# Metodi geometrici per sistemi integrabili e analisi di Gel'fand - Zakharevich

Pierluigi Modesti
Tesi di Laurea in Matematica
Relatore: Prof. Orlando Ragnisco

Roma, 4-5 novembre 1997

# Curriculum vitæ

Pierluigi Modesti è nato a Roma il 27 settembre 1974.

Si è diplomato nel 1992 presso il *Liceo Scientifico Statale "Giambattista Morgagni"* di Roma e si è immatricolato nello stesso anno al *Corso di Laurea in Matematica* presso l'*Università di Roma Tre*.

Negli anni accademici 1993/94 e 1994/95, ha collaborato con il Dipartimento di Matematica alla elaborazione e redazione dei resoconti sull'attività didattica del Corso di Laurea in Matematica.

È socio fondatore dell'associazione studentesca "*Gruppo Abeliano*" ed è stato membro del consiglio direttivo della medesima dal maggio 1996 al maggio 1997.

Nell'ottobre 1996 ha effettuato la prova di qualificazione presentando una tesina di argomento geometrico, proposta dal Prof. E.Sernesi, dal titolo *La geometria di una cubica piana non singolare* ed una di argomento analitico, proposta dal Prof. G.Mancini, dal titolo *Funzioni a variazione limitata, insiemi di Caccioppoli e superfici minime.*

Durante l'estate del 1997 ha frequentato i corsi della *Landau Summer University* di Chernogolovka, nella regione moscovita, promossi dal *Landau Institute for Theoretical Physics* dell'Accademia delle Scienze Russa ed, in particolare, il corso *Algebraic geometry and soliton equations* tenuto dal Prof. V.E.Zakharov ed il corso *Soliton theory and physical applications* tenuto dal Prof. A.V.Mikhailov.

# Indice

# Introduzione

Questa tesi affronta il problema dell'integrabilità di un sistema dinamico, nei suoi aspetti geometrici. L'idea, che sta alla base dello studio, è la seguente: lo spazio delle fasi di un sistema dinamico hamiltoniano è una varietà differenziabile con notevoli caratteristiche geometriche.

È possibile generalizzare il problema a varietà di dimensione qualsiasi, e non necessariamente pari come sono, di norma, gli spazi delle fasi dei sistemi meccanici.

Varietà di dimensione dispari, tuttavia, non possono che essere dotate di una parentesi di Poisson degenere, a causa della proprietà di antisimmetria. Il fatto che la parentesi sia degenere comporta l'esistenza di funzioni particolari che hanno parentesi nulla con qualsiasi altra funzione definita sulla varietà. Esse sono dette funzioni di Casimir.

Questi spazi delle fasi "estesi" sono detti varietà di Poisson. La generalizzazione della usuale parentesi è detta bivettore di Poisson.

Una varietà di Poisson è foliata in sottovarietà simplettiche, a loro volta foliate in sottovarietà lagrangiane.

Queste considerazioni consentono di identificare un sistema hamiltoniano con la foliazione simplettica del suo spazio delle fasi. L'integrabilità del sistema si riduce all'esistenza di un numero di campi vettoriali hamiltoniani, sufficiente a generare le foglie lagrangiane di ciascuna foglia simplettica.

Nel caso di sistemi bi-hamiltoniani, cioè hamiltoniani rispetto ad un fascio di parentesi di Poisson, se la varietà ha dimensione dispari, le foglie simplettiche del fascio sono, in ogni punto fissato, una famiglia ad un parametro. L'intersezione di tutte le foglie è ancora una varietà simplettica, ed è integrabile: esistono, infatti un numero sufficiente di campi vettoriali hamiltoniani che la generano. Questa sottovarietà è detta anima. Le funzioni hamiltoniane, che generano i campi, sono i coefficienti di un polinomio, che è funzione di Casimir per il fascio.

La tesi è articolata in **quattro capitoli**.

Il **primo** capitolo è un riepilogo dei principali risultati della meccanica classica, a partire dal *principio variazionale di Hamilton*, fino ad arrivare alla geometria delle *varietà simplettiche*. L'obiettivo di questo capitolo è, in particolare, quello di incentrare, per quanto possibile, l'attenzione, sulle caratteristiche geometriche proprie dei sistemi integrabili in senso classico, o, come spesso si dice, "secondo Liouville". In questi termini, il ben noto *teorema di Arnol'd - Liouville* può essere riletto ed interpretato sotto un punto di vista del tutto geometrico: *le foglie lagrangiane compatte e connesse della foliazione lagrangiana di una varietà simplettica sono tori lagrangiani.*

Nel **secondo** capitolo, si generalizzano i problemi e le strutture, trattati in precedenza, introducendo il *bivettore di Poisson*, estensione a varietà differenziabili di dimensione *non necessariamente pari* del concetto di forma simplettica. Una varietà, sulla quale è definito un bivettore di Poisson, è detta *varietà di Poisson* e può essere considerata uno *spazio delle fasi esteso*. Il bivettore è associato ad una operazione binaria, bilineare e antisimmetrica, tra le funzioni definite sulla varietà, estendibile anche agli elementi del fibrato cotangente, che generalizza l'usuale parentesi di Poisson:

$$\mathbf{P}(df, dg) = P^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial g}{\partial x^j}.$$

Il bivettore si rappresenta per mezzo della matrice antisimmetrica $P$ e, perciò, può essere considerato un'applicazione lineare tra spazi vettoriali, la cui *immagine* identifica le *foglie simplettiche*, foliate, a loro volta, in sottovarietà lagrangiane, dette *varietà integrali*. Il *nucleo* del bivettore è, invece, generato dalle cosiddette *funzioni di Casimir*. Tali funzioni sono "integrali banali", infatti, non solo esse sono in involuzione tra loro, ma anche con qualsiasi altra funzione definita sulla varietà.

Queste considerazioni portano a svincolare, via via, dalle equazioni del moto, la questione dell'*integrabilità*, che viene riportata, piuttosto, alle proprietà algebrico-geometriche dello spazio delle fasi esteso, considerato come varietà di Poisson.

Alcune varietà di Poisson possono essere dotate di una seconda struttura bivettoriale, *compatibile* con la prima. Varietà aventi questa proprietà sono dette *varietà bi-hamiltoniane.*

La doppia struttura bivettoriale è detta *fascio di Poisson.* Essa può essere classificata in termini della teoria dei *fasci singolari di matrici*, e quindi ricondotta ad una *forma canonica*, detta *forma di Kronecker.*

Per costruire la seconda struttura di Poisson di una varietà bi-hamiltoniana esistono diversi metodi. Uno di essi è basato sulla teoria dei *tensori di Nijenhuis*, o *tensori a curvatura nulla*: dato un bivettore $\mathbf{P}$ ed un tensore di Nijenhuis $\mathbf{N}$, la composizione

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{N} \circ \mathbf{P}$$

è, sotto opportune ipotesi, ancora un bivettore di Poisson. Tale metodo è legato al concetto di *algebroide di Lie*: i fasci di bivettori ed i fasci di tensori di Nijenhuis possono essere interpretati come fasci di *àncore*, cioè di mappe da un fibrato dello spazio delle fasi esteso (che, nei due casi è, rispettivamente, il cotangente ed il tangente), nel fibrato tangente.

Un'altra particolarità delle varietà bi-hamiltoniane è la possibilità di operare su di esse un processo di riduzione, non derivante, come avviene, in genere, per i sistemi hamiltoniani, dall'azione di un gruppo, bensì, direttamente dalle due strutture bivettoriali. Tale processo è detto *riduzione di Marsden - Ratiu*. In pratica, il sistema ridotto si ottiene quozientando opportunamente il sistema iniziale rispetto ai Casimir delle due strutture.

Il **terzo** capitolo tratta, in modo particolareggiato, le caratteristiche geometriche delle varietà bi-hamiltoniane.

Un aspetto notevole, immediatamente deducibile, è la profonda differenza tra varietà di dimensione *pari* e *dispari*: in entrambi i casi si vede che una varietà bi-hamiltoniana è decomponibile in *prodotto diretto* di varietà simplettiche *bidimensionali*, ma, nel caso di dimensione dispari, l'esistenza di funzioni di Casimir non costanti, assicurata dall'antisimmetria del fascio di Poisson, implica che, al variare del parametro $\lambda$ del fascio, esiste, per ogni punto della varietà, una intera famiglia ad un parametro di foglie simplettiche. L'intersezione di tali foglie è detta *anima del fascio*.

Il risultato fondamentale è il *teorema di Magri - Gel'fand - Zakharevich*. Tale risultato afferma che, le funzioni di Casimir di ogni struttura bi-hamiltoniana di rango massimo, su una varietà di dimensione dispari $2n+1$, possono essere rappresentate per mezzo di un polinomio nell'indeterminata $\lambda$,

$$H(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} H_j \lambda^{n-j},$$

i cui coefficienti $H_j$ sono funzioni localmente definite sulla varietà.

Questo polinomio di grado $n$ è detto *polinomio di Gel'fand - Zakharevich.*

Il teorema, la cui dimostrazone è dovuta, sostanzialmente, a Magri, stabilisce, in particolare, l'esistenza di una *catena*, definita per ricorrenza: si vede che il primo e l'ultimo coefficiente del polinomio di Gel'fand - Zakharevich sono funzioni di Casimir, rispettivamente delle due strutture bivettoriali che generano il fascio di Poisson. La catena parte, dunque, dal Casimir di una struttura, e termina con il Casimir dell'altra, e determina, uno dopo l'altro, $n$ campi vettoriali bi-hamiltoniani, ossia hamiltoniani rispetto ad entrambi i bivettori. Questi campi generano l'anima del fascio.

Al teorema di Magri - Gel'fand - Zakharevich si affianca una forma canonica per i fasci di Poisson, suggerita, ancora una volta, da Magri, che si ottiene scrivendo il fascio nelle $n + 1$ coordinate fornite dai coefficienti del polinomio di Gel'fand - Zakharevich, completate da altre $n$ funzioni $K_i$, costruite, anch'esse attraverso un procedimento ricorsivo.

Nel **quarto**, ed ultimo, capitolo sono riportati una serie di esempi, in parte originali, che mostrano in concreto l'analisi geometrica di sistemi bi-hamiltoniani particolarmente celebri, derivati dal *reticolo di Toda* e dall'*equazione di Korteweg - De Vries*.

In questi esempi vengono costruiti esplicitamente i coefficienti del polinomio di Gel'fand - Zakharevich e, quindi, i campi vettoriali bi-hamiltoniani che generano l'anima del fascio di Poisson: nel caso periodico del reticolo di Toda, si sfrutta il legame tra la struttura bi-hamiltoniana delle equazioni e la rappresentazione di Lax, mentre, per i flussi stazionari dell'equazione di Korteweg - De Vries, si fa riferimento al metodo della *mappa di Miura*.

* * *

Il lavoro è stato redatto utilizzando il software $\LaTeX_{2\epsilon}$. Per affrontare i calcoli si è fatto ricorso, in più casi, al software *Mathematica 2.2*.

Un ringraziamento speciale va al Prof. Franco Magri, del Dipartimento di Matematica dell'Università Statale di Milano, per aver suggerito l'argomento della tesi, e per essere sempre stato disponibile a fornire tutti i chiarimenti di cui ho avuto bisogno.

# Capitolo 1

# Sistemi integrabili

L'integrabilità di un sistema dinamico è uno dei problemi più antichi della Meccanica e, tuttavia, per molti versi ancora aperto. Ai tempi di Newton e Keplero, integrare significava *quadrare* le equazioni del moto, cercando di ottenere una *legge oraria*. Benché questa procedura fosse ineccepibile, vennero presto al pettine molti nodi: innanzi tutto, ci si cominciò a rendere conto che non sempre un sistema di equazioni può essere ridotto alle quadrature e, per di più, non è detto che sia possibile ricavare in modo esplicito una legge oraria.

Mutuata dalle sostanziali innovazioni concettuali di Lagrange, nacque allora, per la prima volta in Liouville, la convinzione di dover cambiarepunto di vista, a cominciare dalla definizione stessa di *integrabilità*, destinata a slegarsi, in modo sempre più decisivo, dalla possibilità effettiva di rappresentare analiticamente le soluzioni di un problema di evoluzione.

## 1.1 La teoria classica

È quanto mai arduo definire una "*teoria classica*" per i sistemi dinamici. Sicuramente, esistono molteplici vie, per farlo. Alcune di queste vie sono assai popolari, soprattutto in relazione alla loro utilità nelle applicazioni. Altre hanno avuto meno fortuna.

### 1.1.1 Il principio di minima azione e le equazioni del moto

Quale che sia la strada che si intende seguire nello studio dell'integrabilità dei sistemi dinamici, non c'è dubbio sulla necessità di partire da un *principio di minima azione*.

Sia $M$ una *varietà differenziabile* $n$-dimensionale, e sia $m$ un suo punto, avente coordinate $(q_1, ..., q_n)$. Tali coordinate identificano un *vettore controvariante* $\vec{q}$ su $M$, cioè un vettore che si trasforma con l'inversa[1] della matrice del cambiamento di base.

Al variare di un parametro $t \in \mathbb{R}$, i vettori $\vec{q}(t)$ parametrizzano una *curva regolare* sulla varietà $M$.

In ciascun punto di questa curva, denotiamo[2] con $\dot{\vec{q}}(t)$ i *vettori tangenti* alla varietà $M$. Le coppie $(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t))$ parametrizzano lo *spazio tangente* $T_m(M)$ alla varietà $M$, nel punto $m$ avente coordinate $\vec{q}(t)$.

L'unione degli spazi tangenti, fatta su tutti i punti della varietà $M$, è detta *fibrato tangente* e si indica con $TM$.

Sia $\mathcal{L} : TM \to \mathbb{R}$ un funzionale regolare. Fissiamo due punti della varietà aventi coordinate $\vec{q}(t_i)$ e $\vec{q}(t_f)$ rispettivamente, su una qualche curva regolare $\vec{q}(t)$ che li contenga entrambi, e consideriamo

$$\mathcal{I}(t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t))dt. \tag{1.1}$$

$\mathcal{L}$ è detto *lagrangiana*; $\mathcal{I}$ è detto *integrale d'azione*.

I *punti critici* dell'integrale d'azione rappresentano le traiettorie di un sistema meccanico le cui equazioni del moto sono date dalla celebre relazione

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{q}} = 0, \tag{1.2}$$

dette *equazioni di Eulero - Lagrange*. Un sistema meccanico per il quale esista una tale rappresentazione si dice *naturale*.

Poniamo $\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{q}}}$. Questo vettore è *covariante*, cioè si trasforma con la stessa matrice del cambiamento di base[3]. La trasformazione

$$H(p, q) = p\dot{q} - \mathcal{L}(p, q) \tag{1.3}$$

[1] La matrice trasposta, nel caso di trasformazioni ortogonali.

[2] Il punto indica la derivata rispetto al parametro $t$.

[3] D'ora in poi, per semplificare le notazioni, ometteremo il segno di vettore sopra la lettera che lo rappresenta.

è detta *trasformata di Legendre.* Il funzionale $H$ è detto *hamiltoniana* del sistema.

Le coppie $(p, q)$ parametrizzano lo *spazio cotangente* $T_m^*M$. L'unione di questi spazi

$$T^*M \stackrel{def}{=} \bigcup_{m \in M} T_m^*M \tag{1.4}$$

è detta *fibrato cotangente.*

Dalla (1.2) si ricavano le *equazioni di Hamilton*:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} \\ \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} \end{array} \tag{1.5}$$

Un sistema dinamico per il quale valgono le equazioni (1.5) è detto *hamiltoniano.* Per sistemi di questo tipo esiste una definizione di tipo geometrico, in un certo senso più diretta, basata sui *campi vettoriali* e sulle *parentesi di Poisson.*

### 1.1.2 Campi vettoriali

Il concetto di *campo vettoriale,* fondamentale in geometria differenziale, è basilare per ben comprendere le caratteristiche geometriche dei sistemi dinamici integrabili.

Esistono moltissime definizioni di campo vettoriale, naturalmente equivalenti tra loro. Nel seguito adotteremo la seguente

**Definizione 1.1** *Un campo vettoriale $X$ è un operatore differenziale omogeneo del primo ordine*

$$X \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{1.6}$$

*dove le $X_k = X_k(x_1, ..., x_n)$ sono funzioni delle variabili dinamiche.*

Denoteremo con $\nu^1(M)$ l'insieme dei campi vettoriali definiti su una varietà $M$.

