UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Dipartimento di Matematica e Fisica
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Fattorizzazione unica nei domini di Krull

Candidato

Francesca Libertini

Relatore

Prof.ssa Stefania Gabelli

Anno Accademico 2013/2014

Classificazione MSC2010: 13F05; 13F15; 13C20.
Parole chiave: Domini di Krull, Gruppo delle classi, Domini localmente fattoriali.

Sintesi

Lo studio della fattorizzazione unica è uno dei problemi che portò allo sviluppo dell'algebra moderna ed in particolare alla nascita del concetto di ideale. Nel 1847 Lamè presentò una dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat; tale dimostrazione utilizzava il fatto errato che tutti gli anelli di interi ciclotomici fossero dei domini a fattorizzazione unica. Kummer, nel tentativo di restaurare una sorta di fattorizzazione unica in questi anelli e dimostrare in alcuni casi l'ultimo teorema di Fermat, introdusse dei particolari numeri che chiamò *numeri ideali*, da cui poi scaturì, grazie al successivo lavoro di Dedekind, il moderno concetto di ideale di un anello. Kummer lavorò su di un caso particolare dell'oggetto che noi ora chiamiamo *gruppo delle classi dei divisori*; tale gruppo fu successivamente studiato da Krull, che ne dimostrò delle proprietà generali. Con l'introduzione di questi concetti lo studio dei problemi della fattorizzazione unica di un dominio si focalizza sullo studio degli ideali del dominio; in questa tesi affrontiamo questo discorso nel caso dei domini di Krull, di cui gli anelli degli interi ciclotomici su cui lavorò originariamente Kummer sono un caso particolare.

Lo studio del gruppo delle classi dei divisori viene affrontato in questa tesi partendo dal punto di vista più generale delle *star operazioni*, che sono delle operazioni definite sugli ideali frazionari di un dominio, che chiamiamo semplicemente *ideali*. Tali operazioni furono introdotte da Krull nel primo articolo della serie *Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche* del 1936, con la notazione \-*operazioni*; il nome *star operazione* si deve a Gilmer. Tra queste operazioni riveste un ruolo di particolare importanza la *v-operazione*; gli ideali chiusi rispetto a tale operazioni sono detti *v-ideali* o *ideali divisoriali*. Tali ideali furono originariamente introdotti da Artin e Van der Waerden, come parte della teoria dei *quasi-ideali* riportata nel testo *Modern algebra* di Van Der Waerden del 1931. Krull dimostrò nel 1936 che gli ideali divisoriali di un dominio formano un gruppo rispetto alla v-operazione se e solo se il dominio in questione è completamente integralmente chiuso.

Di centrale importanza in questo lavoro di tesi è lo studio dei *domini di Krull*; essi furono introdotti da Krull nel 1931 e furono da lui chiamati *endliche diskrete Hauptordnungen*. Un dominio è detto dominio di Krull se si può esprimere come intersezione di DVR con il carattere di finitezza; in particolare un dominio di Krull è un dominio completamente integralmente chiuso, perciò l'insieme degli ideali divisoriali di un dominio di Krull A, indicato con $\mathcal{D}(A)$, forma un gruppo. Si può quindi definire il *gruppo delle classi dei divisori* di un dominio di Krull come $\mathrm{Cl}(A) := \mathcal{D}(A)/\mathcal{P}(A)$, dove $\mathcal{P}(A)$ è il sottogruppo degli ideali principali di A. Nel 1964 Samuel dimostrò in *Lectures on unique factorization domains* un risultato fondamentale sui domini di Krull, cioè il fatto che i domini di Krull a fattorizzazione unica sono esattamente quelli in cui il gruppo delle classi dei divisori è il gruppo banale.

Negli anni '80 l'idea del gruppo delle classi dei divisori fu generalizzata, ampliando il concetto di gruppo delle classi ad un dominio qualsiasi. Zafrullah, nel suo articolo *A general theory of almost factoriality* del 1985, utilizzando la nozione di t-operazione, una particolare star operazione, definì il *t-gruppo delle classi* come $Cl_t(A) := \mathrm{Inv}_t(A)/\mathcal{P}(A)$, dove $\mathrm{Inv}_t(A)$ è il gruppo dei t-ideali t-invertibili, e A è un qualsiasi dominio. Successivamente D.F. Anderson generalizzò ulteriormente il concetto di gruppo delle classi, studiando lo $*$-gruppo delle classi, definito come $Cl_*(A) := \mathrm{Inv}_*(A)/\mathcal{P}(A)$, dove $*$ è una qualsiasi star operazione. In un dominio di Krull i t-ideali e i v-ideali coincidono e ogni ideale è v-invertibile; perciò, se A è un dominio di Krull, $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}_t(A)$. Quindi il gruppo delle classi dei divisori diventa un caso particolare di t-gruppo delle classi.

