UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica di

Claudia Mastrone

Sulla stima della struttura a termine dei tassi con il Metodo Generalizzato dei Momenti

Relatore

Prof. Alessandro Ramponi

Il Candidato   Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2003 - 2004

Luglio 2004

Classificazione AMS : 62M10, 65C60, 91B84.

Parole Chiave : Metodo Generalizzato dei Momenti, Metodo Efficiente dei Momenti, struttura a termine.

Claudia Mastrone è nata a Roma il 11/04/1979.

Ha conseguito il diploma maturità scientifica presso il Liceo G.B.Morgagni di Roma nel luglio 1998 con la votazione di 56/60.

Si è immatricolata alla facoltà di Matematica presso l'università degli studi 'Roma Tre', nel settembre 1998.

Negli A.A. 2000-2001 e 2001-2002 ha vinto la borsa di collaborazione presso i laboratori di informatica per il corso di studio in Matematica.

Ha scelto le seguenti prove di qualificazione: 'Il metodo di eliminazione di Gauss' e 'Il metodo Bootstrap per la determinazione della struttura a termine dei tassi d'interesse'. Ha discusso la prima nell'ottobre 2003.

Sintesi

Il principale contributo della tesi è la presentazione del metodo generalizzato dei momenti, GMM, di una sua versione computazionalmente efficiente, il metodo efficiente dei momenti, EMM, (Gallant-Tauchen (1986)) e la sua applicazione al problema della stima della curva dei rendimenti, o struttura a termine dei tassi di interesse. Tale curva rappresenta un importante indicatore economico e descrive la dipendenza del rendimento di un prodotto obbligazionario dalla propria scadenza.

Un'obbligazione (*bond*) è un titolo di credito che rappresenta una parte di debito acceso da una società per finanziarsi e promette il rimborso del capitale alla scadenza più un interesse che può essere dato in un'unica soluzione o frazionato. Il prezzo di un'obbligazione è denominato con $P(t, T)$, in cui T rappresenta la scadenza del titolo e t è tale che $0 \leq t \leq T$. Esistono due tipologie principali di obbligazioni: *zero-coupon bond* e *coupon bond*. I primi promettono la restituzione del capitale con gli interessi alla scadenza; i coupon bond promettono il pagamento di un fissato numero di cedole a date prestabilite t più il capitale alla scadenza. Un titolo obbligazionario garantisce dunque un rendimento, $\mathbf{R}(t, T)$, che deriva da tre componenti:

- L'incasso periodico delle cedole, se presenti;

- L'incasso degli interessi relativi alle cedole incassate;
- Il rimborso del capitale se tenuto fino alla scadenza.

La vita residua di un titolo obbligazionario è il periodo di tempo che rimane prima del rimborso del capitale da parte dell'emittente. La struttura a termine dei tassi, o struttura per scadenza, è quella funzione che lega il tasso d'interesse, o il rendimento, ottenibile da un certo strumento finanziario alla vita residua dello strumento stesso, ed è definita dalla seguente funzione

$$\mathbf{R}(t,T) = -\frac{\log P(t,T)}{T-t}$$

in cui $T - t$ è la vita residua del titolo obbligazionario.
Le differenti forme delle curve dei rendimenti assunte nel tempo, hanno importanti conseguenze per l'analisi e la previsione dei tassi d'interesse. Generalmente un'inclinazione positiva indica un'aspettativa di graduale aumento dei tassi d'interesse con il prolungamento della scadenza. Al contrario, un'inclinazione negativa riflette un'aspettativa di futuro calo del livello dei tassi, (figura 1).