Un campo vettoriale è una differenziazione, cioè soddisfa:

$$\begin{array}{lr} X(f+g) = X(f) + X(g) & \text{(linearità)} \\ X(fg) = X(f)g + fX(g) & \text{(regola di Leibniz)} \end{array} \tag{1.7}$$

$\forall f, g$ regolari [4] da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ o, più in generale, da una varietà regolare $M$, localmente isomorfa ad $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$.

Conseguenza immediata della seconda di queste proprietà è l'azione dei campi vettoriali su elementi costanti:

$$X(c) = 0, \quad \forall c \in \mathbb{R}^n \tag{1.8}$$

La più importante operazione tra campi vettoriali è la loro *parentesi di Lie*:

**Definizione 1.2** *Dati due campi vettoriali $X$ e $Y$ la loro* parentesi di Lie *è definita come il* commutatore *degli operatori differenziali che essi rappresentano:*

$$[X, Y] \stackrel{def}{=} XY - YX \tag{1.9}$$

È immediato verificare che $[X, Y]$ risulta essere ancora un operatore differenziale del primo ordine omogeneo della forma (1.6), cioè, se

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$Y = \sum_{k=1}^{n} Y_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

allora esso è un campo vettoriale

$$Z = [X, Y], \qquad Z = \sum_{k=1}^{n} Z_k \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{1.10}$$

dove $Z_k = X(Y_k) - Y(X_k)$.

Altre proprietà elementari della parentesi di Lie, che seguono immediatamente dalle definizioni, sono le seguenti:

- bilinearità

$$\begin{aligned} [\alpha X + \beta Y, Z] &= \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z] \\ [X, \alpha Y + \beta Z] &= \alpha[X, Y] + \beta[X, Z] \end{aligned} \tag{1.11}$$

[4] Assumiamo che $f$ e $g$ siano almeno $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. In effetti tratteremo sempre funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

- antisimmetria

$$[X, Y] = -[Y, X] \tag{1.12}$$

- identità di Jacobi

$$[X, [Y, Z] + [Y, [Z, X] + [Z, [X, Y] = 0 \tag{1.13}$$

dove $X, Y, Z$ sono campi vettoriali ed $\alpha, \beta$ sono costanti.

### 1.1.3 Parentesi di Poisson

Uno degli strumenti fondamentali adottati dalla meccanica classica sono le cosiddette *parentesi di Poisson*. Vedremo nel seguito come esse possano essere interpretate come una struttura aggiuntiva di cui una data varietà può essere dotata. In effetti, tuttavia, le parentesi di Poisson vengono di solito definite ed interpretate in modo assai più concreto, come strumento naturale per il calcolo nello spazio delle fasi di un determinato sistema meccanico. L'esempio più tipico di parentesi di Poisson è anche quello che, almeno per il momento, prenderemo come definizione.

Consideriamo un sistema meccanico hamiltoniano ad $n$ gradi di libertà. Le equazioni del sistema possono essere scritte in termini delle $2n$ *variabili canoniche* che parametrizzano lo *spazio delle fasi* $T^*M$, che è il fibrato cotangente alla varietà $M$ su cui avviene il moto. A titolo di esempio, considereremo per il momento il caso in cui lo spazio delle fasi sia lo stesso $\mathbb{R}^{2n}$. Ovviamente, ciò non è soltanto utile a livello esemplificativo, infatti, anche nei casi più generali, ci si potrà sempre rammentare del fatto che una varietà regolare $k$-dimensionale è localmente isomorfa allo spazio $\mathbb{R}^k$.

**Definizione 1.3** *Date due funzioni $f, g \in C^\infty(T^*M)$ si dice* parentesi di Poisson *di $f$ e $g$ la funzione*

$$\{f, g\} \stackrel{def}{=} \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_i} (J_0)_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j} \tag{1.14}$$

*dove*

$$J_0 \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

Spesso le coordinate $x_1, ..., x_{2n}$ si scrivono nella forma $p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n$. In tal modo la parentesi assume la nota forma

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}. \tag{1.16}$$

Una prima estensione del concetto di parentesi di Poisson può essere fatta in base alla seguente

**Definizione 1.4** *Una matrice quadrata $M$, di ordine $2n$, si dice* simplettica *se*

$$^{t}MJ_0M = J_0 \tag{1.17}$$

Supponiamo di operare un cambiamento di coordinate

$$(p', q') = S(p, q) \tag{1.18}$$

dove $S$ è una funzione regolare di $p$ e $q$. Si dice che $S$ è una *trasformazione canonica* delle coordinate se la *matrice jacobiana* della trasformazione è simplettica.

È immediato verificare che l'insieme delle matrici simplettiche $\mathbf{Sp}(2n, \mathbb{R})$ è un *gruppo*, sottogruppo di $\mathbf{GL}(2n, \mathbb{R})$.

**Proposizione 1.1** *Sia $M \in \mathbf{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Se*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

*con $A, B, C, D$ sottomatrici quadrate di ordine $n$, allora*

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} ^{t}D & -^{t}B \\ -^{t}C & ^{t}A \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

Una trasformazione canonica preserva la struttura delle parentesi di Poisson. Questo fatto permette di considerare, nella definizione 1.3, una matrice $J = MJ_0$, con $M \in \mathbf{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Si vede facilmente che una siffatta matrice $J$ è antisimmetrica.

La parentesi così ridefinita è perciò un'operazione binaria *antisimmetrica*

$$\{f, g\} = -\{g, f\}.$$

Essa soddisfa, inoltre, l'*identità di Jacobi*

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0,$$

che, in termini della matrice $J$, fornisce la relazione differenziale quadratica

$$J_{ik}\partial_k J_{lm} + J_{lk}\partial_k J_{mi} + J_{mk}\partial_k J_{il} = 0. \tag{1.21}$$

detta anche *relazione di chiusura*. Infine essa soddisfa la *regola di Leibniz*

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$$

detta così perchè ricorda da vicino la regola di derivazione di un prodotto di funzioni. In effetti spesso si dice che una parentesi di Poisson è una *derivazione*, come risulterà chiaro grazie alla prossima

**Definizione 1.5** *Sia $f$ una funzione regolare. Si dice* campo vettoriale hamiltoniano *di $f$ il campo vettoriale*

$$X_f = \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_i} J_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{1.22}$$

Questa definizione comporta che, facendo agire il campo vettoriale, cioè saturando l'operatore differenziale del primo ordine, esso si riduce ad una parentesi di Poisson:

$$X_f(g) = \{f, g\}$$

### 1.1.4 Strutture simplettiche

Considerare una parentesi di Poisson, per come l'abbiamo definita, equivale a considerare una *struttura simplettica* sullo spazio delle fasi $T^*M$. Precisamente, essendo $J$ non degenere [5], esiste la sua inversa, tradizionalmente denotata con $\omega$, cioè

$$(J^{-1})_{ij} = \omega_{ij}. \tag{1.23}$$

[5] $J$ è la matrice associata alla parentesi di Poisson.

Si è soliti definire questa matrice ancora come *matrice simplettica*[6]. Evidentemente essa è, al pari di $J$, antisimmetrica

$$ {}^t\omega = -\omega. \tag{1.24} $$

Date due funzioni $f, g \in C^\infty(M)$, la loro parentesi di Poisson può essere riscritta in termini della matrice simplettica $\omega$:

$$ \{f, g\} =< \bigtriangledown f, J \bigtriangledown g >=< \omega X_f, X_g > \stackrel{def}{=} \omega(X_f, X_g) \tag{1.25} $$

dove

$$ X_f = \omega^{-1} \bigtriangledown f $$
$$ X_g = \omega^{-1} \bigtriangledown g $$

sono i campi vettoriali relativi, rispettivamente, alla $f$ e alla $g$ e $< \cdot, \cdot >$ è il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^{2n}$.

Questa operazione è naturalmente definita per qualsiasi coppia di campi vettoriali $X, Y$:

$$ \omega(X, Y) =< \omega X, Y > $$

Una strada alternativa, nonché assai più generale, per definire una struttura simplettica su una varietà è la seguente:

**Definizione 1.6** *Una* varietà simplettica$(M, \omega)$ *è una varietà regolare $M$ dotata di una 2-forma differenziale chiusa non degenere $\omega$.*

Dette, al solito, $x_i$ le coordinate che parametrizzano localmente la varietà, abbiamo:

$$ \omega = \omega_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j. \tag{1.26} $$

Il fatto che la 2-forma sia non degenere comporta che $\det(\omega_{ij}(x)) \neq 0$ in ogni punto $x$ della varietà $M$. Conseguenza di ciò è l'esistenza di una matrice inversa, che è appunto la già considerata $J$. L'antisimmetria [7] implica infine che la varietà $M$ ha *dimensione pari* [8].

[6]Purtroppo la terminologia coincide con quella della definizione 1.4. D'altra parte, ciò è giustificato dall'analogia fra le proprietà che riguardano le due classi di matrici che abbiamo considerato.

[7]Conseguenza del carattere antisimmetrizzante del prodotto *wedge* $\wedge$.

[8]Questo punto, infatti, non era stato considerato tra le ipotesi della definizione 1.6.

La condizione $d\omega = 0$, nelle coordinate locali, si riduce alla condizione lineare [9] detta ancora *identità di Jacobi* o *relazione di chiusura*:

$$\partial_i \omega_{jk} + \partial_j \omega_{ki} + \partial_k \omega_{ij} = 0 \tag{1.27}$$

dove si è posto $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $x_1, ..., x_{2n}$ rappresentano un sistema di coordinate per $M$.

Questa formulazione permette di interpretare $J = \omega^{-1}$ come un tensore antisimmetrico controvariante di rango 2. Proprio tale considerazione permetterà di generalizzare la teoria nei prossimi capitoli.

È interessante notare, ancora, che $\omega(X_H, \cdot) = dH$, come è facile vedere. Ciò significa, quindi, che la saturazione parziale di una forma simplettica con un campo vettoriale hamiltoniano dà come risultato una 1-forma che è esattamente il differenziale della funzione che genera il campo.

Tutte le varietà simplettiche hanno localmente la stessa struttura, cioè, come si dice, sono *simpletticamente equivalenti* o *simpletticamente isomorfe*. Il teorema che sancisce e precisa questa asserzione è il notissimo

**Teorema 1.1** *(di Darboux) Per ogni punto $x$ di una varietà simplettica $(M, \omega)$ esiste un sistema di coordinate locali $(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n)$ tale che, in un intorno di $x$, la forma si scrive con l'espressione standard*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i \tag{1.28}$$

Dal teorema segue subito il

**Corollario 1.1** *Varietà simplettiche della stessa dimensione sono localmente simpletticamente isomorfe* [10].

## 1.2 Sistemi hamiltoniani e loro integrabilità

Lo studio dell'integrabilità dei sistemi hamiltoniani occupa un posto speciale nella Fisica matematica. I riferimenti bibliografici sono, pertanto, pressoche infiniti. Ad ogni modo, tutte le definizioni e le dimostrazioni dei teoremi

[9] Ricordiamo che l'analoga proprietà per le parentesi di Poisson definite in precedenza era espressa in termini di un'equazione quadratica.

[10] A volte è questo corollario ad essere chiamato *Teorema di Darboux*.

classici che saranno enunciati nel paragrafo, sono contenute, ad esempio, in [2, 3, 23]. Per l'estensione al caso infinito-dimensionale si veda [20].

Grazie alle notazioni introdotte in precedenza è ora possibile definire un *sistema hamiltoniano*, nel modo seguente:

**Definizione 1.7** *Si dice* sistema hamiltoniano *un sistema dinamico per il quale le equazioni del moto possano scriversi nella forma*

$$\dot{x} = \{H, x\} \tag{1.29}$$

*dove* $x = (x_1, ..., x_{2n})$*. La funzione* $H$ *prende il nome di* funzione di Hamilton*, o più semplicemente* Hamiltoniana*, del sistema.*

Nel linguaggio dei campi vettoriali, un sistema hamiltoniano si scrive nella forma

$$\dot{x} = X_H(x) \tag{1.30}$$

dove $X_H(x)$ indica l'azione del campo hamiltoniano relativo alla funzione $H$ sulle funzioni coordinate.

L'integrabilità di un sistema dinamico hamiltoniano è assicurata dall'esistenza di un numero sufficiente di integrali primi.

### 1.2.1 L'integrabilità secondo Liouville

**Definizione 1.8** *Una funzione* $F$ *su una varietà simplettica* $M$ *è un* integrale primo *di un sistema hamiltoniano con Hamiltoniana* $H$ *se solo se*

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \{H, F\} = 0 \tag{1.31}$$

La condizione (1.31) significa che $F$ è *costante* lungo le soluzioni del sistema (1.29) o, equivalentemente, del sistema (1.30). Sia, infatti, $F = F(t, x_1(t), ..., x_{2n}(t))$. Si ha:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial F}{\partial x_j}\dot{x}_j = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial F}{\partial x_j}\{H, x_j\} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{H, F\}$$

Nel caso in cui non si abbia dipendenza temporale esplicita la (1.31) si riduce a

$$\{H, F\} = 0 \tag{1.32}$$

Nel seguito avremo a che fare con sistemi di questo tipo, detti *sistemi autonomi*.

Diamo ora la

**Definizione 1.9** *Due funzioni la cui parentesi di Poisson sia nulla si dicono* in involuzione.

Grazie alla definizione 1.8 possiamo finalmente precisare il concetto di integrabilità attraverso la seguente

**Definizione 1.10** *Un sistema hamiltoniano su una varietà simplettica $2n$-dimensionale $M$ si dice* completamente integrabile *se possiede $n$ integrali primi del moto funzionalmente indipendenti in involuzione.*

Il risultato fondamentale che chiarisce il significato del concetto di integrabilità è il celebre

**Teorema 1.2** *(di Arnol'd - Liouville) Sia $M$ una varietà simplettica di dimensione $2n$ e supponiamo che esistano $n$ funzioni regolari in involuzione*

$$F_1, ..., F_n; \quad \{F_i, F_j\} = 0 \quad i, j = 1, ..., n.$$

*Consideriamo una superficie di livello delle funzioni $F_i$,*

$$M_f = \{x \in M | F_i(x) = f_i, i = 1, ..., n\}.$$

*Supponiamo inoltre che su tale superficie di livello $M_f$ le funzioni $F_i$ siano indipendenti* [11]. *Allora valgono i seguenti fatti:*

1. *$M_f$ è una varietà regolare invariante rispetto al flusso di fase dell'Hamiltoniana $H = H(F_1, ..., F_n)$*[12].

2. *$M_f$ è dotata di una struttura affine canonica nella quale il flusso di fase appare linearizzato, cioè, esitono delle coordinate affini $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$ tali che, su $M_f$, si ha $\dot{\phi} = cost.$.*

[11] Ciò si può esprimere dicendo che $dF_1 \wedge ... \wedge dF_n \neq 0$ in ogni punto di $M_f$ ovvero che il Wronskiano di tali funzioni è ovunque non degenere su tale superficie di livello. Va notato che l'indipendenza funzionale delle $F_i$ garantisce che i campi vettoriali hamiltoniani $X_{F_i}$ costituiscano una base dello spazio tangente $TM_f$.

[12] Ad esempio, si può prendere, per semplicità, $H = F_1$.

Un caso di particolare interesse in questo ambito si ha quando la superficie di livello $M_f$ è compatta. Dalle ipotesi del teorema (1.2) segue, infatti, che ogni componente connessa di $M_f$ è un toro $n$-dimensionale. Il flusso hamiltoniano su un siffatto toro può essere *periodico* o *condizionatamente periodico*. Ricordando che ogni toro è ottenibile, dal punto di vista topologico, come quoziente di un ipercubo rispetto all'identificazione delle facce opposte[13], si ha che, nel secondo caso, le curve di fase sono l'immagine sul toro del flusso all'interno dell'ipercubo, prolungato periodicamente.