È naturale chiedersi se le nozioni finora considerate possano essere ampliate allo studio di ulteriori problemi di fattorizzazione unica nei sopra-anelli, e come le proprietà del gruppo delle classi, anche nel caso in cui tale gruppo non sia nullo, si ripercuotano sulle proprietà dell'anello. Un problema che è naturale porsi è se la fattorizzazione unica sia una proprietà locale; si ricordi che, dati un anello A una sua proprietà $\mathcal{Q}$, si dice che $\mathcal{Q}$ è una *proprietà locale* quando è vera in A se e solo se è vera in ogni localizzazione A_M, con $M \in \mathrm{Max}(A)$. Questo problema è stato studiato tra la fine degli anni '70 e l'inizio degli anni '80; seguiremo in particolare gli articoli *π-domains, overrings, and divisorial ideals* di D.D. Anderson del 1977 e *Survey on locally factorial Krull domains*, di Bouvier, del 1980. L'idea di utilizzare un gruppo di ideali per studiare la fattorialità dei domini di Krull venne estesa al caso locale da Bouvier, che definì il *gruppo locale delle classi* e ne studiò le proprietà in *The local class group of a Krull domain*, del 1984. Tale gruppo è per la fattorialità locale dei domini di Krull ciò che il gruppo delle classi dei divisori è per la fattorialità dei domini di Krull: infatti un dominio di Krull è localmente fattoriale se e solo se il suo gruppo locale delle classi è il gruppo nullo, dove un dominio A è detto *localmente fattoriale* se ogni localizzazione A_M, con $M \in \mathrm{Max}(A)$, è un dominio a fattorizzazione unica.
Parallelamente a questa nozione di dominio localmente fattoriale, affrontia-

mo lo studio di un'altra nozione di fattorialità locale; seguendo la definizione di Fossum, nell'articolo *Locally factorial integral domains* del 1983, D.D. Anderson e D.F. Anderson definirono un dominio *localmente fattoriale* come un dominio A nel quale ogni anello di frazioni del tipo A_f, con f elemento non nullo e non invertibile di A, è un dominio a fattorizzazione unica. In quest'articolo ci si concentra in particolare sull'aspetto del gruppo delle classi di un dominio di Krull siffatto, utilizzando un teorema di Nagata del 1957 che lega il gruppo delle classi di un dominio di Krull a quello di alcune sue particolari estensioni. In questa tesi riserviamo il nome *dominio localmente fattoriale* per i domini nei quali ogni localizzazione in un ideale massimale è un UFD.

Il gruppo delle classi dei divisori e il gruppo locale delle classi dei divisori, nel caso in cui siano nulli, caratterizzano rispettivamente i domini di Krull fattoriali e i domini di Krull localmente fattoriali; ci si chiede allora quali proprietà abbia l'anello nel caso in cui questi due gruppi siano di torsione. Un dominio di Krull il cui gruppo delle classi sia un gruppo di torsione è detto un dominio di Krull *quasi fattoriale*; questo tipo di dominio fu originariamente studiato da Storch nel suo *Fastfaktorielle Ringe* del 1967 e successivamente ripreso da Fossum in *The divisor class group of a Krull domain* del 1973. I domini di Krull il cui gruppo locale delle classi è di torsione sono detti *domini quasi localmente fattoriali*, e furono studiati da Bouvier in *The local class group of a Krull domain.*

Vediamo più nel dettaglio com'è strutturata la tesi:

Nel **Capitolo 1** definiamo le *star operazioni* e gli $*$-*ideali*, e ne diamo alcune proprietà.
Se A è un dominio di integrità e $\mathcal{F}(A)$ è l'insieme degli ideali non nulli di A, un'applicazione $* : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(A)$, $I \mapsto I^*$ è detta *star operazione* se soddisfa le seguenti proprietà:

(1) $A^* = A$ e $(aI)^* = aI^*$, per ogni $a \in K \setminus \{0\}$.

(2) $I \subseteq I^*$ e se $I \subseteq J$ allora $I^* \subseteq J^*$.

(3) $(I^*)^* = I^*$.

Un ideale non nullo I è chiamato $*$-*ideale* se $I = I^*$; l'insieme degli $*$-ideali di A è denotato con $\mathcal{F}_*(A)$. Ogni ideale principale è uno star ideale; perciò, indicando con $\mathcal{P}(A)$ gli ideali principali di A, si ha $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{F}_*(A)$.
Una star operazione è detta di *tipo finito* se $I^* = \bigcup\{J^* : J \subseteq I$ e J è non nullo e finitamente generato$\}$, per ogni $I \in \mathcal{F}(A)$. Ad ogni star operazione $*$ si può associare una star operazione $*_f$ di tipo finito, definendo $I^{*_f} = \bigcup J^*$, dove l'unione è su tutti gli ideali J non nulli e finitamente generati contenuti in I.
L'insieme degli $*$-ideali è un semigruppo rispetto alla $*$-moltiplicazione,

definita da $(I^*, J^*) \mapsto (IJ)^*$. Per gli $*$-ideali introduciamo allora una nozione d'invertibilità:
Un ideale $I \in \mathcal{F}(A)$ è detto *$*$-invertibile* se I^* è invertibile nel semigruppo $\mathcal{F}_*(A)$, cioè se esiste $J \in \mathcal{F}(A)$ tale che $(I^*J^*)^* = (IJ)^* = A$. Indichiamo con $\mathrm{Inv}_*(A)$ l'insieme degli $*$-ideali $*$-invertibili. Ogni ideale principale è uno $*$-ideale $*$-invertibile, perciò si ha la seguente catena di inclusioni: $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathrm{Inv}_*(A) \subseteq \mathcal{F}_*(A)$, per ogni star operazione $*$.