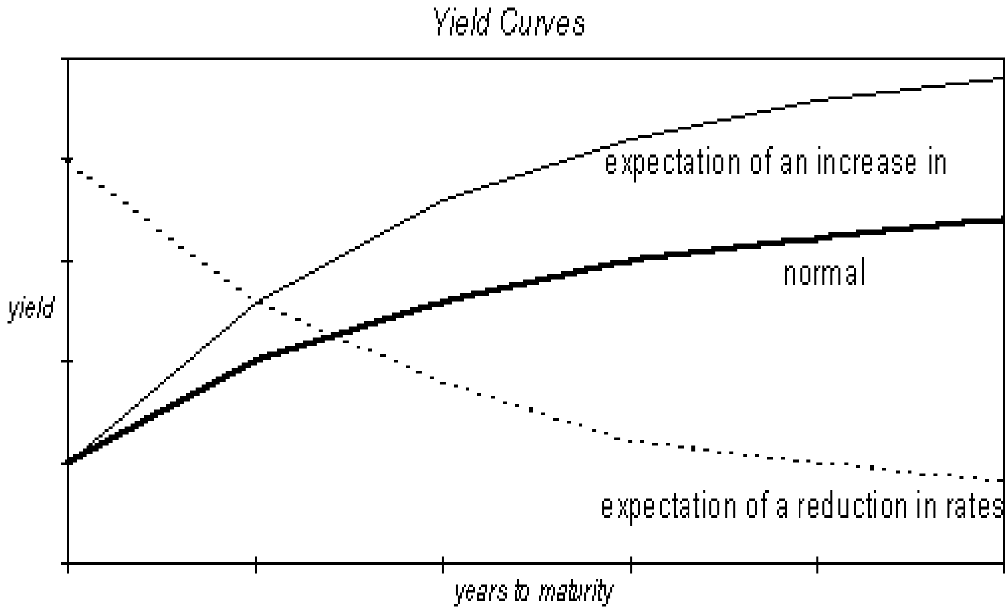

Figura 1: Curve dei rendimenti possibili

Per comprendere al meglio queste implicazioni è necessario individuare i fattori che determinano una particolare conformazione della curva in un determinato istante.

Molti modelli sono stati sviluppati per descrivere la curva dei rendimenti e la propria evoluzione nel tempo.

Nella prima parte della tesi sono stati presentati alcuni modelli economici a un fattore.

I modelli a un fattore sono basati sul fatto che sia sufficiente modellizzare il comportamento di un'unica variabile esogena dalla quale dipende l'intera curva dei rendimenti. Il fattore utilizzato nei modelli più classici è il tasso d'interesse istantaneo o tasso a breve, *short rate*, definito nel seguente modo

$$r(t) = lim_{T \to t} \mathbf{R}(t, T). \tag{1}$$

Facendo particolari assunzioni sulla dinamica stocastica di questo fattore, ed assumendo che sul mercato non sia possibile realizzare arbitraggi, è possibile ottenere l'intera curva dei rendimenti talvolta anche in forma analitica, com'è il caso dei modelli di Cox, Ingersoll e Ross (CIR) e di Vasicek.
Sia il modello di Vasicek che il modello di CIR fanno parte di una classe di modelli 'affini' per i quali

$$\log P(t, T) = A(t, T) + B(t, T) \cdot r(t)$$

[4]. In tali modelli dunque la curva dei rendimenti è data dalla seguente funzione

$$\mathbf{R}(t, T) = -\frac{1}{T - t} \left\{ \log \left[A(t, T) \right] + B(t, T) \cdot r(t) \right\},$$

in cui le funzioni $A(t, T)$ e $B(t, T)$ sono definite in modo differente in ogni modello. In generale la dinamica del tasso a breve $r(t)$ è specificata come soluzione di una equazione differenziale stocastica della forma [4]

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t) \tag{2}$$

dove μ e σ sono arbitrarie funzioni tali da garantire l'esistenza di un'unica soluzione dell'equazione (2) e $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ è un moto browniano standard sotto la misura neutrale al rischio.
Nel modello di Vasicek $\sigma(t, r(t)) = \sigma$ e nel modello di CIR $\sigma(t, r(t)) = \sqrt{r(t)}\sigma$, mentre in entrambi i modelli $\mu(t, r(t)) = a(b - r(t))$ in cui a, b e σ sono delle costanti. Sebbene questi modelli siano particolarmente facili da implementare e interpretare, lasciano aperti diversi problemi. Il primo è che

il tasso d'interesse istantaneo non è una grandezza osservata sul mercato. Ma i limiti più rilevanti dei modelli ad un solo fattore consistono nel fatto che questi sono in grado di rappresentare un numero limitato di forme della curva dei rendimenti e che la presenza di un solo fattore implica invitabilmente che i tassi di rendimento per varie scadenze siano perfettamente correlati, un risultato che è raro riscontrare nei dati.

Esistono modelli anche a più di un fattore, ad esempio a due.
In tali modelli, la curva dei rendimenti è ottenuta sulla base di ipotesi riguardanti il comportamento di due fattori esogeni, tipicamente il tasso d'interesse istantaneo e la volatilità. Come nei modelli a un fattore, facendo particolari assunzioni sulla dinamica stocastica di questi fattori, ed assumendo che sul mercato non sia possibile realizzare arbitraggi, è possibile ottenere l'intera curva, ovvero determinare $\mathbf{R}(t, T)$ in forma analitica [13].