### 1.2.2 Le variabili azione - angolo

Supponiamo che $M = \mathbb{R}^{2n}$ sia lo spazio delle fasi standard, e supponiamo che la sottovarietà di livello $M_0 = M_f|_{f=0}$ sia compatta e soddisfi le condizioni del teorema (1.2). Allora, in un intorno di $M_0$ le sottovarietà $M_f$ sono *tori lagrangiani n-dimensionali*[14]. Scegliendo una base $(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ di cicli unidimensionali sul toro $M_f$, dipendenti in modo continuo da $f$, si pone

$$I_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k(f)} pdq, \quad k = 1, ..., n. \tag{1.33}$$

Le funzioni $I_k = I_k(F(p, q))$ sono dette *variabili d'azione*. In questo contesto, vale il seguente

**Teorema 1.3** *In un intorno del toro $M_0$ si può introdurre la struttura di un prodotto diretto $(\mathbb{R}^{2n}/2\pi\mathbb{Z}^n) \times \mathbb{R}^n$, con le coordinate d'azione $(I_1, ..., I_n)$ sul fattore $\mathbb{R}^n$ e coordinate angolari $(\phi_1, ..., \phi_n)$ sul toro $\mathbb{R}^{2n}/2\pi\mathbb{Z}^n$, nel quale la struttura simplettica $\sum dp_k \wedge dq_k$ su $\mathbb{R}^{2n}$ assume la forma*

$$\sum_{k=1}^{n} dI_k \wedge d\phi_k \tag{1.34}$$

### 1.2.3 Il metodo della deformazione isospettrale

Tra gli strumenti di maggiore efficacia nello studio dell'integrabilità di un sistema dinamico, va senza dubbio annoverato il metodo della *deformazione isospettrale*, enunciato per la prima volta da Lax nel 1968, in relazione

[13]Nel caso bidimensionale, in particolare, si tratta, come è noto, di identificare i lati opposti di un quadrato nel piano, quindi, di quozientare rispetto alla relazione di equivalenza indotta da tale identificazione.

[14]Questa terminologia si adotta perchè tali sottovarietà sono superfici di livello massimali, ossia $n$-dimensionali, isotrope rispetto alla forma simplettica $\omega$.

all'annosa questione dell'integrabilità dell'*equazione di Korteweg - De Vries*. Il termine "*deformazione isospettrale*" fu suggerito in seguito, da Moser, nel 1975. Per ulteriori dettagli si veda [23], oppure [3].

L'idea che sta alla base di questo metodo è molto semplice. Supponiamo che un dato sistema dinamico hamiltoniano [15] sia descritto da certe equazioni

$$\dot{x} = \{H, x\}. \tag{1.35}$$

Supponiamo, inoltre, di essere sufficientemente fortunati da trovare una coppia di operatori, ovvero, nel caso finito dimensionale, di matrici quadrate, $L$ ed $M$, tali che le equazioni del moto (1.35) assumano la forma

$$\dot{L} = [L, M] \tag{1.36}$$

dove, $[\cdot, \cdot]$ è, come al solito, il commutatore dei due oggetti. $L$ è detta *matrice di Lax*.

Grazie a questa particolarissima struttura, l'evoluzione temporale della matrice $L(t)$ può essere descritta tramite coniugio con una matrice invertibile $U(t)$ tale che $M = U^{-1}\dot{U}$, cioè:

$$L(t) = U^{-1}(t)L(0)U(t) \tag{1.37}$$

La notevole conseguenza della (1.37) è l'indipendenza temporale degli autovalori della matrice $L(t)$. Si dice, perciò, che la matrice di Lax subisce una *deformazione isospettrale*. Gli autovalori sono, quindi, costanti del moto, ossia *integrali primi*. Spesso, invece degli autovalori, si prendono in considerazione altre quantità invarianti sotto deformazione isospettrale, come i coefficienti del polinomio caratteristico $\det(L - \lambda\mathbb{I}) = 0$ o, equivalentemente, le tracce delle potenze di $L$, tradizionalmente normalizzate nelle quantità

$$I_k = \frac{1}{k} tr(L^k). \tag{1.38}$$

Condizione sufficiente a garantire l'integrabilità è, dunque, che esista un numero sufficientemente grande di queste funzioni che siano anche funzionalmente indipendenti ed in involuzione. È opportuno notare che il metodo è del tutto generale, nel senso che è applicabile non soltanto ai sistemi dinamici definiti su varietà simplettiche, ma è estendibile anche a sistemi più generali, legati, ad esempio, a strutture a parentesi degeneri o agenti su varietà di dimensione dispari. Tali strutture più generali saranno trattate in modo approfondito nel prossimo capitolo.

[15] In effetti non è neppure necessaria, in generale, questa proprietà.

## 1.3 Geometria delle strutture integrabili classiche

Supponiamo, ora, di avere un sistema dinamico hamiltoniano, la cui integrabilità sia assicurata dall'esistenza di $n$ integrali primi del moto indipendenti ed in involuzione $(H_1, ..., H_n)$.

### 1.3.1 La foliazione lagrangiana di una varietà simplettica

Una sottovarietà $C$ di una varietà simplettica $2n$-dimensionale $(M, \omega)$ si dice *lagrangiana* se è *massimale*, cioè $n$-dimensionale, ed è isotropa rispetto alla restrizione su di essa della forma simplettica, ossia

$$\omega|_C = 0 \tag{1.39}$$

L'insieme delle superfici di livello $C(H_i)$ degli integrali del moto è un esempio classico di *sottovarietà lagrangiana*, infatti tale varietà è ovviamente massimale, a causa dell'indipendenza funzionale degli integrali, ed è isotropa, in quanto

$$\omega(X_{H_i}, X_{H_k}) = \{H_i, H_k\} = 0. \tag{1.40}$$

Consideriamo ora l'applicazione che associa all'insieme delle superfici di livello degli integrali del moto una $n$-upla di numeri reali. Le fibre di quest'applicazione sono sottovarietà lagrangiane della varietà simplettica $M$. Si dice che esse costituiscono una *foliazione lagrangiana* della varietà.

Più in generale, si ha la seguente

**Definizione 1.11** *Una* foliazione lagrangiana *è una fibrazione di una varietà simplettica, in cui tutte le fibre sono sottovarietà lagrangiane.*

Grazie a queste osservazioni, possiamo pertanto interpretare una famiglia di sistemi integrabili in termini della foliazione lagrangiana di una varietà simplettica.

In particolare, è interessante notare come la questione dell'integrabilità sia riconducibile alle proprietà geometriche e topologiche della foliazione lagrangiana indotta dagli integrali del moto, come si evince dal seguente

**Teorema 1.4** *Se le foglie della foliazione lagrangiana di una varietà simplettica $M$ sono compatte e connesse, allora esse sono* tori lagrangiani.

La dimostrazione di questo risultato si può trovare in [3, Symplectic Geometry, cap.4].

### 1.3.2 Integrabilità di una varietà simplettica

I campi vettoriali hamiltoniani $X_{H_i}$, associati agli integrali $H_i$, sono indipendenti e sono tangenti, in ogni suo punto, alla varietà simplettica $M$. Essi generano, perciò, l'intero spazio tangente $TM$. In effetti, i campi vettoriali hamiltoniani delle funzioni $C^\infty(M)$, rispetto all'usuale commutatore di campi vettoriali, costituiscono un'*algebra di Lie*.

Le considerazioni relative alla foliazione lagrangiana di una varietà simplettica suggeriscono un cambiamento sostanziale di punto di vista ed una ridefinizione di integrabilità, fondata esclusivamente sulla geometria di $(M, \omega)$, a prescindere dalla presenza su di essa di un sistema dinamico specifico. In questa nuova accezione, le foglie della foliazione lagrangiana sono giustamente ribattezzate *foglie integrali* della varietà $M$. Questa affermazione è giustificata ancora di più nel caso di foglie compatte e connesse, infatti, in questo caso, il teorema 1.4 può essere considerato una rilettura "geometrica" del teorema di Arnol'd - Liouville 1.2.

# Capitolo 2

# Strutture generalizzate

Fino a questo momento abbiamo considerato varietà di dimensione pari dotate di una struttura simplettica e quindi di parentesi di Poisson. Che cosa cambia se consideriamo varietà di dimensione dispari o anche, il che si rivelerà agli effetti pratici la stessa cosa, strutture degeneri?

In linea di principio è possibile definire, in astratto, oggetti che generalizzino le strutture simplettiche e che si riducano ad esse in casi speciali.

## 2.1 Il bivettore di Poisson

La prima considerazione notevole che può essere fatta in questo contesto è la seguente: per definire una parentesi di Poisson, non abbiamo bisogno di una struttura simplettica ma solo di una legge di composizione antisimmetrica per cui valga l'identità di Jacobi e tale che sia anche una *derivazione*.

Una varietà $M$ di dimensione $n$, con $n$, quindi, non necessariamente pari, dotata di una legge di composizione binaria per cui valgano le suddette consuete proprietà, è detta *varietà di Poisson*.

Ciò comporta che $\forall f \in C^\infty(M)$ esiste un campo vettoriale $X_f$, che è appunto il campo vettoriale hamiltoniano di $f$, tale che

$$\{f, g\} = X_f g = -X_g f = dg(f) = -df(g) \tag{2.1}$$

Dalle relazioni 2.1 segue che la parentesi $\{f, g\}$ è determinata da una forma bilineare antisimmetrica su $T^*M$. In altre parole, esiste un *campo tensoriale antisimmetrico a due indici controvarianti* $\mathbf{P} \in \nu^2(M)$ di classe

$C^\infty$, rappresentato da una matrice antisimmetrica $P$, tale che [1]

$$\{f, g\} = \mathbf{P}(df, dg) = P^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \tag{2.2}$$

dove $x^i$ sono coordinate locali sulla varietà $M$.

**Definizione 2.1** *Un campo tensoriale* $\mathbf{P} \in \nu^2(M)$ *per il quale valga la (2.2) si dice* bivettore di Poisson *associato alla coppia* $(M, \{,\})$.

Nel seguito, sarà pertanto indifferente riferirsi ad una varietà di Poisson come ad una coppia $(M, \{,\})$ oppure ad una coppia $(M, \mathbf{P})$.

Molto spesso, un bivettore di Poisson si trova scritto nella forma:

$$\mathbf{P} = P^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{2.3}$$

dove $\wedge$ è il classico *prodotto esterno,* o *prodotto wedge*[2]. La scrittura (2.3) è del tutto equivalente alla (2.2), grazie alla proprietà di antisimmetria della matrice $P$.

Il bivettore $\mathbf{P}$ induce un omomorfismo di fibrati vettoriali

$$\# : T^*M \to TM \tag{2.4}$$

definito in modo che, posto $\#\alpha = \alpha^\#$, si abbia

$$\beta(\alpha^\#) = \mathbf{P}(\alpha, \beta) \tag{2.5}$$

con $\alpha, \beta \in T^*M$.

In particolare, va notato che $\forall f \in C^\infty(M)$ si ha $(df)^\# = X_f$.

In virtù della rappresentazione 2.2 del bivettore $\mathbf{P}$, l'*identità di Jacobi* assume la forma

$$P^{hi}\partial_h P^{jk} + P^{hj}\partial_h P^{ki} + P^{hk}\partial_h P^{ij} = 0 \tag{2.6}$$

dove, per brevità, si è posto $\partial_h = \frac{\partial}{\partial x^h}$.

Nel caso già considerato di una varietà simplettica $(M, \omega)$, dove $\omega$ è una 2-forma chiusa non degenere, la struttura di Poisson su $M$ si ottiene banalmente:

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g).$$

[1] Usando la convenzione di Einstein.

[2] Si vedano, ad esempio, [19, cap.3], oppure [29, par.40].

### 2.1.1 La parentesi di Schouten

La *parentesi di Schouten* [3] è un interessante strumento per verificare se un campo tensoriale sia o meno un bivettore di Poisson.

Sia, al solito, $M$ una varietà differenziabile. Sia $\nu^i(M)$ lo spazio degli *i-vettori*, cioè dei campi tensoriali antisimmetrici controvarianti di tipo $(i, 0)$, e sia $\nu(M) = (\bigoplus_{i=0}^{n} \nu^i(M), \wedge)$, dove $\nu^0(M) = C^\infty(M)$, l'*algebra grassmanniana controvariante di* $M$. È noto che $\forall X \in \nu^1(M)$ esiste una ben definita operazione di *derivata di Lie*, $L_X$, che agisce, in particolare, su $\nu^q(M)$ nel modo seguente:

$$(L_X\mathbf{Q})(x_0) = \frac{d}{d\tau}|_{\tau=0} \quad \{{}^t\exp(-\tau X)\mathbf{Q}(\exp \tau X(x_0))\} \tag{2.7}$$

dove $x_0 \in M, \mathbf{Q} \in \nu^q(M)$. In particolare, per $X, Y \in \nu^1(M)$, essa si riduce a:

$$L_X Y = [X, Y] \tag{2.8}$$

È allora naturare definire la seguente legge di composizione:

$$[X_1 \wedge ... \wedge X_p, \mathbf{Q}] = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} X_1 \wedge ... \wedge \hat{X}_i \wedge ... \wedge X_p \wedge [X_i, \mathbf{Q}] \tag{2.9}$$

dove $[X_i, \mathbf{Q}] \stackrel{def}{=} L_X\mathbf{Q}$ ed il cappuccio denota l'assenza del fattore corrispondente. Usando la relazione (2.9) è possiblie provare il seguente teorema, che definisce la *parentesi di Schouten* e ne stabilisce le proprietà salienti:

**Teorema 2.1** *Sia $M$ una varietà differenziabile. Allora esiste un'unica estensione $\mathbb{R}$-bilineare di tipo locale della derivata di Lie $L_X$ ad una legge di composizione*

$$[\cdot, \cdot] : \nu^p(M) \times \nu^q(M) \to \nu^{p+q-1}(M) \tag{2.10}$$

*per la quale sia verificata la relazione (2.9). Questa legge di composizione soddisfa inoltre le seguenti proprietà:*

$$\begin{gathered} [\mathbf{P}, \mathbf{Q}] = (-1)^{pq}[\mathbf{Q}, \mathbf{P}] \\ [\mathbf{P}, \mathbf{Q} \wedge \mathbf{R}] = [\mathbf{P}, \mathbf{Q}] \wedge \mathbf{R} + (-1)^{pq+q}\mathbf{Q} \wedge [\mathbf{P}, \mathbf{R}] \\ (-1)^{p(r-1)}[\mathbf{P}, [\mathbf{Q}, \mathbf{R}]] + (-1)^{q(p-1)}[\mathbf{Q}, [\mathbf{R}, \mathbf{P}]] + (-1)^{r(q-1)}[\mathbf{R}, [\mathbf{P}, \mathbf{Q}]] = 0 \end{gathered} \tag{2.11}$$

[3] A volte è detta anche *parentesi di Schouten-Nijenhuis*, dato che il primo a menzionarla in questo ambito fu il matematico olandese Nijenhuis in un articolo del 1955.

Per la dimostrazione si veda [32, pag.7–8].

Nel caso dei bivettori è pertanto immediato provare l'importante risultato che caratterizza le strutture di Poisson:

**Teorema 2.2** *Un campo bivettoriale* $\mathbf{P} \in \nu^2(M)$ *è un bivettore di Poisson su* $M$ *se solo se*

$$[\mathbf{P}, \mathbf{P}] = 0. \tag{2.12}$$

Per la dimostrazione si veda ancora [32, pag.10][4].

### 2.1.2 Funzioni di Casimir

Una sostanziale differenza tra le varietà simplettiche e quelle di Poisson sta nel fatto che, come abbiamo già accennato, queste ultime possono essere associate a parentesi di Poisson *degeneri*. In altre parole, se, fissata una funzione $f \in C^\infty(M)$, consideriamo le parentesi come applicazione lineare

$$\{f, \cdot\} : M \to M \tag{2.13}$$

non è affatto escluso che essa abbia nucleo non banale.

Utilizzando il linguaggio dei bivettori di Poisson è possibile formalizzare questo comportamento nella seguente

**Definizione 2.2** *Sia* $(M, \mathbf{P})$ *una varietà di Poisson. Si dicono* funzioni di Casimir *o, talvolta, semplicemente* Casimir *del bivettore* $\mathbf{P}$ *le funzioni i cui differenziali appartengono a* $\ker(\mathbf{P}df)$, $\forall f \in C^\infty(M)$.