Tra le star operazioni, rivestono particolare importanza la *v-operazione*, o *chiusura divisoriale*, e l'operazione di tipo finito ad essa associata, la *t-operazione*; esse saranno fondamentali per definire il gruppo delle classi dei divisori.
La v-operazione è definita ponendo $I_v := (A : (A : I))$, per ogni $I \in \mathcal{F}(A)$. Un v-ideale è quindi un ideale $I \in \mathcal{F}(A)$ tale che $I = (A : (A : I))$; un v-ideale è anche detto un *ideale divisoriale.* L'insieme $\mathcal{F}_v(A)$ è anche indicato $\mathcal{D}(A)$. Ogni ideale invertibile è un ideale divisoriale, perciò, se $\mathrm{Inv}(A)$ è l'insieme degli ideali invertibili di A, risulta $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathrm{Inv}(A) \subseteq \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{F}(A)$.
La *t-operazione* è la $*$-operazione di tipo finito associata alla v-operazione, ed è perciò definita da $I_t := \bigcup\{J_v : J \subseteq I$ e J è non nullo e finitamente generato$\}$, per ogni $I \in \mathcal{F}(A)$. Risulta $I_t \subseteq I_v$; se J è finitamente generato, allora $J_v = J_t$.

Nel **Capitolo 2** si definiscono i domini di Krull e si dimostra che i domini di Krull a fattorizzazione unica sono esattamente quelli il cui gruppo delle classi dei divisori è il gruppo nullo. Per caratterizzare i domini di Krull è utile la nozione di dominio completamente integralmente chiuso.
Sia A un dominio di di integrità con campo dei quozienti K. Un elemento $x \in K$ è detto *quasi intero* su A se esiste un elemento non nullo $d \in A$ tale che $dx^i \in A$ per ogni $i \geq 0$.
La *completa chiusura integrale* di un dominio A, denotata con $\widetilde{A}$, è l'insieme di tutti gli elementi di K che sono quasi interi su A.
A si dice *completamente integralmente chiuso* se $A = \widetilde{A}$.
La nozione di dominio completamente integralmente chiuso è legata a quella di v-invertibilità: vediamo infatti che $\mathcal{D}(A)$ è un gruppo se e solo se il dominio A è completamente integralmente chiuso.

Proposizione 2.1.15 *Sia A un dominio. Sono equivalenti:*

(1) A è completamente integralmente chiuso;

(2) $(I : I) = A$ per ogni ideale di A;

(3) Ogni ideale di A è v-invertibile.

Se $A = \bigcap A_\lambda$ è un'intersezione di domini, si dice che questa intersezione ha il *carattere di finitezza* se ogni elemento non nullo $x \in A$ è non invertibile in al più un numero finito di A_λ. Osserviamo che se A è un'intersezione

di localizzazioni rispetto ad una famiglia di ideali primi, cioè $A = \bigcap A_{P_\lambda}$, affermare che tale intersezione ha il carattere di finitezza equivale a dire che ogni elemento non nullo $x \in A$ appartiene al più ad un numero finito di ideali primi P_λ. Indicando con t-Max(A) l'insieme degli ideali t-massimali, cioè dei t-ideali massimali nell'insieme dei t-ideali propri, se l'intersezione $\bigcap_{M \in t\text{-Max}} A_M$ ha il carattere di finitezza, si dice che A ha il *t-carattere di finitezza.*
Definiamo i *domini di Krull* come quei domini che possono essere espressi come intersezione di DVR con il carattere di finitezza. I *domini di Dedekind*, usualmente definiti come i domini noetheriani integralmente chiusi di dimensione uno, risultano essere esattamente i domini di Krull di dimensione uno.
Per dare alcune caratterizzazioni dei domini di Krull, è utile la nozione di dominio di Mori:
Un dominio A è detto *dominio di Mori* se soddisfa la condizione della catena ascendente sugli ideali divisoriali $I \subsetneq A$. Un risultato interessante riguardante i domini di Mori è il seguente:

Corollario 2.2.5 *Sia A un dominio di Mori. Allora la v-operazione e la t-operazione coincidono.*

Vediamo allora qualche caratterizzazione dei domini di Krull. L'insieme degli ideali primi di altezza uno di A viene indicato $X_1(A)$.

Teorema 2.2.8. *Sia A un dominio. Sono equivalenti:*

(1) A è un dominio di Krull;

(2) A_P è un DVR per ogni $P \in X_1(A)$ e $A = \bigcap_{P \in X_1(A)} A_P$ con il carattere di finitezza;

(3) A_M è un DVR per ogni $M \in t$-Max(A) e A ha il t-carattere di finitezza.

(4) A è un dominio di Mori completamente integralmente chiuso;

(5) A è completamente integralmente chiuso e ogni ideale t-massimale è divisoriale;

(6) Ogni ideale non nullo di A è t-invertibile.

Un dominio di Krull è quindi in particolare un dominio di Mori; perciò in un dominio di Krull la v-operazione e la t-operazione coincidono.

Dato un ideale $P \in X_1(A)$ e un intero $e \geq 1$, chiamiamo *potenza simbolica* l'ideale $P^{(e)} := P^e A_P \cap A$. Ogni ideale divisoriale in un dominio di Krull ammette una scrittura univocamente determinata come intersezione di potenze simboliche.