I modelli matematici che descrivono la dinamica dei fattori esogeni dipendono generalmente da parametri incogniti che devono dunque essere stimati sulla base dei dati disponibili.

Nella seconda parte della tesi è stato presentato dunque un particolare metodo di stima, il metodo generalizzato dei momenti, GMM, ed una sua versione efficiente che si è recentemente affermata in questo tipo di problemi. Infatti il metodo GMM è in grado di fornire uno strumento conveniente di stima anche in quei casi in cui altri stimatori tradizionali non sono applicabili [9].

Il metodo generalizzato dei momenti costituisce un'estensione del metodo classico dei momenti.
L'idea principale del metodo è di considerare un insieme di condizioni, dette

condizioni dei momenti del tipo

$$\mathbb{E}[\mathbf{m}(X_i;\theta_0)] = 0 \tag{3}$$

dove $\theta_0 \in \Theta$ è un vettore (p×1) di parametri incogniti che caratterizza la legge delle variabili osservabili X_i, per $i = 1, ..., N$, ed $\mathbf{m}(X_i;\theta)$ è un vettore (q×1) di funzioni assegnate in modo tale che l'equazione (3) è verificata solo per $\theta = \theta_0$. Una condizione necessaria per l'identificazione di θ_0 è che q≥p. Se q=p, ovvero il numero di condizioni dei momenti coincide con il numero di parametri incogniti, allora θ_0 è esattamente la soluzione dell'equazione (3) ed è univocamente determinato poichè soluzione di un sistema di q equazioni in q incognite. Ci sono casi però in cui il valore di $\mathbb{E}[\mathbf{m}(\cdot)]$ è ignoto mentre il valore di $\mathbf{m}(x_i;\theta)$ può essere calcolato $\forall\theta$ e $\forall i$. In questo caso le condizioni dei momenti vengono stimate dai momenti campionari nel modo seguente

$$\mathbf{f}_N(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{m}(x_i, \theta). \tag{4}$$

Se $\mathbf{f}_N$ approssima $\mathbb{E}[\mathbf{m}(\cdot)]$ allora $\widehat{\theta}_N$ è circa uguale a θ_0, dove $\mathbf{f}_N(\widehat{\theta}_N) = 0$, ovvero:

$$\mathbf{f}_N(\widehat{\theta}_N) \approx \mathbb{E}[\mathbf{m}(\theta_0)] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \widehat{\theta}_N \approx \theta_0.$$

Se q>p, ovvero ci sono più condizioni dei momenti che parametri incogniti, allora si dice che θ_0 è sovraidentificato e l'equazione (4) non ha soluzione per θ perchè ci sono q equazioni in p incognite, ovvero più equazioni che incognite. Allora è necessario scegliere uno stimatore di θ che faccia approssimare $\mathbf{f}_N$ a zero in una qualche misura. Per questo motivo si cerca uno stimatore $\widehat{\theta}_N$ di

θ risolvendo il problema di minimo :

$$\widehat{\theta}_N = argmin_\theta \mathbf{Q}_N(\theta) = \mathbf{f}_N(\theta)' \mathbf{A}_N \mathbf{f}_N(\theta), \tag{5}$$

dove $\mathbf{A}_N$ è una opportuna matrice (q$\times$q) di pesi, simmetrica e definita positiva. Ovviamente essendo $p<q$, $\mathbf{Q}_N > 0$, altrimenti se $\mathbf{Q}_N = 0$ avremo subito la condizione $\mathbf{f}_N(\theta) = 0$. Lo stimatore $\widehat{\theta}_N$ definito dall'equazione (5) è detto stimatore GMM.

L'efficienza del metodo di stima si ottiene usando il metodo dei momenti efficiente, EMM, che a sua volta utilizza la funzione criterio del metodo GMM. Il metodo EMM è una procedura del metodo dei momenti che spesso fornisce un approccio attuabile per la stima quando la massima verosimiglianza è computazionalmente intensa o infattibile. Questo metodo raggiunge la stessa efficienza della massima verosimiglianza e utilizza come momenti lo 'score' di un modello ausiliario. Lo score è un vettore di derivate del logaritmo della funzione di verosimiglianza. Il modello ausiliario viene scelto in un modo tale da approssimare il vero modello da stimare o anche detto modello strutturale. Lo 'score' viene poi calcolato alla stima di massima verosimiglianza e viene utilizzato nella simulazione delle condizioni dei momenti, procedendo quindi al calcolo dello stimatore EMM con la funzione criterio del metodo GMM.