I differenziali delle *funzioni di Casimir* sono, quindi, elementi del nucleo dei campi vettoriali hamiltoniani $X_f = \mathbf{P}df$, intesi come applicazioni lineari.

Nel linguaggio delle parentesi di Poisson, ricercare i Casimir significa trovare il più grande sottoinsieme $C \subset C^\infty(M)$ tale che

$$\{f, C\} = 0, \qquad \forall f \in C^\infty(M) \tag{2.14}$$

L'importanza del concetto di funzioni di Casimir risiede nel fatto che esse costituiscono il *centro* $C$ dell'*algebra di Lie* associata alla parentesi indotta dal bivettore di Poisson $\mathbf{P}$. In particolare, perciò, le funzioni di Casimir

[4] Va notato che Magri definisce i bivettori di Poisson in [15] proprio in base alla proprietà (2.12).

possono essere considerate *funzioni invarianti* per un sistema hamiltoniano. È chiaro, comunque, che si tratta di integrali, in un certo senso, "banali", dato che commutano, in effetti, non soltanto con l'hamiltoniana del sistema, ma con ogni altra funzione definita sulla varietà $M$. Esse tuttavia sono spesso uno strumento assai utile per studiare l'integrabilità del sistema. Infatti, quozientando l'algebra $(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$ rispetto al suo centro, si opera in effetti una *riduzione* della varietà $M$, nel senso che si riducono i gradi di libertà del sistema hamiltoniano definito su di essa. La *varietà ridotta* $M'$ che si ottiene è, di conseguenza, tale che

$$\dim M' = \dim M - \dim C,$$

ed è dotata di una *struttura di Poisson ridotta* $\mathbf{P}'$.

È bene notare, comunque, che il *rango* del bivettore di Poisson [5], inteso semplicemente come rango della matrice delle coordinate, è invariante rispetto alla riduzione operata attraverso il quoziente.

### 2.1.3 Parentesi di 1-forme

Un aspetto interessante delle varietà di Poisson è l'esistenza di una versione controvariante del calcolo differenziale di forme, basata sulla possibilità di estendere la parentesi di Poisson, finora definita, seppure in astratto, sempre per funzioni, alle *1-forme.* Ciò fu messo in evidenza da Gel'fand e soprattutto da Magri all'inizio degli anni '80 nel già citato [15].

Denotiamo con $\Lambda^k M$ lo spazio delle *k-forme* differenziali su una varietà differenziabile $M$. Si ha il seguente importante risultato:

**Teorema 2.3** *Sia* $(M, \mathbf{P})$ *una varietà di Poisson. Allora esiste un'unica legge di composizione* $\mathbb{R}$*-bilineare e antisimmetrica*

$$\{\cdot,\cdot\} : \Lambda^1 M \times \Lambda^1 M \to \Lambda^1 M$$

*tale che*

$$\{df, dg\} = d\{f, g\} \quad f, g \in C^\infty(M) \tag{2.15}$$

$$\{\alpha, f\beta\} = f\{\alpha, \beta\} + (\alpha^\# f)\beta \quad f \in C^\infty(M), \alpha\beta \in \Lambda^1 M \tag{2.16}$$

[5] Questo rango non è sempre costante per le varietà di Poisson. Esso, infatti, dipende dal punto $m \in M$ in cui si calcola la matrice delle coordinate.

*Inoltre, questa legge dota $\Lambda^1 M$ di una struttura di algebra di Lie tale che $\# : \Lambda^1 M \to \nu^1(M)$ sia un omomorfismo di algebre di Lie, cioè:*

$$\{\alpha, \beta\}^{\#} = [\alpha^{\#}, \beta^{\#}]. \tag{2.17}$$

Per la dimostrazione si rimanda a [32, pag.41–42].

### 2.1.4 Algebroidi di Lie

Gli *algebroidi di Lie* generalizzano il ben noto concetto di *algebra di Lie*. La terminologia fu originariamente adottata in [13].

**Definizione 2.3** *Un* algebroide di Lie *è una terna $(E, M, S)$, dove $E$ è un fibrato vettoriale sulla varietà $M$ ed $S : M \to E$ è una sezione del fibrato, accoppiata ad una mappa tra fibrati $A : E \to TM$ detta* àncora *e ad una parentesi $[\cdot,\cdot] : \Gamma E \times \Gamma E \to \Gamma E$, dove $\Gamma E$ è l'insieme delle sezioni $S$ del fibrato $E$, $\mathbb{R}$-bilineare, antisimmetrica, soddisfacente l'identità di Jacobi e tale che*

$$A([X, Y]) = [A(X), A(Y)], \tag{2.18}$$

$$[X, uY] = u[X, Y] + (A(X))_u Y$$

$\forall X, Y \in \Gamma E, u \in C(M)$.

L'algebroide è *transitivo* se $A$ è una summersione, *regolare* se $A$ è localmente di rango costante, *totalmente intransitivo* se $A = 0$. $M$ è detta *base* di $E$.

Se $E'$ è un secondo algebroide di Lie sulla stessa base $M$, allora un *morfismo* di algebroidi $\phi : E \to E'$ su $M$ è un morfismo di fibrati vettoriali tale che $A' \circ \phi = A$ e $\phi[X, Y] = [\phi(X), \phi(Y)], \forall X, Y \in \Gamma\ E$.

Gli esempi più elementari di algebroidi di Lie sono naturalmente algebre di Lie, fibrati di algebre di Lie, ed il fibrato tangente $TM$ ad una varietà $M$.

Un altro esempio è fornito dal risultato 2.3, che stabilisce, in particolare, che la terna $(T^*M, M, \#)$ è un *algebroide di Lie*, con la parentesi di Poisson indotta dal bivettore $\mathbf{P}$.

L'*àncora* di un algebroide $E$ codifica le sue proprietà geometriche. Se $E$ è transitivo allora le inverse a destra dell'àncora sono connessioni in $E$. Se $E$ è regolare allora l'immagine dell'àncora definisce una foliazione della varietà base e su ciascuna foglia di tale foliazione l'algebroide è transitivo.

Per giustificare l'introduzione, in questa trattazione, del concetto di algebroide, occorre ribadire ancora che esso generalizza quello di algebra di Lie. Un'algebra di Lie si ottiene (si veda [21, pag.330–338]) come spazio tangente nell'unità ad un gruppo di Lie. Per un algebroide esiste un analogo, valido, tuttavia, solo localmente. Al posto dei gruppi di Lie, in questo caso, le strutture che vengono considerate sono i *gruppoidi simplettici*. Quando un algebroide può essere interpretato, come spazio tangente nell'unità ad un gruppoide simplettico, esso si dice *integrabile* (per una trattazione completa si veda [32, cap.9]).

## 2.2 La geometria di una varietà di Poisson

I bivettori di Poisson generalizzano, come abbiamo visto, le strutture simplettiche. Ciò è vero anche sotto un punto di vista più strettamnte geometrico: data una varietà di Poisson, infatti, è possibile trovare delle sottovarietà di essa che sono dotate in modo naturale di una struttura simplettica, indotta dal bivettore di Poisson. Tali varietà, dette *foglie simplettiche*, costituiscono quella che si dice una *foliazione simplettica*. In questo modo, un sistema meccanico hamiltoniano può essere interpretato in termini di *foliazione lagrangiana* delle *foglie simplettiche*. Per le dimostrazioni dei risultati contenuti in questo paragrafo, si veda, ad esempio, [32, cap.2].

### 2.2.1 Distribuzioni

Sia $M$ una varietà di Poisson e sia $T_xM$ lo spazio tangente in un suo punto $x$.

**Definizione 2.4** *Si dice* distribuzione *un insieme di sottospazi vettoriali*

$$S(M) = \{S_x(M)|x \in M\} \tag{2.19}$$

*dello spazio tangente $T_xM$.*

Una *distribuzione* si dice *differenziabile* se $\forall x \in M$ esiste un numero finito di campi vettoriali differenziabili $X_1, ..., X_s \in S(M)$, che, calcolati in $x$, generano il sottospazio $S_x(M)$.

Una distribuzione si dice *completamente integrabile* se esiste una sottovarietà $M' \subset M$ tale che $T_xM' = S_x(M)$, $\forall x \in M'$.

**Definizione 2.5** *Una distribuzione differenziabile $S(M)$ si dice* invariante *se esiste un insieme $\chi_0$ di campi vettoriali tale che, $\forall x \in M$, i valori dei campi di $\chi_0$ in $x$ generano $S_x(M)$, e $\forall X \in \chi_0, \forall \tau \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in M$ per cui sia definito* $(\exp(\tau X)(x)$, *si abbia*

$$^t(\exp \tau X)[S_x(M)] = S_{(\exp \tau X)(x)}(M) \tag{2.20}$$

Il risultato fondamentale in questo contesto è il

**Teorema 2.4** *(di Sußmann - Stefan - Frobenius) Una distribuzione differenziabile $S(M)$ è integrabile se solo se è una distribuzione invariante.*

In pratica, volendo provare l'integrabilità di una distribuzione, basta verificare che essa costituisce una *sottoalgebra invariante* dell'algebra di Lie $\nu^1(M)$ dei campi vettoriali sulla varietà $M$.

### 2.2.2 La foliazione simplettica di una varietà di Poisson

**Definizione 2.6** *La distribuzione*

$$S(M) \stackrel{def}{=} \{\mathbf{P}df | f \in C^\infty(M)\} \tag{2.21}$$

*si dice* distribuzione caratteristica *sulla varietà $M$ del bivettore di Poisson* $\mathbf{P}$.

Questa distribuzione è ovviamente *differenziabile*, perchè lo sono i campi vettoriali hamiltoniani $X_f = \mathbf{P}df$.

**Teorema 2.5** *La distribuzione caratteristica $S(M)$ di una varietà di Poisson $(M, \mathbf{P})$ è completamente integrabile. Inoltre, la struttura di Poisson induce strutture simplettiche sulle foglie $S_x(M)$ di $S(M)$.*

La dimensione $\rho(x)$ delle foglie $S(x) = S_x(M)$ si dice *rango* della struttura di Poisson nel punto $x \in M$. Poiché le foglie sono sottovarietà simplettiche, questo rango è un numero intero pari. È evidente che questo numero $\rho(x)$ non è necessariamente costante in ogni punto $x \in M$, tuttavia, se la varietà base è priva di punti critici e la foliazione è regolare[6], possiamo assumere che esso sia *localmente costante*.

[6] Queste ipotesi rientrano, come vedremo nel prossimo capitolo, nelle cosiddette *condizioni di genericità* per una varietà di Poisson.

Su queste foglie, la struttura di Poisson induce quindi una struttura simplettica, nel modo seguente: date due funzioni $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^\infty(S(x))$, esse possono essere estese localmente a due funzioni $f, g \in C^\infty(M)$, in modo tale che

$$\{\tilde{f}, \tilde{g}\}(x) = \{f, g\}(x) = (X_f g)(x). \tag{2.22}$$

In realtà, il risultato dipende esclusivamente da $\tilde{g}$, dal momento che il calcolo avviene lungo la curva integrale di $X_f$ passante per $x$, e questa curva appartiene alla foglia $S(x)$. Analogamente, ricordando che $X_f g = -X_g f$, si ha che il risultato dipende solo da $\tilde{f}$, e non dall'estensione scelta $f$.

**Definizione 2.7** *Le foglie di $S(M)$ sono dette* foglie simplettiche *della varietà di Poisson $M$ ed $S(M)$ è detta* foliazione simplettica *di $M$.*

Un risultato interessante afferma che, in effetti, ogni varietà di Poisson è caratterizzata dalla sua foliazione simplettica:

**Teorema 2.6** *Sia $M$ una varietà differenziabile $n$-dimensionale e sia $S(M)$ una sua foliazione generale tale che:*

1. *ciascuna foglia di $S(M)$ è dotata di una struttura simplettica $\omega_S$*
2. *se $f \in C^\infty(M)$, allora il campo vettoriale $X_f$, definito dal campo vettoriale hamiltoniano della funzione $f|_{S(x)}$ su $(S(x), \omega_S)$ in $x \in M$ è un campo vettoriale differenziabile su tutta $M$.*

*Allora $M$ possiede un'unica struttura di Poisson la cui foliazione simplettica è $S(M)$.*

**Definizione 2.8** *Se la foliazione simplettica $S(M)$ di $(M, \mathbf{P})$ è* regolare, *cioè di rango $\rho(x)$ costante, allora la varietà di Poisson $M$ si dice* regolare.

È possibile dotare la foliazione $S(M)$ della varietà $M$ di un sistema di coordinate che dia una struttura canonica al bivettore di Poisson $\mathbf{P}$, come risulta dal seguente

**Teorema 2.7** *Sia $(M, \mathbf{P})$ una varietà di Poisson $n$-dimensionale. Sia $x_0 \in M$ e sia $\rho(x_0) = 2h$. Allora il punto $x_0$ ha un intorno aperto $U \subset M$ tale* *che* $(U, \mathbf{P}|_U)$ *è* Poisson-*equivalente* [7]*, tramite un'applicazione* $\phi$*, al prodotto* $\Sigma \times N$*, dove* $\Sigma$ *è una varietà simplettica* $2h$*-dimensionale, ed* $N$ *è una varietà di Poisson di rango nullo nel punto* $\phi(x_0)$*. Inoltre, i fattori* $\Sigma$ *ed* $N$ *sono unici a meno di un isomorfismo locale.*

Quest'ultimo risultato fornisce lo spunto per chiarire ulteriormente il ruolo delle *funzioni di Casimir* di un bivettore di Poisson. I differenziali di queste funzioni sono, abbiamo detto, elementi di $\ker(\mathbf{P}df)$, $\forall f \in C^\infty(M)$. Questa definizione ci consente di interpretare la varietà $N$ del teorema 2.7 come la varietà generata dai differenziali delle funzioni di Casimir per il bivettore $\mathbf{P}$. La varietà $\Sigma$, invece, può essere dotata di un sistema di *coordinate di Darboux*. In tal modo, se consideriamo la matrice $P$ dei coefficienti del bivettore di Poisson $\mathbf{P}$, in un punto $x_0$ fissato, essa potrà essere scritta nella seguente forma a blocchi:

$$P = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

dove $J_0$ è la consueta matrice simplettica

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_h \\ -\mathbb{I}_h & 0 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

In altri termini, l'annullatore, rispetto al bivettore di Poisson, della sottovarietà generata dai differenziali delle funzioni di Casimir è una sottovarietà simplettica, che possiamo pensare generata dai campi vettoriali hamiltoniani associati agli integrali primi del moto.

Queste osservazioni saranno riprese più avanti nel caso delle *varietà bihamiltoniane*. Il risultato corrispondente al teorema 2.7 è noto sotto il nome di *teorema di Magri - Gel'fand - Zakharevich*.

## 2.3 Fasci di strutture su una varietà

Abbiamo osservato come dotare di un bivettore di Poisson una varietà regolare comporti che questa sia naturalmente fogliettata in sottovarietà simplettiche che abbiamo chiamato *foglie simplettiche*. Abbiamo anche visto che

[7] In modo del tutto analogo al caso dell'equivalenza simplettica, di cui abbiamo già parlato, due varietà si dicono *Poisson*-equivalenti se esiste un isomorfismo $\phi$ tra di loro tale che la struttura di Poisson si conservi.

la questione dell'integrabilità è riconducibile al problema dell'*involutività* di queste foglie.

Cosa avviene se alla varietà di Poisson è possibile associare un altra struttura bivettoriale, "compatibile" con la prima? A questa legittima domanda la risposta è abbastanza complessa. Ne parleremo più diffusamente nel prossimo capitolo. Intanto cominciamo col considerare alcuni esempi basilari di *famiglie ad un parametro* di strutture.

### 2.3.1 Fasci di matrici

Abbiamo già osservato che un bivettore di Poisson $\mathbf{P}$ su una varietà di dimensione finita è, in pratica, rappresentato da un tensore di tipo (2,0), $P = (P^{ij})$, ovvero da una matrice quadrata il cui ordina uguaglia la dimensione della varietà. Analoghe considerazioni valgono, naturalmente, per un *fascio di bivettori di Poisson*, cioè per una famiglia ad un parametro di bivettori di tipo $\mathbf{P} - \lambda\mathbf{Q}$ [8]. È chiaro che una famiglia ad un parametro di bivettori è associata una famiglia ad una parametro di matrici. Ha senso, perciò, indagare le proprietà specifiche di quelli che vengono detti *fasci di matrici*.