Proposizione 2.2.14 *Sia A un dominio di Krull e $I \subseteq A$ un ideale non nullo. Allora I è divisoriale se e solo se $I = (P_1^{e_1} \dots P_n^{e_n})_v = P_1^{(e_1)} \cap$*

$\cdots \cap P_n^{(e_n)}$, *dove* $P_1, \ldots, P_n \in X_1(A)$ *e* $e_1, \ldots, e_n \geq 0$ *sono univocamente determinati.*

A questo punto possiamo definire il gruppo delle classi; dato un dominio A e una qualsiasi star operazione $*$, si ricordi che vale l'inclusione $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathrm{Inv}_*(A)$. Si definisce allora lo $*$-*gruppo delle classi* di A come l'insieme $\mathrm{Cl}_*(A) := \mathrm{Inv}_*(A)/\mathcal{P}(A)$. Se si indica con d la star operazione identità, si ha che $\mathrm{Inv}_d(A) = \mathrm{Inv}(A)$; il gruppo $\mathrm{Cl}_d(A) = \mathrm{Inv}(A)/\mathcal{P}(A)$ viene indicato con $\mathrm{Pic}(A)$ e chiamato *gruppo di Picard*, o *gruppo delle classi di ideali.*
Tra gli $*$-gruppi delle classi appena definiti, riveste particolare importanza il t-*gruppo delle classi* $\mathrm{Cl}_t(A)$, utilizzato per studiare le proprietà aritmetiche e di fattorizzazione dei domini. Vediamo infatti come esso caratterizzi i domini di Krull a fattorizzazione unica.
Un dominio di Krull è in particolare un dominio completamente integralmente chiuso, quindi, dalla Proposizione 2.1.15, sappiamo che ogni ideale divisoriale in un dominio di Krull A è v-invertibile, perciò $\mathcal{D}(A) = \mathcal{F}_t(A) = \mathrm{Inv}_t(A)$ è un gruppo moltiplicativo. Chiamiamo quindi *gruppo delle classi dei divisori*, o semplicemente *gruppo delle classi*, il gruppo $\mathrm{Cl}(A) := \mathrm{Cl}_t(A) = \mathcal{D}(A)/\mathcal{P}(A)$.
Si può allora dimostrare che i domini di Krull A a fattorizzazione unica sono quelli in cui $\mathrm{Cl}(A)$ è il gruppo banale.

Teorema 2.3.11. *Sia A un dominio; sono equivalenti:*

(1) A è un dominio a fattorizzazione unica;

(2) A è un dominio di Krull con gruppo delle classi dei divisori banale;

(3) A è un dominio di Krull e ogni ideale primo di altezza uno è principale.

Il **Capitolo 3** è dedicato allo studio degli argomenti centrali di questi tesi, cioè alle due nozioni di fattorialità locale: ci occupiamo dei domini localmente fattoriali e dei domini in cui ogni anello di frazioni proprio è fattoriale. Un dominio A è detto *localmente fattoriale* se A_M è un dominio a fattorizzazione unica per ogni $M \in \mathrm{Max}(A)$; diamone qualche proprietà generale:

Proposizione 3.1.3 *Sia A un dominio localmente fattoriale. Allora:*

(1) A è intersezione di DVR.

(2) A è completamente integralmente chiuso.

(3) Ogni ideale primo non nullo contiene un ideale primo di altezza uno.

(4) Se I è un ideale finitamente generato che è localmente divisoriale, allora I è invertibile.

Successivamente ci si concentra sui domini di Krull localmente fattoriali; se A è un dominio di Krull, si definisce il *gruppo locale delle classi* di A come $G(A) := \mathrm{Cl}(A)/\,\mathrm{Pic}(A)$.
Diamo allora delle caratterizzazioni dei domini di Krull localmente fattoriali. In particolare, l'essere un dominio di Krull localmente fattoriale è equivalente all'essere un π-dominio, dove un dominio A è chiamato *π-dominio* se ogni ideale principale di A si può esprimere come prodotto finito di ideali primi di A.

Teorema 3.1.9. *Sia A un dominio. Sono equivalenti:*

(1) A è un π-dominio;

(2) A è un dominio di Krull localmente fattoriale;

(3) Ogni ideale divisoriale di A si scrive in maniera unica come prodotto di ideali primi di altezza uno di A;

(4) Ogni ideale non nullo di A contiene un ideale primo invertibile;

(5) A è un dominio localmente fattoriale nel quale ogni ideale primo di altezza uno è finitamente generato;

(6) A è un dominio di Krull e gli ideali primi di altezza uno sono invertibili;

(7) A è un dominio di Krull e $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Pic}(A)$*;*

(8) A è un dominio di Krull e per ogni $a, b \in A$ l'ideale $aA \cap bA$ è localmente principale;

(9) A è un dominio di Krull in cui ogni ideale divisoriale è invertibile.

(10) A è un dominio di Krull e il prodotto di due ideali divisoriali è ancora un ideale divisoriale.

Dal teorema appena visto abbiamo direttamente il seguente corollario:

Corollario 3.1.10 *Un dominio di Krull A è localmente fattoriale se e solo se $G(A) = (0)$.*

Introduciamo i domini che sono localmente fattoriali in un senso più generale di quello appena visto, cioè *i domini A in cui ogni anello di frazioni proprio A_S è un UFD*, dove con *anello di frazioni proprio* si intende un anello di frazioni che non coincida con A, cioè un anello di frazioni A_S dove S contiene almeno un elemento non invertibile di A. L'avere ogni anello di frazioni proprio fattoriale è equivalente all'avere ogni anello di frazioni del tipo $A_f := A_S$, con $S := \{f^n, n \geq 0\}$, per $f \in A$ non nullo e non invertibile, a fattorizzazione unica.