Un generale modello ausiliario, il modello SNP, è stato proposto in Gallant e Tauchen [9]. Il modello SNP (Semi Non Parametrico), è descritto da una densità condizionata dell' insieme dei dati che è data dal polinomio di Hermite moltiplicato per una densità normale, ovvero:

$$f(y_t|x_{t-1};\theta) = c \cdot [P(z_t)]^2 \phi(z_t) \tag{6}$$

in cui

- $\phi(\cdot)$ rappresenta la densità di una normale standard;

- $P(z_t)$ è il polinomio di Hermite in z_t;

- c è una costante di normalizzazione;

- z_t è la versione normalizzata di y_t.

La tesi è stata strutturata nel seguente modo:

Nel primo capitolo sono state illustrate le diverse tipologie di obbligazioni, la struttura a termine dei tassi d'interesse e alcuni modelli per la struttura a termine dei tassi come il modello di CIR e di Vasicek.

Nel secondo capitolo sono stati illustrati diversi metodi di stima tra cui il metodo generalizzato dei momenti e il metodo dei momenti efficiente, citati precedentemente.

Nel terzo capitolo sono state applicate le stime EMM ai modelli di Vasicek e a volatilità stocastica scritti in forma discreta.
La discretizzazione di Vasicek che viene utilizzata è

$$r_{t+\Delta} = r_t + a(b - r_t)\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}W_t \tag{7}$$

in cui W_t si distribuisce come una normale standardizzata, ovvero $W_t \sim \mathbf{N}[0,1]$, e Δ è il passo di discretizzazione.
Il metodo EMM è stato applicato al modello discretizzato di Vasicek usando come modello ausiliario il modello SNP proposto da Gallant e Tauchen [9].
Il modello a volatilità stocastica discretizzato che è stato considera è stato proposto da Andersen [2] ed ha la seguente forma:

$$\begin{cases} y_t = h_t\epsilon_t \\ \ln h_t^2 = \omega + \delta \ln h_{t-1}^2 + \sigma u_t \end{cases} \tag{8}$$

in cui $\{\epsilon_t, u_t\}$ è i.i.d. $\mathbf{N}\,[0,1]$, $0 < \delta < 1$ e $\sigma > 0$.

Il metodo EMM è stato applicato al modello di volatilità stocastica discretizzato usando come modelli ausiliari il modello SNP e il modello GARCH(1,1) [13].

Infine, in questo capitolo sono state riportate sperimentazioni effettuate con i due modelli di Vasicek e a volatilità stocastica su un sistema di dati reali. I dati che sono stati utilizzati sono la serie storica del tasso EURIBOR ad 1 settimana dal 1° gennaio 2001 al 14 giugno 2004 (disponibili dal sito http://www.euribor.org/html/content/euribordata.html) (vedi figura 2).

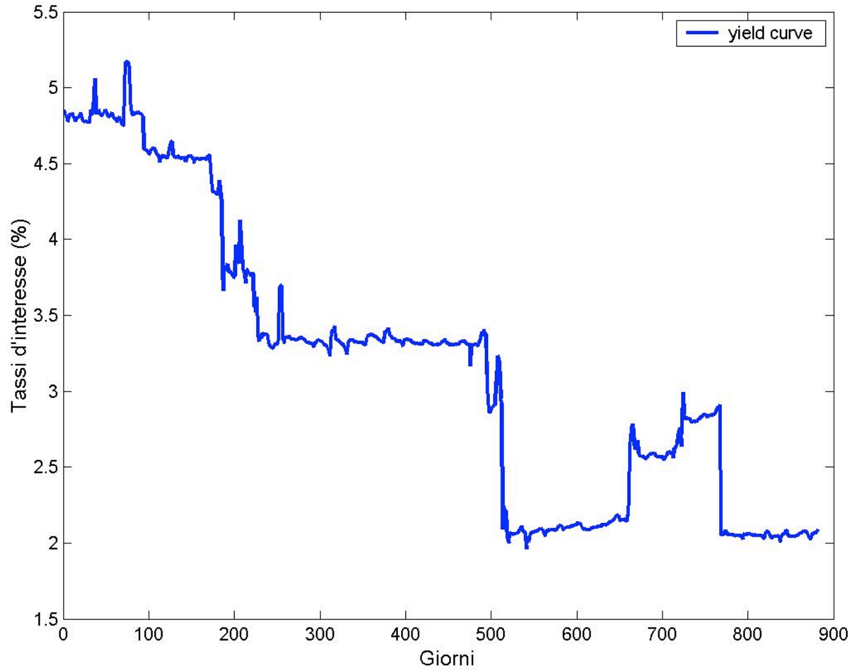

Figura 2: Serie storica dei tassi Euribor dal 1° gennaio 2001 al 14 giugno 2004

.