**Definizione 2.9** *Date due matrici rettangolari $A, B$ della stessa dimensione $m \times n$ e dato $\lambda \in \mathbb{C}$, la matrice rettangolare $A - \lambda B$ è detta* fascio di matrici *generato da $A$ e $B$.*

Tra i fasci di matrici è possibile stabilire una relazione di equivalenza in base alla seguente

**Definizione 2.10** *Due fasci di matrici rettangolari $A - \lambda B$ e $A_1 - \lambda B_1$ della stessa dimensione $m \times n$ legati dalla relazione*

$$P(A - \lambda B)Q = A_1 - \lambda B_1 \tag{2.25}$$

*con $P$ e $Q$ matrici quadrate di ordine $m$ ed $n$ rispettivamente, non singolari e costanti* [9] *si dicono* strettamente equivalenti.

Una prima distinzione tra i fasci di matrici si può fare in virtù della

**Definizione 2.11** *Un fascio di matrici $A - \lambda B$ si dice* regolare *se*

[8] Un "*pencil*", in inglese.

[9] Cioè indipendenti da $\lambda$.

1. *$A$ e $B$ sono matrici quadrate dello stesso ordine $n$*

2. $\det(A - \lambda B)$ *non è ovunque nullo.*

*In tutti gli altri casi il fascio si dice* singolare.

Fu Weierstraß, nel 1867, il primo a stabilire un criterio di equivalenza stretta per fasci regolari, basato sulla *teoria dei divisori*, ed anche una forma canonica per essi, ma fu Kronecker che più tardi, nel 1890, investigò le corrispondenti proprietà nel caso dei fasci singolari. Per ulteriori dettagli si veda il fondamentale, anche se assai datato [9].

Supponiamo, per il momento di avere un fascio singolare di matrici $A-\lambda B$ avente rango massimo, cioè

$$rg(A - \lambda B) = \min(m, n). \tag{2.26}$$

Vale, allora, il seguente

**Teorema 2.8** *(di riduzione di Kronecker) Supponiamo che il sistema omogeneo*

$$(A - \lambda B)x = 0 \tag{2.27}$$

*ammetta soluzioni polinomiali. Consideriamo, tra tali soluzioni, quella di grado minimo $\varepsilon$, con $\varepsilon > 0$. Allora il fascio $A-\lambda B$ è strettamente equivalente ad un fascio della forma*

$$\begin{pmatrix} L_\varepsilon & 0 \\ 0 & \hat{A} - \lambda \hat{B} \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

*dove*

$$L_\varepsilon = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(\varepsilon, \varepsilon + 1), \tag{2.29}$$

*ed $\hat{A} - \lambda \hat{B}$ è un nuovo fascio di matrici per il quale il sistema omogeneo associato, analogo del (2.27), non possiede soluzioni polinomiali di grado inferiore a $\varepsilon$.*

La dimostrazione di questo teorema è contenuta in [9, vol.II, pag.30–34].

Il teorema fornisce un procedimento induttivo che permette di ridurre un qualsiasi fascio di rango massimo ad una *forma quasi-diagonale*:

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & & & & 0 \\ & L_{\varepsilon_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & L_{\varepsilon_p} & \\ 0 & & & & A_p - \lambda B_p \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

con $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq ... \leq \varepsilon_p$, in modo tale che le colonne di $A_p - \lambda B_p$ siano linearmente indipendenti. Se le righe di $A_p - \lambda B_p$ sono linearmente dipendenti, allora lo sono le colonne di ${}^tA_p - \lambda {}^tB_p$ e quindi si potrà operare ancora su questo fascio trasposto, ottenendo infine la forma quasi-diagonale

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & L_{\varepsilon_p} & & & & \\ & & & {}^tL_{\eta_1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & {}^tL_{\eta_q} & \\ 0 & & & & & & A_0 - \lambda B_0 \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

con $0 < \varepsilon_1 \leq ... \leq \varepsilon_p$ e $0 < \eta_1 \leq ... \leq \eta_q$, dove il blocco $A_0 - \lambda B_0$ ha tanto le righe, quanto le colonne, linearmente indipendenti e rappresenta, pertanto, un *fascio regolare*. I numeri $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p, \eta_1, ..., \eta_q$ sono detti *indici minimali* del fascio.

La forma canonica di Kronecker (2.31) si estende facilmente al caso di fasci di matrici che non sono di rango massimo. In tal caso abbiamo il

**Corollario 2.1** *Sia $A - \lambda B$ un qualsiasi fascio singolare. Supponiamo che i sistemi omogenei*

$$(A - \lambda B)x = 0, \quad ({}^tA - \lambda {}^tB)y = 0$$

*abbiano, rispettivamente $\infty^g$ ed $\infty^h$ soluzioni costanti linearmente indipendenti. Allora il fascio è strettamente equivalente ad un fascio di forma quasidiagonale*

$$diag(\tilde{0}, L_{\varepsilon_{g+1}}, ..., L_{\varepsilon_p}, {}^tL_{\eta_{h+1}}, ..., {}^tL_{\eta_q}, A_0 - \lambda B_0) \tag{2.32}$$

*dove $\tilde{0}$ indica la matrice nulla di ordine $g \times h$.*

Chiaramente esistono altre possibili "forme canoniche" per un fascio di matrici, differenti da quella del corollario 2.1, basate ancora sul procedimento illustrato nel teorema 2.8. Torneremo su questo aspetto quando parleremo dell'analisi geometrica di un fascio di bivettori, nel paragrafo 3.2.

Il nostro interesse è rivolto principalmente ai fasci singolari di matrici quadrate che, come vedremo in seguito, rappresentano *fasci singolari di bivettori di Poisson*.

### 2.3.2 Fasci di Poisson

Un esempio fondamentale che lega la teoria dei fasci singolari di matrici e quella degli algebroidi di Lie è fornito dai fasci di strutture bivettoriali definite su una varietà regolare $M$. Particolare attenzione meritano i già citati *fasci di Poisson*, termine che indica, in sostanza, una combinazione lineare di bivettori di Poisson, ovvero di parentesi

$$\{\cdot,\cdot\}_\lambda := \{\cdot,\cdot\}_2 - \lambda\{\cdot,\cdot\}_1 \tag{2.33}$$

dove

$$\{\cdot,\cdot\}_1 := P_1^{jk}\frac{\partial}{\partial x^j}\wedge\frac{\partial}{\partial x^k}$$

e, analogamente

$$\{\cdot,\cdot\}_2 := P_2^{jk}\frac{\partial}{\partial x^j}\wedge\frac{\partial}{\partial x^k}$$

con $P_1^{jk}$ e $P_2^{jk}$ coordinate, quindi, rispettivamente, dei bivettori $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ rispetto alla base canonica $\frac{\partial}{\partial x^j}\wedge\frac{\partial}{\partial x^k}$ dello spazio dei bivettori.

La proprietà che è necessario richiedere per un fascio di Poisson è la *compatibilità* tra le due strutture, cioè il fatto che la combinazione lineare

$$\mathbf{P}_\lambda = \mathbf{P}_2 - \lambda\mathbf{P}_1 \tag{2.34}$$

rappresenti realmente per ogni valore di $\lambda$ un bivettore di Poisson[10].

Osserviamo che, per provare la compatibilità di due bivettori di Poisson $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ è sufficiente verificare che la loro *parentesi di Schouten* sia nulla:

$$[\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2] = 0, \tag{2.35}$$

infatti:

$$[\mathbf{P}_2 - \lambda\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 - \lambda\mathbf{P}_1] = [\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_2] - 2\lambda[\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_1] + \lambda^2[\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_1]. \tag{2.36}$$

[10] In particolare, per $\lambda = 0$ e "$\lambda = \infty$" si riottengono le due strutture "base" $\mathbf{P}_2$ e $\mathbf{P}_1$.

**Definizione 2.12** *Una varietà $M$ dotata di due strutture di Poisson compatibili, cioè di un fascio di Poisson $\mathbf{P}_\lambda = \mathbf{P}_2 - \lambda \mathbf{P}_1$ si dice* bi-hamiltoniana.

Le foglie simplettiche $S_\lambda(M)$ indotte dal bivettore $\mathbf{P}_\lambda$ definiscono un fascio di foliazioni sulla varietà $M$, che sono le varietà integrali della famiglia ad un parametro di campi vettoriali hamiltoniani indotti dal fascio ponendo

$$X_h = \mathbf{P}_\lambda(dh, \cdot) \tag{2.37}$$

cioè, in coordinate,

$$X_h^j = P^{jk} \frac{\partial h}{\partial x^k}.$$

Nel caso finito-dimensionale, un fascio di Poisson risulta naturalmente associato ad un fascio di matrici e, come già abbiamo visto per le matrici, anche in questo caso si può aver a che fare con un fascio degenere, la qual cosa talvolta si verifica anche se le strutture che lo generano sono entrambe non degeneri. Si ha, perciò, nucleo non banale, quindi, in pratica esistono, in questo caso, funzioni di Casimir non banali per l'intero fascio.

Gli algebroidi di Lie possono essere riconsiderati in questo ambito ed interpretati cone *fasci di àncore*. La questione è del tutto generale e può ben riassumersi nel seguente diagramma[11]:

$$\begin{array}{ccc} E & & \\ \downarrow A_\lambda & \searrow^{\sim} & \\ TM & \xleftarrow{\mathbf{P}} & T^*M \end{array} \tag{2.38}$$

Si richiede che l'applicazione $\sim$ sia un (iso)morfismo tra gli algebroidi $E$ e $T^*M$, cioè una *condizione di compatibilità* o, come talvolta si dice, una *condizione di intrallacciamento*, tra di loro. In alcuni casi, come in quello che stiamo ora considerando delle varietà bi-hamiltoniane, questa compatibilità può essere mostrata in modo esplicito, chiarendo anche quali siano le strutture di parentesi associate agli algebroidi

$$\begin{array}{cc} E \overset{\sim}{\equiv} T^*M & \{f, g\}_\lambda \\ \downarrow \mathbf{P}_\lambda & \\ TM & [X_f, X_g] \end{array} \tag{2.39}$$

ovvero la parentesi indotta dal bivettore $\mathbf{P}_\lambda$ sul fibrato $T^*M$ e l'usuale commutatore tra campi vettoriali sul fibrato $TM$. In generale, tuttavia, la questione della compatibilità tra algebroidi resta aperta.

[11]In effetti, volendo essere più precisi, in luogo di $\mathbf{P}$ occorrerebbe considerare l'isomorfismo indotto # (2.4).

### 2.3.3 Tensori di Nijenhuis e varietà bi-hamiltoniane

Un altro caso in cui la compatibilità tra algebroidi è verificabile è quello dei fasci di Nijenhuis. Per parlare di queste strutture occorre innanzi tutto definire e spiegare il ruolo dei *tensori di Nijenuis*.

**Definizione 2.13** *Un campo di endomorfismi del fibrato tangente $TM$ di tipo (1,1)*

$$\mathbf{N} : TM \to TM \tag{2.40}$$

*di* rango costante *e con* torsione nulla

$$T(\mathbf{N}) = 0 \tag{2.41}$$

*dove*

$$T(\mathbf{N})(X,Y) \stackrel{def}{=} [\mathbf{N}X, \mathbf{N}Y] - \mathbf{N}[\mathbf{N}X, Y] - \mathbf{N}[X, \mathbf{N}Y] + \mathbf{N}^2[X,Y], \tag{2.42}$$

*dove $[\cdot,\cdot]$ è l'usuale commutatore di campi $TM$, si dice* tensore di Nijenhuis.

Innanzi tutto, è vera la seguente

**Proposizione 2.1** *Siano* $\mathbf{P}$ *un bivettore di Poisson e* $\mathbf{N}$ *un tensore di Nijenhuis, definiti su una varietà differenziabile $M$. Supponiamo che*

$$\begin{array}{c} \mathbf{N} \circ \mathbf{P} - \mathbf{P} \circ \mathbf{N}^* = 0 \\ \mathbf{R}(\mathbf{P}, \mathbf{N}) = 0 \end{array} \tag{2.43}$$

*dove* $\mathbf{R}$ *è un tensore di rango tre* [12]*, cosìdefinito:*

$$\mathbf{R}(\mathbf{P},\mathbf{N})(\alpha, X) \stackrel{def}{=} L_{\mathbf{P}\alpha}X - \mathbf{P} \circ L_X(\mathbf{N}^*\alpha) + \mathbf{P} \circ L_{\mathbf{N}X}(\alpha). \tag{2.44}$$

*Allora, la composizione*

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{N} \circ \mathbf{P} : T^*M \to TM \tag{2.45}$$

*è ancora un* bivettore di Poisson.

[12]Un tensore, quindi, a tre indici.

Grazie alla proposizione 2.1, la cui dimostrazione si può trovare in [15, app.B.3], possiamo costruire un algoritmo per generare strutture bi-hamiltoniane, infatti, se $\mathbf{P}$ e $\mathbf{N}$ soddisfano la proprietà (2.43), allora, posto $\mathbf{P}_1 \stackrel{def}{=} \mathbf{P}$, è possibile iterare il procedimento:

$$\mathbf{P}_{i+1} \stackrel{def}{=} \mathbf{N} \circ \mathbf{P}_i. \tag{2.46}$$

In tal modo si ottiene tutta una *gerarchia* di bivettori di Poisson. Inoltre, è facile verificare che tutti i bivettori di tale gerarchia hanno parentesi di Schouten nulla [13]:

$$[\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j] = 0, \qquad \forall i, j. \tag{2.47}$$

Questo risultato è sufficiente a garantire, come abbiamo visto, che dati due qualsiasi bivettori della gerarchia $\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j$, allora il fascio ad un parametro

$$\mathbf{P}_j - \lambda \mathbf{P}_i$$

è, $\forall\lambda$, ancora un bivettore di Poisson[14].

Il ruolo dei tensori di Nijenhuis nell'ambito della teoria degli *algebroidi di Lie* è una conseguenza delle considerazioni fatte finora. Consideriamo, infatti, il *fascio* di tensori di Nijenhuis

$$\mathbf{N} - \lambda\mathbb{I} : TM \to TM. \tag{2.48}$$

Data una struttura di Poisson $\mathbf{P}$, consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{rcl} & TM & \\ \mathbf{N} - \lambda\mathbb{I} & \downarrow & \\ & TM & \leftarrow \quad T^*M \end{array} \tag{2.49}$$

Come abbiamo già fatto nel caso dei fasci di Poisson, ci chiediamo quale sia, in questo caso, la relazione di compatibilità tra i fibrati $TM$ e $T^*M$, intesi come algebroidi di Lie. Se ci troviamo nelle ipotesi della proposizione 2.1, osservando il diagramma

$$\begin{array}{rcl} & TM & \\ \mathbf{N} - \lambda\mathbb{I} & \downarrow & \nwarrow \tilde{\mathbf{P}} - \lambda\mathbf{P} \\ & TM & \leftarrow T^*M \end{array} \tag{2.50}$$

[13] In particolare, per $i = j$, la condizione si riduce alle ipotesi del teorema 2.2, ed è perciò già contenuta nella tesi della proposizione 2.1.

[14] Ovvero, due qualunque dei bivettori della gerarchia sono compatibili e, nei termini della definizione 2.12, dotano la varietà $M$ di una *struttura bi-hamiltoniana*.

deduciamo che la compatibilità è garantita, in questo caso, dall'isomorfismo $\#_{\tilde{\mathbf{P}}-\lambda\mathbf{P}}$ indotto da tutto il fascio di Poisson $\tilde{\mathbf{P}} - \lambda\mathbf{P}$.

### 2.3.4 La riduzione di Marsden - Ratiu

Abbiamo già osservato che una varietà di Poisson $(M, \mathbf{P})$ è fogliettata in foglie simplettiche, infatti la distribuzione caratteristica $\Phi = \{\mathbf{P}df | f \in C^\infty(M)\}$ è integrabile, e le foglie integrali massimali $S$ sono sottovarietà simplettiche. Le *funzioni di Casimir* di $\mathbf{P}$ sono costanti su $\Phi$.