Nello studio dei domini in cui ogni anello di frazioni proprio è fattoriale, occorre distinguere il caso in cui l'anello sia locale dal caso in cui non lo sia. Infatti, se A non è locale, ogni localizzazione A_M in un ideale massimale è un anello di frazioni proprio di A; quindi, se A è un dominio in cui ogni anello di frazioni proprio è fattoriale, allora è un dominio localmente fattoriale. Questo non è necessariamente vero nel caso in cui A sia un anello locale: infatti in tal caso $A_M = A$ non è un anello di frazioni proprio di A. Vediamo allora delle proposizioni.

Proposizione 3.2.7 *Sia A un dominio locale con ideale massimale M. Allora:*

(1) Se $dim(A) = 1$, allora ogni anello di frazioni proprio A_S di A è fattoriale.

(2) Se $dim(A) \geq 2$ e ogni anello di frazioni proprio di A è fattoriale, allora sono equivalenti:

(a) A è un dominio di Krull;

(b) M non è un t-ideale.

Nel caso non locale, se ogni anello di frazioni proprio di A è fattoriale, non solo A è un dominio localmente fattoriale, ma è anche un dominio di Krull, perciò A è un π-dominio.

Teorema 3.2.5. *Sia A un dominio non locale e sia A_S un dominio fattoriale per ogni anello di frazioni proprio A_S. Allora A è un dominio di Krull. Inoltre A è l'intersezione di due domini fattoriali.*

Successivamente dimostriamo il Teorema di Nagata, il quale mette in relazione, data un'estensione di anelli $A \subseteq B$, il gruppo $\mathrm{Cl}(A)$ con il gruppo $\mathrm{Cl}(B)$. Vediamo che il teorema vale per delle estensioni specifiche, che sono in particolare delle estensioni t-compatibili; un'estensione $A \subseteq B$ è detta t-compatibile se, indicando con v' la v-operazione su B e dato un ideale J di A finitamente generato, vale $J_v \subseteq (JB)_{v'}$. Per tali estensioni possiamo definire la seguente applicazione, dove t' è la t-operazione su B:

$$\theta : \mathrm{Inv}_t(A) \to \mathrm{Inv}_{t'}(B), \quad I \mapsto (IB)_{t'},$$

che è un omomorfismo di gruppi e induce un omomorfismo tra i gruppi delle classi di A e B:

$$\overline{\theta} : \mathrm{Cl}(A) \to \mathrm{Cl}(B), \quad \overline{I} \mapsto \overline{(IB)_{t'}}.$$

In particolare, il Teorema di Nagata afferma che l'applicazione $\overline{\theta}$ appena definita è suriettiva, nel caso in cui l'anello B considerato sia un anello generalizzato di frazioni, o una sottointersezione, nozioni di cui diamo la definizione:

Sia A un dominio di Krull e sia $Y \subseteq X_1(A)$. Chiamiamo *sottointersezione* l'anello $A_Y := \bigcap_{P \in Y} A_P$. Chiaramente A_Y è ancora un dominio di Krull.
Se $\mathbb{S}$ è un anello moltiplicativamente chiuso di ideali di un anello A, si definisce *anello generalizzato di frazioni* l'anello $A_{\mathbb{S}} := \bigcup\{(A : I), I \in \mathbb{S}\}$. Inoltre, per ogni ideale I di A si definisce $I_{\mathbb{S}} := \bigcup\{(I : J), J \in \mathbb{S}\}$.
Questi due concetti, nel caso in cui A sia un dominio di Krull, coincidono: ogni anello generalizzato di frazioni $A_{\mathbb{S}}$ è una sottointersezione A_Y, e viceversa. Inoltre, l'estensione $A \subseteq A_{\mathbb{S}}$ (equivalentemente, $A \subseteq A_Y$) è un'estensione t-compatibile, perciò è definita su di essa l'omomorfismo θ. Vediamo allora il Teorema di Nagata.

Teorema 3.3.8. (Teorema di Nagata) *Sia A un dominio di Krull e sia $\mathbb{S}$ un insieme moltiplicativamente chiuso di ideali di A (rispettivamente, sia A_Y, con $Y \subseteq X_1(A)$, una sottointersezione di A). Allora:*

(1) L'omomorfismo $\overline{\theta} : \mathrm{Cl}(A) \to \mathrm{Cl}(A_{\mathbb{S}})$, $\overline{I} \mapsto \overline{I_{\mathbb{S}}}$ (rispettivamente, l'omomorfismo $\overline{\theta} : \mathrm{Cl}(A) \to \mathrm{Cl}(A_Y)$, $\overline{I} \mapsto \overline{(IA_Y)_{v'}}$) è suriettivo;

(2) $\mathrm{Ker}(\theta)$ è generato dagli ideali primi di altezza uno di A che appartengono a $\mathbb{S}$ (risp. dagli ideali primi di altezza uno in $X_1(A) \setminus Y$).