Abbiamo applicato l'algoritmo EMM/SNP per il modello di Vasicek, con parametri a=0.1, b=0.1, σ=0.02 e il passo di discretizzazione Δ=0.01, ottenendo i risultati in tabella 1 e quindi l'algoritmo EMM/Garch(1,1) e EMM/SNP per il modello a volatilità stocastica, con parametri ω=-0.3678, δ=0.95 e σ=0.26, ottenendo i risultati in tabelle 2 e 3.

Parametri	Valori reali	Valori stimati	Errore assoluto	Errore relativo
a	0.1000	0.1105	0.0105	0.1047
b	0.1000	0.1005	0.0005	0.0047
σ	0.0200	0.0222	0.0022	0.1088

Tabella 1: Stima dei tassi EURIBOR, secondo il modello di Vasicek con EMM/SNP, con N=1000 simulazioni; il minimo della funzione criterio GMM è 1.4314e+018

Parametri	Valori reali	Valori stimati	Errore assoluto	Errore relativo
ω	-0.3678	-0.3536	0.2818	-0.0386
δ	0.9500	0.9161	0.0339	-0.0357
σ	0.2600	0.2818	0.0218	0.0838

Tabella 2: Stima di tassi EURIBOR, secondo il modello di Volatilità stocastica con EMM/GARCH(1,1), con N=1000 simulazioni; il minimo della funzione criterio GMM è 9.0939e-019

Parametri	Valori reali	Valori stimati	Errore assoluto	Errore relativo
ω	-0.3678	-0.3605	0.0073	-0.0198
δ	0.9500	0.9706	0.0206	0.0217
σ	0.2600	0.2751	0.0151	0.0581

Tabella 3: Stima dei tassi EURIBOR, secondo il modello di Volatilità stocastica con EMM/SNP, con N=1000 simulazioni; il minimo della funzione criterio GMM è 38.4572

Nell'appendice sono stati infine riportati gli algoritmi di stima, implementati in ambiente MATLAB 6.0 che sono stati fatti girare su un PC, processore INTEL P3, 733 Mhz, 640 RAM.

Bibliografia

[1] Torben.G. Andersen, (1997) *Estimating continuous-time stochastic volatility models of the short-term interest rate*, Journal of Econometricd 77, 347-377.

[2] Torben.G. Andersen, (1999) *Efficient method of moments estimation of a stochastic volatility model: A Monte Carlo study*, Journal of Econometricd 91, 61-87.

[3] Paolo Baldi *Calcolo delle probabilità e Statistica*, McGraw-Hill Libri Italia srl.

[4] Tomas Bjork, (1998) *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford, University press.

[5] G.R. Duffee and R.H. Stanton, (2000), *EMM Estimation of Affine and Nonaffine Term Structure Models*, Hass School of Business, U.C. Berkeley.

[6] Jean-Pierre Florens and M. Carraso, (2002), *Simulation Based Method of Moments and Efficiency*, Universitè de Toulouse and The University of Rochester.

[7] A.R. Gallant and G. Tauchen, (2001), *Efficient Method of Moments*, University of North Carolina and Duke University Durham.

[8] A.R. Gallant and G. Tauchen, (2001), *SNP: A Program For Nonparametric Time Series Analysis. User's Guide Version 8.9.*

[9] A.R. Gallant and G. Tauchen, (1996) *Which moments to match?*, Econometric Theory 12, 657-681.

[10] M. Gentile and R. Renò, (2002) *Which model for the italian interest rate?*, Faculty of the Doctoral Program in Economis and Management Scuola degli Studi Superiori s. Anna.

[11] B.H. Hall, March 1996 (revisited February 1999), *Notes on Generalized Method of Moments Estimation.*

[12] L.P. Hansen, (1982), *Large sample properties of generalized method of moments estimators*, Econometrica 50, 1029-1054.

[13] J.C. Hull, (1999), *Opzioni Futures e altri derivati*, Il sole 24 ore.

[14] R. Alexander M. Mood, Franklin A.Graybill, Duane C.Boes *Introduzione alla statistica*, McGraw-Hill.

[15] A. Thomas, (2003-2004), *Panel data econometrics and GMM estimation*, Ecole doctorale MPSE Academic.

[16] E. Zivot, *Simulation-Based Estimation with Applications in S-Plus to Probabilistic Discrete Choise Models and Continuous-Time Financial Models*, Department of Economics, University of Washington and Insightful Coeporation.