Nel caso di una *varietà bi-hamiltoniana* $(M, \mathbf{P}_\lambda)$, dove $\mathbf{P}_\lambda = \mathbf{P}_2 - \lambda\mathbf{P}_1$, accanto alla distribuzione caratteristica

$$\Phi = \{\mathbf{P}_1 df | f \in C^\infty(M)\} \tag{2.51}$$

possiamo considerare la distribuzione

$$\Psi = \{\mathbf{P}_2 dg | g \quad \text{Casimir di} \quad \mathbf{P}_1\}. \tag{2.52}$$

La teoria della *riduzione delle varietà bi-hamiltoniane* è lo studio delle relazioni che intercorrono tra queste due distribuzioni.

**Lemma 2.1** *La distribuzione $\Psi$ (2.52) è integrabile.*

Scegliamo una specifica foglia simplettica $S$ della foliazione indotta da $\mathbf{P}_1$. Sia $E$ la foliazione indotta da $\Psi$ su $S$, le cui foglie sono, pertanto, le intersezioni di $S$ con le foglie di $\Psi$. Assumiamo che $E$ sia sufficientemente regolare affinché esista e sia regolare lo spazio quoziente $N = S/E$. Sia $i : S \to M$ l'immersione canonica di $S$ in $M$ e sia $\pi : S \to N$ la proiezione canonica di $S$ su $N$.

**Teorema 2.9** *(di riduzione di Marsden - Ratiu) Lo spazio quoziente $N = S/E$ è una varietà bi-hamiltoniana, sulla quale esiste un unico fascio di Poisson* ridotto*, $\mathbf{P}_\lambda^N$, tale che*

$$\{f, g\}_\lambda^N \circ \pi = \{F, G\}_\lambda \circ i \tag{2.53}$$

*$\forall F, G$ costanti su $\Psi$, che estendano su $M$ le funzioni $f, g$ di $N$.*

Per le dimostrazioni del teorema e del precedente lemma si veda [6, parte II, pag.8].

In concreto, il fascio di Poisson ridotto $\mathbf{P}_\lambda^N$ si può materialmente costruire a partire dal fascio $\mathbf{P}_\lambda$, utilizzando lo schema seguente:

- Si sceglie un covettore $v_n^N \in T_n^* N$, dove $n \in N$.
- Si sceglie un punto $s \in S$ sulla fibra di $n$ e costruiamo un covettore $v_s \in T_s^* M$ tale che

$$< v_s, \dot{s} >=< v_n^N, d\pi(s)\dot{s} >, \qquad \forall \dot{s} \in T_s S$$

$$< v_s, \Psi >= 0.$$

  La costruzione di $v_s$ prende il nome di *"lifting" dei covettori* da $N$ ad $M$. L'esistenza di questo covettore è garantita dal teorema 2.9.

- Si costruisce, a questo punto, il campo vettoriale $(\mathbf{P}_\lambda)_s v_s$, associato al covettore $v_s$ tramite il fascio di Poisson di $M$, nel punto $s$. È possibile mostrare che $(\mathbf{P}_\lambda)_s v_s \in T_s S$.
- Infine, si proietta questo campo vettoriale da $S$ su $N$. Tale proiezione è indipendente sia dalla scelta della particolare estensione $v_s$, sia dal punto $s$ della fibra.

Questa proiezione è $(\mathbf{P}_\lambda^N)_n v_n^N$.

# Capitolo 3

# L'analisi geometrica di Gel'fand - Zakharevich

Lo studio della geometria locale di una varietà bi-hamiltoniana è necessario per comprendere cosa comporti l'integrabilità di un sistema a livello delle strutture di Poisson di cui esso è dotato.

In questo ambito sarà opportuno considerare in partenza strutture già ridotte, utilizzando ad esempio la tecnica di Marsden-Ratiu esposta nel capitolo precedente. In tal modo si può dare una classificazione in modo assai più generale.

## 3.1 La struttura delle varietà bi-hamiltoniane

Il primo fatto notevole che emerge da questo studio è la differenza sostanziale tra il caso di varietà di Poisson di dimensione pari e di dimensione dispari. Per le prime, infatti è possibile operare una decomposizione della varietà in prodotto di foglie bidimensionali, mentre, per le seconde, pur continuando a valere tale decomposizione, esiste un'intera famiglia ad un parametro di foglie simplettiche passanti per ciascun punto della varietà, per il fatto che un bivettore di dimensione dispari non può che essere degenere, a causa della sua antisimmetria.

### 3.1.1 Il caso di dimensione pari

Per trattare il caso di varietà di dimensione pari è essenziale considerare, benché esso sia elementare, il caso di dimensione due.

In dimensione due, anzitutto, ogni campo bivettoriale corrisponde ad una struttura di Poisson. È lecito supporre che una tale struttura sia *localmente non degenere* e quindi duale di una struttura simplettica. Scegliendo opportunamente un sistema di coordinate locali $(x_1, x_2)$ in cui tale struttura sia

$$dx_1 \wedge dx_2$$

si deduce che il bivettore di Poisson è

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} \tag{3.1}$$

Una seconda struttura di Poisson compatibile con questa può essere scelta nella forma

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} \tag{3.2}$$

La considerazione notevole che rende non banale questo esempio bidimensionale è che date due varietà bi-hamiltoniane $M_1$ ed $M_2$, si verifica facilmente che il loro prodotto diretto $M_1 \otimes M_2$ è ancora una varietà bi-hamiltoniana. Viceversa, una varietà bi-hamiltoniana si decompone in sottovarietà anch'esse bi-hamiltoniane, come si evince dal seguente

**Teorema 3.1** *(di Turiel) Sia $M$ una varietà bi-hamiltoniana di dimensione $2n$ e sia $m \in M$. Siano $\mathbf{P}_1|_m$ e $\mathbf{P}_2|_m$ una coppia di bivettori in posizione generale. Allora, in un intorno di $m$ è possibile scegliere un sistema di coordinate tale che i campi bivettoriali assumano la forma*

$$\begin{array}{c} \mathbf{P}_1 = \sum_{k=1}^n f_k(x_{2k-1}, x_{2k}) \frac{\partial}{\partial x_{2k-1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x_{2k}} \\ \mathbf{P}_2 = \sum_{k=1}^n g_k(x_{2k-1}, x_{2k}) \frac{\partial}{\partial x_{2k-1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x_{2k}} \end{array} \tag{3.3}$$

*Se oltre ai valori dei due bivettori sono in posizione generale anche le loro derivate calcolate nel punto $m$, allora*

$$\begin{array}{c} \mathbf{P}_1 = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{2k-1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x_{2k}} \\ \mathbf{P}_2 = \sum_{k=1}^n x_{2k-1} \frac{\partial}{\partial x_{2k-1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x_{2k}} \end{array} \tag{3.4}$$

*pur di far corispondere al punto $m$ valori $x_i$ tali che la seconda struttura non degeneri del tutto.*

Questo teorema afferma, in particolare, che un sistema bi-hamiltoniano di dimensione pari può essere decomposto nel prodotto di sistemi bi-hamiltoniani di dimensione due. In altre parole, ogni varietà bi-hamiltoniana di dimensione pari è localmente isomorfa al prodotto di varietà bidimensionali del tipo di quella discussa all'inizio del paragrafo.

Il semplice risultato di algebra lineare che si utilizza per provare il teorema è il seguente

**Lemma 3.1** *Sia $V$ un $K$-spazio vettoriale di dimensione pari e siano $\alpha$ e $\beta$ due forme bilineari antisimmetriche in posizione generale. Allora*

$$V = \bigoplus_i V_i \quad \alpha = \bigoplus_i \alpha_i \quad \beta = \bigoplus_i \beta_i \tag{3.5}$$

*dove $\alpha_i$ e $\beta_i$ sono forme bilineari antisimmetriche agenti entrambe su $V_i$ e $dimV_i = 2$.*

La dimostrazione del teorema si fa, quindi, applicando il lemma allo spazio $V = T^*_m M$ e ai bivettori $\mathbf{P}_1|_m$ e $\mathbf{P}_2|_m$, intesi semplicemente come forme bilineari antisimmetriche. Per i dettagli si veda [10, app.3].

Sappiamo già che, se $(M, \mathbf{P})$ è una varietà di Poisson ed $m$ è un suo punto generico, allora esiste un'unica foglia simplettica passante per $m$. Inoltre, il complemento ortogonale a questa foglia nel punto $m$ coincide con il nucleo del bivettore $\mathbf{P}|_m \in \Lambda^2 T_m M$, considerato come forma bilineare nello spazio $T^*_m M$.

Nel caso delle varietà bi-hamiltoniane, queste asserzioni portano alla

**Definizione 3.1** *Chiameremo* foglie simplettiche del fascio *le foglie simplettiche di ogni combinazione lineare $\mathbf{P}_2 - \lambda \mathbf{P}_1$ di due bivettori di Poisson.*

### 3.1.2 Il caso di dimensione dispari

Nel caso di dimensione dispari è possibile effettuare la decomposizione in sottospazi bidimensionali, esattamente come nel caso di dimensione pari. Dato un punto della varietà esiste, tuttavia, una intera famiglia ad un parametro di foglie simplettiche passanti per esso. Ciò è conseguenza dell'esistenza di un nucleo non banale unidimensionale per il bivettore[1]. Esiste, cioè una famiglia ad un parametro di funzioni che costituiscono il Casimir del fascio.

[1] Quando si parla di nucleo, il bivettore va sempre pensato in termini delle applicazioni lineari costruite per saturazione parziale della parentesi di Poisson.

Nel prossimo paragrafo vedremo che tale Casimir si può costruire in forma polinomiale. L'utilità di questo fatto risiede nella possibilità di trovare una "forma canonica" per un fascio di bivettori di Poisson, in termini di un sistema di coordinate assai speciale.

L'interpretazione astratta di queste affermazioni è stata data dai matematici russi Gel'fand e Zakharevich in [10] facendo ricorso ad un procedimento di complessificazione e proiettivizzazione, che permette di interpretare il Casimir come una *inclusione di Veronese* di $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ in $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$. Per avere maggiori dettagli sulle questioni di geometria algebrica a cui abbiamo fatto cenno, si può consultare, ad esempio, [28].

## 3.2 L'analisi geometrica di un fascio di bivettori

La costruzione del Casimir e la ricerca di una "forma canonica" sono state oggetto di studio per Gel'fand e Zakharevich. I risultati, ottenuti nell'ambito della teoria delle *reti di Veronese*, si trovano, come abbiamo detto, in [10], oppure nei lavori di M. Rigal [26, 27].

In effetti, non è necessario introdurre alcun concetto supplementare di geometria algebrica per ottenere questi risultati, che possono essere provati facendo uso di un procedimento, definito da Magri *analisi di Kronecker* di un fascio di Poisson.

### 3.2.1 Il teorema di Magri - Gel'fand - Zakharevich

Sia $M$ una varietà bi-hamiltoniana di dimensione dispari $2n+1$. Sia $m_0$ un punto di tale varietà dove il fascio di Poisson $\mathbf{P}_\lambda = \mathbf{P}_2 - \lambda\mathbf{P}_1$ ha rango massimo $\rho(m_0) = 2n$. Con ciò si intende che almeno uno dei minori di ordine $2n$ che possono essere estratti dalla matrice che descrive il fascio di Poisson in un qualunque sistema di coordinate locali, centrato in $m_0$ sia diverso da zero. Il rango si mantiene, dunque, costante in tutto un intorno $\Omega \ni m_0$. Poiché il rango non è, tuttavia, globalmente costante su tutta la varietà $M$, tutte le considerazioni che possono essere fatte in quest'ambito hanno carattere esclusivamente *locale*.

Assumiamo, inoltre, che, in tutti i punti di $\Omega$, i nuclei unidimensionali dei bivettori $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$, intesi come sottospazi vettoriali di $T^*_{m_0}M$ siano distinti. Più in generale, ammettiamo che, presi arbitrariamente $n+1$ tensori del fascio, corrispondenti ai valori $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ del parametro $\lambda$, essi abbiano nuclei unidimensionali distinti.

Chiameremo queste "*condizioni di genericità*" per il fascio $\mathbf{P}_\lambda$.

**Teorema 3.2** *(di Magri - Gel'fand - Zakharevich) Sia $(M, \mathbf{P}_\lambda)$ una varietà bi-hamiltoniana e sia $m_0 \in M$. Allora, in condizioni di genericità*

1. *Il Casimir del fascio è un polinomio di grado $n$ in $\lambda$,*

$$H(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} H_j \lambda^{n-j} \tag{3.6}$$

*i cui $n+1$ coefficienti sono funzioni regolari*

$$H_j : \Omega \to \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

2. *Le funzioni $H_j$ sono in involuzione rispetto a tutte le parentesi di Poisson del fascio:*

$$\{H_i, H_j\}_\lambda = 0 \qquad \forall i, j = 0, ..., n \tag{3.8}$$

Il polinomio che definisce il Casimir è detto *polinomio di Gel'fand - Zakharevich* e i campi vettoriali hamiltoniani costruiti a partire dalle funzioni $H_j$ generano una sottovarietà di $M$ che prende il nome di *anima* del fascio di Poisson[2].

In linguaggio geometrico, il teorema 3.2 può essere enunciato come un teorema di esistenza di una foliazione lagrangiana delle foglie simplettiche del fascio.

Per spiegare questa affermazione, cominciamo ad osservare che, per l'ipotesi di genericità, le foglie simplettiche del fascio sono varietà $2n$-dimensionali di $M$. Consideriamo poi le superfici di livello dei coefficienti $H_j$ della funzione di Casimir. Ogni superficie di livello è una varietà $n$-dimensionale di $M$. Questa sottovarietà può essere interpretata come l'intersezione, al variare del parametro $\lambda$ di tutte le foglie simplettiche del fascio, passanti per il punto $m_0$, che stiamo considerando. Ciascuna di queste sottovarietà prende il nome di "*foglia dell'anima del fascio di Poisson*". Per costruzione, le foglie dell'anima sono interamente contenute nelle foglie simplettiche del fascio, essendo, appunto, le intersezioni di tali foglie. Per la condizione (3.8) di

[2] Questo termine compare per la prima volta in [26, pag.15].

involutività delle funzioni $H_j$, la forma simplettica $\omega_S$, indotta dal bivettore $\mathbf{P}_\lambda$ su una qualsiasi foglia simplettica, ristretta ad una foglia dell'anima, si annulla identicamente.

Le foglie dell'anima sono, dunque, sottovarietà isotrope e massimali di ogni foglia simplettica e perciò definiscono una *foliazione lagrangiana* delle foglie simplettiche del fascio.

Prima di procedere alla dimostrazione vera e propria del teorema 3.2, è opportuno premettere la descrizione della seguente costruzione geometrica, che fa comprendere come ad un fascio di Poisson sia associata una famiglia di *distribuzioni incapsulate*.

Scegliamo una coppia qualsiasi di bivettori del fascio, visti come applicazioni lineari antisimmetriche dal fibrato cotangente al fibrato tangente: siano essi $P$ e $P'$. La scelta di questi due campi tensoriali dà luogo al seguente schema:

$$\begin{array}{rcl} L_j \subset T^*_m M & \overset{<\cdot,\cdot>}{\hookleftarrow} & T_m M \supset D_j \\ P \downarrow & & \uparrow P' \\ C_j \subset T_m M & \overset{<\cdot,\cdot>}{\hookrightarrow} & T^*_m M \supset K_j \end{array} \tag{3.9}$$

Utilizzeremo una procedura è iterativa.

Poniamo:

$$\begin{array}{rl} C_j \overset{def}{=} & P(L_j) \\ K_j \overset{def}{=} & \text{annullatore di} \quad C_j \quad \text{in} \quad T^*_m M \\ D_{j+1} \overset{def}{=} & P'(K_j) \\ L_{j+1} \overset{del}{=} & \text{annullatore di} \quad D_{j+1} \quad \text{in} \quad T^*_m M \end{array} \tag{3.10}$$

Con il termine *annullatore* intendiamo il sottospazio ortogonale rispetto alla *forma di dualità* $< \cdot, \cdot >$ tra $T_m M$ e $T^*_m M$.

Sia $L_0 \overset{def}{=} T^*_m M$. Attraverso lo schema (3.9) costruiamo le quattro successioni di sottospazi $L_j, C_j, K_j, D_j$.