Utilizzando questo teorema, possiamo studiare il gruppo delle classi degli anelli di frazioni del tipo A_f. Infatti, se poniamo $S := \{f^n, n \geq 0\}$, e $\mathbb{S} := \{xA, x \in S\}$, allora $A_f = A_{\mathbb{S}}$ è un anello generalizzato di frazioni. Un primo risultato è il fatto che $\overline{\theta} : \mathrm{Cl}(A) \to \mathrm{Cl}(A_f)$ è un isomorfismo per qualche f non invertibile se e solo se A contiene un ideale primo principale. Allora possiamo dimostrare il seguente corollario, che è una caratterizzazione dei domini di Krull a fattorizzazione unica.

Corollario 3.3.10 *Sia A un dominio di Krull. Allora A è un dominio a fattorizzazione unica se e solo se A_f è fattoriale per ogni $f \in A$ non nullo e non invertibile e A contiene degli ideali primi principali.*

Sempre grazie al Teorema di Nagata, possiamo mostrare che, se A è un dominio di Krull per il quale esiste un f non nullo e non invertibile tale che A_f è un UFD, allora $\mathrm{Cl}(A)$ è finitamente generato. Quindi chiaramente se ogni anello di frazioni proprio di A è un UFD, allora $\mathrm{Cl}(A)$ è finitamente generato; in questo caso, possiamo dire qualcosa di più sulla forma che esso assume.

Teorema 3.3.19. *Sia A un dominio di Krull e sia A_f un dominio a fattorizzazione unica per ogni $f \in A$ non nullo e non invertibile. Allora $\mathrm{Cl}(A)$ è della forma $\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_m$ per $n \geq 0$ e $m \geq 1$.*

Concludiamo il Capitolo 3 con un teorema che permette di dare delle informazioni più precise sulla fattorialità degli anelli di frazioni propri dei domini di Krull.

Teorema 3.3.21. *Sia A un dominio di Krull con gruppo delle classi* $\mathrm{Cl}(A)$ *non nullo e finitamente generato. Allora esiste un anello di frazioni $B := A_S$ di A per cui B_T è a fattorizzazione unica per ogni parte moltiplicativa T di B, mentre B non è fattoriale.*

Osserviamo che nella dimostrazione di questo teorema si considera un anello del tipo $A_{\mathbb{S}}$, dove $\mathbb{S}$ è l'insieme degli ideali primi principali di A. Se A non ha alcun ideale primo principale, l'anello B cercato coincide con A. Perciò, ricordando il fatto che, se A è un dominio di Krull con tutti gli anelli di frazioni propri fattoriali, allora $\mathrm{Cl}(A)$ è finitamente generato, possiamo riassumere la situazione come segue:

Sia A un dominio di Krull e sia $\mathrm{Cl}(A) = G \neq (0)$. Allora:

- Se A non ha ideali primi principali, allora G è finitamente generato se e solo se ogni anello di frazioni proprio di A è fattoriale.
- Se A ha degli ideali primi principali, se G è finitamente generato, allora esiste un anello di frazioni proprio B di A che non è a fattorizzazione unica.
- Se G non è finitamente generato, allora non può esistere alcun elemento $f \in A$ non nullo e non invertibile per cui A_f è un dominio a fattorizzazione unica.

Il **Capitolo 4** è dedicato allo studio dei domini di Krull quasi fattoriali e quasi localmente fattoriali.
Un dominio di Krull A è detto *quasi fattoriale* se il suo gruppo delle classi dei divisori $\mathrm{Cl}(A)$ è un gruppo di torsione. Vediamone qualche caratterizzazione.

Teorema 4.1.2. *Sia A un dominio di Krull. Ogni sottointersezione di A è un anello di frazioni se e solo se* $\mathrm{Cl}(A)$ *è un gruppo di torsione (cioè se A è quasi fattoriale).*

Proposizione 4.1.6 *Sia A un dominio di Krull. Sono equivalenti:*

(1) A è quasi fattoriale;

(2) Per ogni elemento non nullo e non invertibile $a \in A$ esiste un intero $n \geq 0$ tale che $a^n A$ è prodotto di ideali primari principali;

(3) Se a e b sono elementi di A, allora esiste un intero $n \geq 0$, che dipende da a e b, tale che $a^n A \cap b^n A$ è un ideale principale;

(4) Se $P \in X_1(A)$, allora $P^{(n)} = (P^n)_v$ è principale per qualche $n \geq 0$.

Un dominio di Krull A è detto *quasi localmente fattoriale* se il suo gruppo locale delle classi, $G(A)$, è un gruppo di torsione. In analogia con la notazione utilizzata per i domini di Krull localmente fattoriali, un tale dominio è chiamato anche un *quasi π-dominio*. Diamo anche di tali domini qualche caratterizzazione.

Teorema 4.2.2. *Sia A un dominio di Krull. Sono equivalenti:*

(1) A è un quasi π-dominio;

(2) Ogni sottointersezione di A è un anello generalizzato di frazioni $A_{\mathbb{S}}$ in cui ogni ideale $I \in \mathbb{S}$ è invertibile;

(3) Per ogni ideale $P \in X_1(A)$ esiste un $n \geq 0$ tale che $P^{(n)}$ è invertibile;

(4) Se I è un ideale invertibile di A, esiste un intero n tale che I^n è prodotto di ideali primi invertibili;

(5) Se I e J sono ideali invertibili, allora esiste un intero $n \geq 0$ tale che $I^n \cap J^n$ è un ideale invertibile.

Un dominio di Krull A è *localmente quasi fattoriale* se ogni localizzazione A_M è un dominio quasi fattoriale per ogni $M \in \mathrm{Max}(A)$. Questa nozione coincide con quella di dominio quasi localmente fattoriale.

