, pp. 1973-2004, (2000).
- [5] Chen G.Q., and Wagner D., *Global entropy solutions to exothermically reacting, compressible Euler equations*, (2002).
- [6] Friedman A. and Littman W., *Industrial mathematics: a course in solving real-world problems*, SIAM Philadelphia, 1994.
- [7] Helzel C., Leveque R.J. and Warnecke, G., *A modified fractional step method for the accurate approximation of detonation waves*, SIAM J. Sci. Comput. **22**, (2000), 1489-1510.
- [8] Lacoste L., *Mathematical modeling of chemical processes in exhaust pipe*, Tesi di Dottorato, (2004/2005) [supervisor: R. Natalini].
- [9] Lax P. D., *Hyperbolic system of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*, Conference board of mathematical science regional conference series in applied mathematics **11**, Society for industrial and applied mathematics, Philadelphia, 1973.
- [10] LeVeque R. J., *Numerical methods for conservation laws*, Birkhäuser, Basel Boston Berlin, 1992.

-
- [11] LeVeque R. J., *Finite volume methods for hyperbolic problems*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge 2002.
- [12] Natalini R., and Terracina A., *Convergence of a relaxation approximation to a boundary value problem for conservation laws*, Comm. Partial Differential Equations, **26** (7-8), (2001), 1235-1252.
- [13] Natalini R., *Introduzione ai metodi numerici alle differenze finite per equazioni di evoluzione*, Dispense per il corso di Dottorato “Metodi numerici per problemi di evoluzione”, Università di Roma “La Sapienza”, (2003/2004).
- [14] Roe P.L., *Upwind differencing schemes for hyperbolic conservation laws with source term*, Nonlinear Hyperbolic Problems, C.Carasso, P.A.Raviart and D.Serre editors, Lecture Notes in Math., 1270:41-51, (1987).
- [15] Sweby P.K., *High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic equations*, SIAM J. Numer. Anal. **21**, (1984), 995-1011.
- [16] Tannehill J. C., Anderson D. A., Pletcher R. H., *Computational fluid mechanics and heat transfer*, Series in computational and physical processes in mechanics and thermal sciences, Taylor and Francis, 1997.