**Lemma 3.2** *I sottospazi $C_j$ e $D_j$ di $T_m M$ verificano le relazioni di inclusione*

$$\begin{array}{c} C_0 \supset C_1 \supset ... \supset C_i \supset C_{i+1} \supset ... \\ \varnothing = D_0 \subset D_1 \subset ... \subset D_i \subset D_{i+1} \subset ... \end{array} \tag{3.11}$$

**Dimostrazione.** Sappiamo che $L_0 \supset L_1$ perchè $L_0 \equiv T^*_m M$. Supponiamo di aver dimostrato che $L_i \supset L_{i+1}$. Allora, $C_i \supset C_{i+1}$ e, per dualità, $K_i \subset K_i + 1$ e, perciò, anche $D_{i+1} \subset D_{i+2}$. Ciò comporta che $L_{i+1} \supset L_{i+2}$. Iterando il procedimento, il lemma è provato. □

Poiché stiamo lavorando su uno spazio di dimensione finita, le relazioni di inclusione (3.11) comportano l'esistenza di un minimo intero $r$, detto *indice di Riesz* del fascio, nel punto $m \in M$ considerato, tale che:

$$\begin{aligned} C_{r+1} &\equiv C_r \\ D_{r+1} &\equiv D_r \end{aligned} \tag{3.12}$$

Supponiamo, a questo punto, di trovarci su una varietà $M$ di dimensione dispari, $dimM = 2n + 1$, dotata di un fascio di Poisson di rango massimo. In questo caso, si possono dimostrare alcune ulteriori notevoli proprietà per le distribuzioni incapsulate $C_i$ e $D_i$:

**Lemma 3.3** *Sotto condizioni di genericità,*

1. *vale la relazione di inclusione*

$$D_0 \subset D_1 \subset ... \subset D_n \equiv C_n \subset C_{n-1} \subset ... \subset C_0, \tag{3.13}$$

2. $dimC_j = 2n - j, \quad \forall j = 0, ..., n.$

3. $r \equiv n.$

**Dimostrazione.** Procediamo per induzione. Ammettiamo di aver dimostrato che

$$D_0 \subset ... \subset D_j \subset C_j \subset ... \subset C_0, \tag{3.14}$$

e di aver dimostrato che

$$dimC_l = 2n - l \qquad l = 0, ..., j.$$

Allora,

$$D_j = P(K_j), \tag{3.15}$$

infatti, sappiamo che

$$D_j = P'(K_{j-1})$$

e che

$$K_{j-1} \subset K_j.$$

In generale, è vero che

$$P(K_j) \subset D_j,$$

infatti:

$$< P(K_j), L_j >= - < K_j, P(L_j) >= - < K_j, C_j >= 0.$$

Dunque, $P(K_j)$ è annullato da $L_j$, ed è, perciò contenuto in $D_j$. L'ipotesi induttiva (3.14) implica che, per ogni vettore controvariante $v \in D_j$, esiste un vettore covariante $\alpha$, tale che:

$$v = P\alpha.$$

Questo $\alpha$ appartiene necessariamente a $K_j$, in quanto:

$$0 =< v, L_j >=< P\alpha, L_j >= - < \alpha, P(L_j) >= - < \alpha, C_j > .$$

Con ciò, la (3.15) è provata.

Ora, sia $\omega$ la forma simplettica indotta sulle foglie dal bivettore $P$. Mostriamo che $D_j$ è il complemento $\omega$-ortogonale[3] di $C_j$ in $C_0$:

$$\omega(D_j, C_j) = \omega(P(K_j), C_j) =< K_j, C_j >= 0$$

prova che $C_j \subset D_j^{\perp}$. Allo stesso modo,

$$0 = \omega(D_j, D_j^{\perp}) = \omega(P(K_j), D_j^{\perp}) =< K_j, D_j^{\perp} >$$

prova l'inclusione opposta.

Vediamo che il sottospazio $D_j$ è *isotropo* ed, analogamente, che il sottospazio $C_j$ è *coisotropo* in $C_0$. Ciò segue dal fatto che $D_j \subset C_j$, infatti, questa inclusione implica che $D_j$ è contenuto nel suo $\omega$-ortogonale (proprietà di isotropia) e, allo stesso tempo, $C_j$ contiene il suo $\omega$-ortogonale (proprietà di coisotropia).

Da quanto detto, segue che

$$dim D_j = 2n - dim C_j = j.$$

[3]Indicheremo la relazione di ortogonalità rispetto alla forma simplettica $\omega$ con il consueto apice $\perp$.

Ora, concludiamo la dimostrazione del lemma, provando che

$$D_{j+1} \subset C_{j+1}$$

e che $dimC_{j+1} = 2n - j - 1$.

Intanto, $D_{j+1} \subset C_{j-1}$, infatti:

$$< D_{j+1}, K_{j-1} >=< P'(K_j), K_{j-1} >= - < K_j, D_j >= 0,$$

perchè $C_j \supset D_j$ implica che $K_j \subset L_j$. Inoltre, $D_{j+1} \subset C_j$. Per dimostrare questa affermazione, notiamo che possiamo scrivere:

$$K_j = K_{j-1} \oplus < \alpha_j > \qquad \alpha_j \in K_j \setminus K_{j-1},$$

da cui:

$$D_{j+1} = D_j \oplus < d_{j+1} > \qquad d_{j+1} = P'\alpha_j.$$

Basta mostrare che $d_{j+1} \in C_j$, la qual cosa è subito vista:

$$\begin{gathered} \omega(d_{j+1}, D_j) = \omega(d_{j+1}, P(K_j)) = \omega(d_{j+1}, P(K_j - 1)) + \omega(d_{j+1}, P\alpha_j) = \\ =< d_{j+1}, K_{j-1} > + < d_{j+1}, \alpha_j >=< P'\alpha_j, \alpha_j >= 0. \end{gathered} \tag{3.16}$$

Abbiamo, ancora, che $D_j \subset C_{j+1}$:

$$< D_j, K_{j+1} >=< P(K_j), K_{j+1} >= - < K_j, P(K_{j+1} >= - < K_j, D_{j+1} >= 0,$$

essendo $D_{j+1} \subset C_j$.

Per provare la nostra tesi, adesso è sufficiente mostrare che $d_{j+1} \in C_{j+1}$: per assurdo, supponiamo che $d_{j+1} \notin C_{j+1}$. Poichè $d_{j+1} \in C_j$, posso scrivere:

$$C_j = C_{j+1} \oplus < d_{j+1} > .$$

Allora,

$$\omega(C_j, d_{j+1}) = \omega(C_{j+1}, d_{j+1}) + 0 = 0$$

per la coisotropia di $C_{j+1}$. Questa identità implica che $d_{j+1} \in D_j \subset C_{j+1}$, e contraddice, pertanto, la nostra ipotesi.

Infine, poichè $D_{j+1} \subset C_0$, allora abbiamo $L_{j+1} \supset K_0$, e perciò $dimC_{j+1} = dimL_{j+1} - 1 = 2n - j - 1$. $\square$

L'onerosa dimostrazione del lemma 3.3 ci conduce alla

**Dimostrazione del teorema 3.2.** I sottospazi $C_j$ e $D_j$ di $T_mM$ sono distribuzioni integrabili, infatti si vede facilmente che, ciascuno di essi è una *sottoalgebra* della *distribuzione caratteristica*, rispettivamente, di $\mathbf{P}$ e di $\mathbf{P}'$ e l'integrabilità segue, pertanto, dal teorema 2.4.

Consideriamo ora i due bivettori $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$. Osserviamo che $C_0$ è la *distribuzione caratteristica* del bivettore $\mathbf{P}_1$ e, perciò, $K_0$ è il sottospazio unidimensionale generato dai differenziali delle funzioni di Casimir per tale bivettore[4]. La (3.9) fornisce, allora, un procedimento iterativo che, partendo dal Casimir $H_0$ della prima struttura $\mathbf{P}_1$, permette di costruire via via esattamente gli $n$ coefficienti del polinomio (3.6) attraverso il seguente schema, detto *ricorrenza di Lenard*:

$$\begin{aligned} 0 =& \ \mathbf{P}_1 dH_0 \\ \mathbf{P}_2 dH_0 =& \ \mathbf{P}_1 dH_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{P}_2 dH_{n-1} =& \ \mathbf{P}_1 dH_n \\ \mathbf{P}_2 dH_n =& \ 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

In particolare, quindi, $H_n$ è Casimir di $\mathbf{P}_2$. $\square$

È evidente che lo schema (3.17), così come è scritto, non è costruttivo. Per renderlo tale, nella pratica, si opera nel modo seguente: l'applicazione di un bivettore, ad esempio $\mathbf{P}_2$, ad una 1-forma $\alpha$ fornisce un campo vettoriale $X$. Nel caso del teorema precedente, questo campo $X$ genera una foglia simplettica dell'anima, ossia una foglia simplettica *per entrambi i bivettori* del fascio. Consideriamo la forma simplettica indotta dal bivettore $P_1$. Sia essa $\omega_1$: per ottenere la 1-forma successiva nella ricorrenza di Lenard basta, a questo punto, applicare la forma simplettica indotta $\omega_1$ al campo vettoriale $X$.

### 3.2.2 La forma canonica di Darboux - Kronecker

Abbiamo appena visto come è possibile determinare concretamente i coefficienti del polinomio di Gel'fand - Zakharevich (3.6). Tali coefficienti sono, in particolare, funzioni delle variabili dinamiche, per costruzione *in involuzione* e *funzionalmente indipendenti*. Proprio quest'ultima proprietà suggerisce di interpretare le $H_j$ come un nuovo sistema di coordinate che para-

[4]Ricordiamo che le funzioni di Casimir generano un sottospazio di dimensione 1, perchè il fascio ha, per ipotesi, rango massimo.

metrizzi la varietà. Naturalmente, c'è bisogno di trovare altre $n$ coordinate che completino il sistema. Fortunatamente, ciò si può fare in un modo "standard".

In questi termini, possiamo dire che il teorema 3.2 è "completato" dal seguente risultato, che stabilisce una *forma canonica* per i fasci di bivettori di Poisson.

**Teorema 3.3** *Nelle ipotesi del teorema 3.2, esistono n funzioni*

$$K_i : \Omega \to \mathbb{R} \qquad i = 1, ..., n, \tag{3.18}$$

*formanti, insieme ai coefficienti $H_j$ del polinomio di Gel'fand - Zakharevich, un sistema di coordinate locali su $\Omega$, che risultano in involuzione rispetto a tutte le parentesi di Poisson del fascio:*

$$\{K_i, K_j\}_\lambda = 0 \qquad \forall i, j = 1, ..., n, \tag{3.19}$$

*e tali che le sole parentesi di Poisson non nulle con le funzioni $H_j$ sono date da*

$$\begin{array}{l} \{H_j, K_j\}_\lambda = \lambda \\ \{H_{j+1}, K_j\}_\lambda = -1 \end{array} \tag{3.20}$$

**Dimostrazione.** Per trovare le coordinate $K_i$, basta considerare una 1-forma esatta $\alpha \in L_{n-1} \setminus L_n$. Sia $\alpha = dK_1$. Come nel caso del polinomio di Gel'fand - Zakharevich, scriviamo una relazione di ricorrenza di Lenard:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 dK_1 = &\ \mathbf{P}_2 dK_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{P}_1 dK_{n-1} = &\ \mathbf{P}_2 dK_n \end{aligned} \tag{3.21}$$

Per costruzione, le $K_i$ sono in involuzione tra loro e verificano la (3.20). $\square$

In pratica, dai teoremi 3.2 e 3.3, si evince che esistono *due catene accoppiate* costruite con un procedimento ricorsivo. Una è costituita dai coefficienti $H_j$ del polinomio che descrive il Casimir del fascio, l'altra dalle funzioni $K_j$, coniugate a tali coefficienti. Queste nuove coordinate costituiscono un sistema che richiama, assai da vicino, le *coordinate di Darboux* (1.28) di una varietà simplettica.

Dalla (3.20), deduciamo che la matrice che, in questo nuovo sistema di coordinate, rappresenta il fascio di Poisson $\mathbf{P}_\lambda$, ha la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & -{}^tL_n \\ L_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(2n+1) \tag{3.22}$$

dove[5]

$$L_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(n, n+1), \tag{3.23}$$

mentre i blocchi nulli sono entrambi quadrati, ed hanno ordine, rispettivamente $n+1$ ed $n$.

[5]Si tratta esattamente della matrice (2.29) a cui abbiamo fatto riferimento nel paragrafo 2.3.1.

# Capitolo 4

# Esempi di sistemi integrabili

Nell'ambito della teoria dei sistemi bi-hamiltoniani esistono numerosi esempi di grande rilievo. Tra di essi spiccano per importanza il *reticolo di Toda* e l'*equazione di Korteweg - De Vries*. Questi due sistemi hanno avuto un ruolo fondamentale nello sviluppo di numerose aree della Fisica Matematica.

Il reticolo di Toda e gli altri sistemi su reticolo presentano in partenza una struttura hamiltoniana secodo i canoni classici ai quali siamo abituati. L'equazione di Korteweg - De Vries, prototipo dei problemi non lineari di evoluzione è un sistema dinamico hamiltoniano (in effetti anche bi-hamiltoniano) con infiniti gradi di libertà ed è di norma trattata nell'ambito della *teoria dello Scattering Inverso*. In realtà, però, questo sistema nasconde al suo interno sistemi finito dimensionali, costruibili con il metodo dei *flussi stazionari*, trattabili, pertanto, nell'ambito della teoria dei fasci di Poisson.

## 4.1 Il reticolo di Toda

Il reticolo di Toda è un sistema di particelle allineate con interazione esponenziale tra i "primi vicini". Un sistema di questo tipo, con un numero infinito di particelle, fu considerato per la prima volta da Toda nel 1967. Egli scoprì che in questo reticolo anarmonico onde non lineari si propagano senza dispersione di energia.

Il caso di un numero finito di particelle differisce per molti aspetti da quello inizialmente trattato da Toda. Anzitutto, va distinto il reticolo non periodico di $N$ particelle sulla retta, dove esistono concretamente una prima ed un'ultima particella, dal reticolo periodico, nel quale la prima e l'ultima particella interagiscono come se fossero vicine, ovvero, come se in effetti tutte le particelle fossero vincolate a stare su una circonferenza.

Nel 1974 Hénon trovò $N$ integrali primi per un reticolo di $N$ particelle e, nello stesso anno, Flaschka e Manakov ne mostrarono l'involutività, provandone in tal modo la completa integrabilità. Poco dopo, nel 1975, Moser, Kac e van Moerbeke mostrarono che nel reticolo non periodico le quantità $\exp(q_j(t))$, dove $q_j$ rappresenta la posizione della j-esima particella, sono funzioni razionali delle $exp(\lambda_k t)$ dove $\lambda_k$ è il momento asintotico della k-esima particella per $t \to \infty$. Nel 1976 Bogoyavlensky mostrò la relazione esistente tra il reticolo di Toda e l'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{R})$ delle matrici $N \times N$ a traccia nulla, introducendo i reticoli di Toda generalizzati a partire da sistemi di radici di Algebre di Lie semplici. Nel 1979 Olshanetsky, Perelomov e Konstant usarono i metodi della teoria dei gruppi per integrare esplicitamente le equazioni del moto nel caso non periodico. Nello stesso anno Kostant e Adler mostrarono che il reticolo non periodico è simplettomorfo ad un'orbita aggiunta del gruppo delle matrici triangolari. Il reticolo periodico è ancora integrabile, ma, a differenza di quello non periodico, non è asintoticamente libero. Nel 1975 Kac e van Moerbeke ne ridussero alle quadrature le equazioni del moto. Infine, nel 1976 Krichever integrò esplicitamente il sistema in termini delle funzioni theta, utilizzando i metodi della geometria algebrica.