Teorema 4.2.5. *Un dominio di Krull A è un quasi π-dominio se e solo se A_M è quasi fattoriale per ogni $M \in \mathrm{Max}(A)$.*

Nel **Capitolo 5** ci occupiamo della fattorialità e della fattorialità locale in sopra-anelli generici dei domini di Krull.
Prima vediamo quali sono le condizioni che i sopra-anelli dei domini di Krull devono soddisfare per essere dei domini a fattorizzazione unica. Come nel caso degli anelli i cui anelli di frazioni propri sono a fattorizzazione unica, occorre distinguere il caso locale da quello non locale.

Teorema 5.1.2. *Sia A un dominio non locale. Allora:*

(1) Sono equivalenti:

  (a) Ogni sopra-anello di A è un dominio di Krull;
  (b) Ogni sopra-anello proprio di A è un dominio di Krull;
  (c) A è un dominio di Dedekind.

(2) Sono equivalenti:

  (a) Ogni sopra-anello proprio di A è fattoriale;
  (b) Ogni sopra-anello proprio di A è un PID;
  (c) A è un dominio di Dedekind il cui gruppo delle classi $\mathrm{Cl}(A)$ è ciclico, generato dalla classe di un qualsiasi ideale massimale M di A.

Proposizione 5.1.3 *Sia A un dominio locale. Sono equivalenti:*

(1) Ogni sopra-anello proprio di A è un dominio di Krull;

(2) Ogni sopra-anello proprio di A è fattoriale;

(3) Ogni sopra-anello proprio di A è un PID;

(4) A soddisfa una delle seguenti:

- *(a) A è un dominio di valutazione di altezza uno.*
- *(b) A è un dominio di valutazione di dimensione due tale che A_P è un DVR per ogni $P \in X_1(A)$.*
- *(c) A è un dominio noetheriano di dimensione uno con un unico sopra-anello minimale A_1, il quale è un PID.*

Poi ci chiediamo, dato un dominio di Krull localmente fattoriale, in quali casi un suo sopra-anello è ancora un dominio localmente fattoriale. Lo è nel caso in cui sia un sopra-anello piatto, di cui diamo la definizione.
Sia $A \subseteq B$ un'estensione di domini. B è detto *un'estensione piatta* di A se per ogni $M \in \mathrm{Max}(B)$ si ha che $B_M = A_{M\cap A}$. Abbiamo il seguente risultato:

Proposizione 5.1.8 *Sia A un dominio di Krull localmente fattoriale e sia B un sopra-anello di A. Sono equivalenti:*

(1) B è un sopra-anello piatto;

(2) B è un anello generalizzato di frazioni di A.

(3) B è un anello generalizzato di frazioni $A_{\mathbb{S}}$ di A in cui ogni ideale $I \in \mathbb{S}$ è invertibile;

(4) B è una sottointersezione.

Se B soddisfa una delle condizioni precedenti, allora B è un dominio di Krull localmente fattoriale.

Successivamente vediamo, tramite lo studio del gruppo delle classi, in quali casi i sopra-anelli dei domini di Krull hanno tutti gli anelli di frazioni propri fattoriali; affrontiamo in particolare il caso in cui i sopra-anelli in questione siano delle sottointersezioni. Introduciamo la nozione di gruppo divisibile.
Un gruppo G è detto *divisibile* se per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e per ogni $g \in G$ esiste un $y \in G$ tale che $ny = g$ o, equivalentemente, se per ogni $n \in \mathbb{Z}$ risulta $nG = G$. Vediamo come questa nozione sia legata alla fattorialità degli anelli di frazioni delle sottointersezioni di un dominio di Krull.

Proposizione 5.2.6 *Sia A un dominio di Krull e sia $\mathrm{Cl}(A)$ un gruppo divisibile. Allora non esiste alcuna sottointersezione di A che non è fattoriale* *e i cui anelli di frazioni propri sono tutti fattoriali. In particolare, se A è un dominio di Dedekind, allora non esiste alcun sopra-anello di A che è non è fattoriale i cui anelli di frazioni propri sono tutti fattoriali.*

Proposizione 5.2.8 *Sia G un gruppo abeliano non nullo che non sia divisibile. Allora esiste un dominio di Dedekind A con $\mathrm{Cl}(A) \simeq G$ tale che A ha un sopra-anello i cui anelli di frazioni propri sono tutti fattoriali e A non è fattoriale.*

Per studiare delle ulteriori proprietà di fattorizzazione dei sopra-anelli, introduciamo un'altra nozione sui gruppi.
Diciamo che un gruppo G soddisfa la *proprietà* $(*)$ se G è generato da $X \subseteq G$ e non esiste alcun sottoinsieme $Y \subseteq X$ per cui il gruppo quoziente $G/\langle Y \rangle$ sia non nullo e finitamente generato. Allora:

Proposizione 5.2.11 *Sia G un gruppo abeliano.*

(1) Sia A un dominio di Krull con $\mathrm{Cl}(A) \simeq G$. Supponiamo che non esista alcuna sottointersezione di A con tutti gli anelli di frazioni propri fattoriali, A non a fattorizzazione unica. Allora G soddisfa la proprietà $(*)$.

(2) Se G soddisfa la proprietà $(*)$, allora esiste un dominio di Dedekind A tale che $\mathrm{Cl}(A) \simeq G$ e non esiste alcun sopra-anello di A non a fattorizzazione unica, con tutti gli anelli di frazioni propri fattoriali.

Quindi, per quanto abbiamo visto finora, possiamo riassumere come segue:

- Se A è un dominio di Krull con $\mathrm{Cl}(A)$ un gruppo divisibile, allora non esiste alcuna sottointersezione di A non fattoriale i cui anelli di frazioni propri sono fattoriali.

- Se G è un gruppo che soddisfa la proprietà $(*)$ e non è divisibile, allora esistono dei domini di Dedekind A con $\mathrm{Cl}(A) \simeq G$ che hanno dei sopra-anelli non fattoriali i cui anelli di frazioni propri sono fattoriali, e anche dei domini di Dedekind con gruppo delle classi isomorfo G che non hanno alcun sopra-anello siffatto.

- Se G non soddisfa la proprietà $(*)$, allora ogni dominio di Krull che abbia gruppo delle classi isomorfo a G ha un sottointersezione non fattoriale i cui anelli di frazioni propri sono tutti fattoriali.

Bibliografia

[1] D.D. Anderson, *π-domain, ovverings, and divisorial ideal*, Glasgow Mathematical Journal 19 (1978), 199-203.

[2] D.F. Anderson, *A general theory of class groups*, Communications in Algebra 16 (1988), 805-847.

[3] D.D. Anderson, D.F. Anderson, *Locally factorial integral domains*, Journal of Algebra 90 (1984), 265–283.

[4] D.D. Anderson, D.F. Anderson, *Some remarks on star operation and class group*, Journal of Pure and Applied Algebra 51 (1988), 27-33.

[5] D.D. Anderson, D.F. Anderson, D.E. Dobbs, E.G. Houston, *Some finitess and divisibility coniditions on the proper overrings of an integral domain*, Communications in Algebra, 12 (1984), 1689-1706.

[6] D.F. Anderson, D.E. Dobbs, *Pairs of rings with the same prime ideals*, Canadian Journal of Mathematics 32(2) (1980), 362-384.

[7] M.F. Atiyah, I.G. MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, 1969.

[8] V. Barucci, *Mori domains*, Non-noetherian commutative ring theory, 55-74, Mathematics and Its Applications, 520, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[9] N. Bourbaki, *Algèbre Commutative*, Masson, Paris, 2006.

[10] A. Bouvier, *The local class group of a Krull domain*, Canadian Mathematical Bulletin 26 (1983), 13-19.

[11] A. Bouvier, *Survey on locally factorial Krull domain*, Publications du Département de Mathématiques. Faculté des Sciences de Lyon 17-1 (1980), 1-31.

[12] A. Bouvier, M. Zafrullah, *On some class grups of an integral domain*, Bullettin of the Greek Mathematical Society 29 (1988).

[13] L. Carlitz, *A characterization of algebraic number fields with class number two*, Proceedings of the American Mathematical Society 11 (1960), 391-392.

[14] L. Claborn, *Every abelian group is a class group*, Pacific Journal of Mathematics 2 (1966), 219-222.

[15] L. Claborn, *Specified relations in the ideal group*, Michigan Mathematical Journal 15 (1968), 249-255.

[16] J. Elliot, *Functorial properties of star operations*, Communications in Algebra 38 (2010), 1466-1490.

[17] R.M. Fossum, *The divisor class group of a Krull domain*, Springer, Berlin 1973.

[18] S. Gabelli, *Il problema della fattorizzazione nei domini di Dedekind*, http://www.mat.uniroma3.it/users/gabelli/

[19] S. Gabelli, *Introduzione alla teoria delle valutazioni*, http://www.mat.uniroma3.it/users/gabelli/

[20] S. Gabelli, *Chacterizing integral domains by semigroup of ideals*, http://www.mat.uniroma3.it/users/gabelli/

[21] R. Gilmer, *Multiplicative ideal theory*, Dekker, New York, 1972.

[22] R.W. Gilmer, W.J. Heinzer, *On the complete integral closure of an integral domain*, Journal of the Australian Mathematical Society, 6 (1966), 351-361.

[23] A. Grams, *Atomic rings and the ascending chain condition for principal ideals*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 75 (1974), 321-329.

[24] A. Grams, *The distribution of prime ideals of a Dedekind domain*, Bulletin of the Australian Mathematical Society 11 (1974), 429-441.

[25] I. Kaplansky, *Commutative rings*, University of Chicago Press, Chicago, 1974.

[26] K.B. Levitz, *A characterization of general ZPI-rings*, Proceedings of the American Mathematical Society 32 (1972), 376-380.

[27] Matsuda R., *Notes on Anderson-Anderson-Johnson questions and Bouvier questions*, Bulletin of the Faculty of Science, Ibaraki University. Series A, Mathematics 21 (1989), 13-19.

[28] P. Maroscia, *A note on locally factorial noetherian domains*, Communications in Algebra 9(5) (1981), 491-497.

[29] J.L. Mott, M. Zafrullah, *On Krull domains*, Archiv der Mathematik 56 (1991), 559-568.

[30] G.M. Piacentini Cattaneo, *Algebra*, Zanichelli, 1996.

[31] I. Stewart, D.Tall, *Algebraic number theory and Fermat last theorem* (third edition), Peters, 2002.

[32] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative algebra*, Springer, New York, 1960.