### 4.1.1 Equazioni del reticolo di Toda

Il reticolo di Toda periodico è un sistema di $N$ masse costituenti quella che talvolta viene definita una *catena esponenziale*. Nel caso periodico possiamo pensare queste masse situate su una circonferenza in modo tale che tra la prima e l'ultima sussista la medesima relazione che si ha per qualsiasi altra coppia. Il reticolo aperiodico finito presenta invece le masse disposte su una retta e ancora interagenti soltanto con le prime vicine, tranne la prima e l'ultima che restano *libere*. Le equazioni della dinamica del reticolo di Toda si scrivono solitamente nella forma seguente:

$$\ddot{q}_j = \exp(q_{j+1} - q_j) - \exp(q_j - q_{j-1}) \tag{4.1}$$

con $1 \leq j \leq N$, prese (mod $N$) nel caso periodico e con $x_0 \equiv +\infty, x_{N+1} \equiv -\infty$ nel caso aperiodico finito. Ponendo $p = \dot{q}$ otteniamo:

$$\begin{aligned} \dot{p}_j &= \exp(q_{j+1} - q_j) - \exp(q_j - q_{j-1}) \\ \dot{q}_j &= p_j \end{aligned} \tag{4.2}$$

In termini delle nuove coordinate[1]

$$b_j = p_j$$

$$a_j = \exp(q_{j+1} - q_j)$$

riscriviamo le equazioni come:

$$\begin{aligned} \dot{b_j} &= a_j - a_{j-1} \\ \dot{a_j} &= a_j(b_{j+1} - b_j) \end{aligned} \tag{4.3}$$

### 4.1.2 La struttura bi-hamiltoniana

Una delle caratteristiche fondamentali del reticolo di Toda è di possedere, tanto nel caso aperiodico finito quanto in quello periodico, una struttura bi-hamiltoniana. Ciò significa che le equazioni del moto possono essere interpretate come flussi hamiltoniani relativi a due differenti parentesi di Poisson.

Nel caso periodico, la prima parentesi è *lineare* e può essere scritta, in termini delle funzioni coordinate, nel modo seguente[2]:

$$\{b_{i+1}, a_i\}_1 = -\{b_i, a_i\}_1 = a_i \tag{4.4}$$

ovvero in termini della struttura bivettoriale

$$\mathbf{P}_1 = P_1^{jk} \frac{\partial}{\partial x^j} \wedge \frac{\partial}{\partial x^k}$$

con $\underline{x} = (x^1, ..., x^N, x^{N+1}, ..., x^{2N}) = (b_1, ..., b_N, a_1, ..., a_N)$ e con

$$P_1 = \begin{pmatrix} & & & -a_1 & & a_N \\ & 0 & & a_1 & \ddots & \\ & & & & a_{N-1} & -a_N \\ a_1 & -a_1 & & & & \\ & \ddots & -a_{N-1} & & 0 & \\ -a_N & & a_N & & & \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

[1] Questa parametrizzazione è tratta da [30].

[2] Qui e, più avanti, per l'altra struttura sono scritte le sole parentesi non ovunque nulle.

Le equazioni (4.3) si ottengono come flusso rispetto all'Hamiltoniana

$$H_2 = \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{b_i^2}{2} + a_i \right) \tag{4.6}$$

La seconda struttura, sempre in termini di queste coordinate è data dalle parentesi

$$\begin{array}{l} \{b_{i+1}, b_i\}_2 = a_i \\ \{b_{i+1}, a_i\}_2 = b_{i+1}a_i \\ \{b_i, a_i\}_2 = -b_i a_i \\ \{a_{i+1}, a_i\}_2 = a_{i+1}a_i \end{array} \tag{4.7}$$

cioè dal bivettore $\mathbf{P}_2$ le cui coordinate sono esprimibili per mezzo della matrice

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & a_N & -b_1a_1 & & & b_1a_N \\ a_1 & \ddots & \ddots & & b_2a_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -a_{N-1} & & \ddots & \ddots & \\ -a_N & & a_{N-1} & 0 & & & b_Na_{N-1} & -b_Na_N \\ b_1a_1 & -b_2a_1 & & & 0 & -a_2a_1 & & a_1a_N \\ & \ddots & \ddots & & a_2a_1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -b_Na_{N-1} & & \ddots & \ddots & -a_Na_{N-1} \\ -b_1a_N & & & b_Na_N & -a_1a_N & & a_Na_{N-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

A differenza della prima, questa seconda struttura di Poisson è *quadratica*, come risulta, evidentemente già dalle (4.7). Si può notare che il bivettore $\mathbf{P}_1$ si ottiene, in effetti per deformazione lineare del bivettore $\mathbf{P}_2$. È immediato verificare, infatti, che $\mathbf{P}_2(b_i + \mu, a_i) = \mathbf{P}_2(b_i, a_i) + \mu\mathbf{P}_1(b_i, a_i)$. Le equazioni (4.3) si ritrovano considerando per il sistema la nuova Hamiltoniana

$$H_1 = \sum_{i=1}^{N} b_i \tag{4.9}$$

Nel caso aperiodico le due strutture di Poisson continuano ad essere valide, pur di tenere a mente che ogni qual volta compare $a_N$ nella trattazione, esso in realtà altro non è che una quantità identicamente nulla.

### 4.1.3 Le funzioni di Casimir e le differenze tra caso periodico e aperiodico

Le strutture di Poisson del Toda altro non sono, come abbiamo visto, che matrici di ordine finito. In particolare, nel caso periodico abbiamo a che fare con due matrici di ordine $2N$, mentre nel caso aperiodico finito possiamo già considerare strutture ridotte rappresentate da matrici di ordine $2N-1$, dato che entrambe le matrici presentano blocchi di ordine $2N-1$ orlati da una colonna a destra e da una riga in basso composte di tutti e soli zeri.

Nel caso periodico è opportuno notare che entrambe le strutture di Poisson sono *degeneri*, come risulta subito calcolando i determinanti delle due matrici $P_1$ e $P_2$, quindi hanno nucleo non banale, cioè esistono funzioni di Casimir non costanti tanto per la prima, quanto per la seconda parentesi. I nuclei, e quindi i Casimir si possono calcolare esplicitamente risolvendo i sistemi omogenei associati alle due matrici. Questi sistemi omogenei altro non sono che sistemi di $2N$ equazioni alle differenze, non tutte, evidentemente, indipendenti:

$$\begin{array}{l} a_j(v_j - v_{j+1}) = 0 \\ a_j w_j - a_{j+1} w_{j+1} = 0 \\ 1 \leq j \leq N, \quad N+1 = 1 \end{array} \tag{4.10}$$

per $\mathbf{P}_1$ e

$$\begin{array}{l} a_{j-1}v_{j-1} - a_j v_{j+1} + a_{j-1}b_j w_{j-1} - a_j b_j w_j = 0 \\ a_j b_j v_j - a_j b_{j+1} v_{j+1} - a_j a_{j+1} w_{j+1} + a_j a_{j-1} w_{j-1} = 0 \\ 1 \leq j \leq N, \quad N+1 = 1 \end{array} \tag{4.11}$$

per $\mathbf{P}_2$ dove, dette $C$ le funzioni di Casimir cercate, si è posto $v_j = \frac{\partial C}{\partial b_j}$ e analogamente $w_j = \frac{\partial C}{\partial a_j}$.

Da queste equazioni si vede che i nuclei di entrambi i bivettori sono bidimensionali e, in particolare, si nota immediatamente che il vettore

$$(\overbrace{1, ..., 1}^{N \text{volte}}, 0, ..., 0)$$

appartiene a $\ker \mathbf{P}_1$ e quindi che la seconda Hamiltoniana (4.9) è funzione di Casimir per il bivettore $\mathbf{P}_1$. Inoltre, si deduce che $\ker P_1 \cap \ker P_2$, è sottospazio non vuoto del fibrato $T^*M$, unidimensionale, generato dal vettore

$$(\overbrace{0, ..., 0}^{N \text{volte}}, \frac{1}{a_1}, ..., \frac{1}{a_N}).$$

Ciò ci permette di stabilire che $\sum_{j=1}^{N} \ln a_j$, ovvero $\ln \prod_{j=1}^{N} a_j$ è funzione di Casimir per entrambe le strutture. Purtroppo non è affatto facile determinare esplicitamente il secondo Casimir di $\mathbf{P}_2$, almeno nel caso generale[3].

Se, invece di prendere i bivettori ciascuno separatamente, consideriamo tutto il fascio $\mathbf{P}_2 - \lambda \mathbf{P}_1$ e ne studiamo il nucleo, il che vuol dire, lavorando in pratica sulle matrici, calcolare $\ker(P_2 - \lambda P_1)$, vediamo che esso appare generato da due vettori linearmente indipendenti, uno dei quali non è funzione del parametro $\lambda$. L'altro vettore è, invece proprio il polinomio di grado $N-1$ predetto dalla teoria di Gel'fand e Zakharevich [4]. Una determinazione esplicita dei coefficienti di questo polinomio è cosa assai ardua nella pratica, nonostante nella teoria esso sia semplicemente la soluzione di un sistema omogeneo.

Il caso del reticolo aperiodico finito differisce da quello ora trattato innanzi tutto per il fatto che i bivettori di Poisson risultano entrambi già ridotti, cioè rappresentati entrambi da matrici di ordine $2N-1$. Le equazioni alle differenze scritte nel caso periodico, tuttavia, non possono più essere valide $\forall j$, infatti, si verifica un'evidente asimmetria formale tra le equazioni "estreme" [5] e quelle "centrali". In questo caso, si vede facilmente che entrambi i nuclei sono unidimensionali [6]. Per il bivettore $\mathbf{P}_1$ si vede che la seconda Hamiltoniana (4.6) è ancora una funzione di Casimir. Anche nel caso aperiodico, possiamo calcolare direttamente il nucleo del fascio. Ora, tuttavia, non avremo più un oggetto bidimensionale, ma otterremo più semplicemente un polinomio di grado $N-1$, quello, appunto di Gel'fand - Zakharevich. Ancora una volta, tuttavia, il calcolo si presenta quanto mai arduo.

Esiste, tuttavia, una strada diversa per calcolare il polinomio di Gel'fand - Zakharevich che coinvolge un ulteriore aspetto del reticolo di Toda, la sua *rappresentazione di Lax*. Tale strada sarà proposta nel prossimo paragrafo.

[3] La cosa è invece chiaramente fattibile quando si considerano sistemi di Toda con un numero molto limitato di particelle.

[4] In questo caso, benché a priori lo spazio delle fasi appaia di dimensione pari, cioè $2N$, si potrebbe in teoria quozientare il fascio di Poisson rispetto al Casimir comune riducendo di 1 la dimensione. Questo procedimento risulta, tuttavia, come è evidente dai risultati, superfluo nella pratica.

[5] Quelle che nel caso periodico riguardavano le quantità $a_N$ che qui non figurano più.

[6] Era, in effetti facilmente prevedibile che il Casimir comune del caso periodico e contenente sotto forma di fattori tutte le $a_j$ (compresa $a_N$) fosse, in questo caso, inevitabilmente degenere.

### 4.1.4 La rappresentazione di Lax ed il suo legame con i Casimir del fascio

Come abbiamo in precedenza accennato, è possibile riscrivere le equazioni della dinamica del reticolo di Toda in termini del commutatore di due matrici, cioè, come anche talvolta si dice, rappresentarle in *coppia di Lax*

$$\dot{L} = [L, M]$$

Questa rappresentazione è utile, come sappiamo, al fine di determinare le costanti del moto considerando, a tale scopo, gli *autovalori* della matrice di Lax $L$ oppure i suoi *invarianti simmetrici*, o ancora, come spesso si fa, le *tracce delle sue potenze* [7]. Nel presente caso del reticolo di Toda la matrice di Lax può essere scritta così:

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{N-1} \\ a_N & & 1 & b_N \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

nel caso periodico e

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{N-1} \\ 0 & & 1 & b_N \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

nel caso aperiodico finito. La matrice $M$ in coppia con essa può essere scelta della forma

$$M = \begin{pmatrix} b_1 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & b_N \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

[7] Tradizionalmente queste quantità appaiono opportunamente normalizzate.

nel caso periodico e

$$M = \begin{pmatrix} b_1 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & b_N \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

nel caso aperiodico finito [8]. Le quantità conservate si deducono, quindi, in modo esplicito. In particolare si vede immediatamente che la traccia della matrice di Lax risulta essere in entrambi i casi la somma delle $b_i$, cioè proprio la funzione di Hamilton $H_1$ (4.9) per la struttura di Poisson $\mathbf{P}_2$, che abbiamo riscontrato essere anche Casimir per la struttura $\mathbf{P}_1$. Inoltre, calcolando la traccia del quadrato della medesima matrice, si ottiene l'Hamiltoniana $H_2$ (4.6) della struttura $\mathbf{P}_1$. Le tracce delle potenze successive forniscono un *set* di integrali del moto che risultano in involuzione rispetto a tutto il fascio di Poisson, come si vede dal calcolo diretto, e che sono, perciò, in numero sufficiente a garantire l'integrabilità del sistema.

È abbastanza naturale chiedersi, a questo punto, quale legame sussista tra le quantità conservate ottenute attraverso la deformazione isospettrale di Lax ed i coefficienti del polinomio di Gel'fand - Zakharevich. Cominciamo col considerare il problema spettrale per la matrice di Lax:

$$Lu^{(j)} = \lambda_j u^{(j)} \tag{4.16}$$

ed il suo aggiunto [9]

$${}^tL\tilde{u}^{(j)} = \lambda_j \tilde{u}^{(j)} \tag{4.17}$$

Differenziando il problema (4.16) otteniamo

$$dLu^{(j)} + Ldu^{(j)} = d\lambda_j u^{(j)} + \lambda_j du^{(j)}$$

cioè

$$(L - \lambda_j)du^{(j)} + dLu^{(j)} = d\lambda_j u^{(j)}$$

. Moltiplichiamo a sinistra, usando la forma di dualità, per gli autovettori $\tilde{u}^{(j)}$ del problema aggiunto (4.17) e otteniamo:

$$\langle \tilde{u}^{(j)}, (L - \lambda_j)du^{(j)} \rangle + \langle \tilde{u}^{(j)}, dLu^{(j)} \rangle = \langle \tilde{u}^{(j)}, \lambda_j u^{(j)} \rangle$$

[8] In questo secondo caso, tanto $L$ quanto $M$ sono matrici molto particolari, dette rispettivamente tri-diagonali e bi-diagonali.

[9] A volte gli autovettori $\tilde{u}^{(j)}$ del problema aggiunto sono detti *autovettori sinistri.*

e, quindi, poiché il primo addendo è nullo [10], abbiamo:

$$d\lambda_j = \frac{\langle \tilde{u}^{(j)}, dLu^{(j)} \rangle}{\langle \tilde{u}^{(j)}, u^{(j)} \rangle} \tag{4.18}$$

Se $L = L(x_k)$, allora

$$dL = \sum_k \frac{\partial L}{\partial x_k} dx_k$$

e perciò si ha, in definitiva:

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x_k} = \frac{\langle \tilde{u}^{(j)}, \frac{\partial L}{\partial x_k} u^{(j)} \rangle}{\langle \tilde{u}^{(j)}, u^{(j)} \rangle} \tag{4.19}$$

Questo procedimento permette di ottenere i gradienti degli autovalori, e quindi, integrando, gli autovalori stessi, in termini degli autovettori della matrice di Lax. Di notevole interesse è il legame tra questi autovalori e la struttura bi-hamiltoniana del sistema di Toda che appare nella sorprendente

**Proposizione 4.1** *Sia $L$ la matrice di Lax del sistema di Toda e siano $\lambda_j$ autovalori simultanei del problema spettrale (4.16) e del problema spettrale aggiunto (4.17). Allora*

$$(P_2 - \lambda_j P_1) \bigtriangledown \lambda_j = 0 \tag{4.20}$$

*dove* $(\bigtriangledown \lambda_j)_k = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_k}$.

**Dimostrazione.** Nel caso del reticolo di Toda, la matrice di Lax ha la forma (4.12) oppure (4.13). Ciò permette di calcolare in modo esplicito i gradienti degli autovalori. Dalla (4.19) segue che

$$\begin{array}{c} \frac{\partial \lambda_j}{\partial b_k} = u_k^{(j)} \tilde{u}_k^{(j)} \\ \frac{\partial \lambda_j}{\partial a_k} = u_{k+1}^{(j)} \tilde{u}_k^{(j)} \end{array}$$

e quindi basta verificare che:

$$P_2^{(l)} \begin{pmatrix} u_1 \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ u_N \tilde{u}_N \\ u_2 \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ u_1 \tilde{u}_N \end{pmatrix} = P_1^{(l)} \begin{pmatrix} \lambda_j u_1 \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \lambda_j u_N \tilde{u}_N \\ \lambda_j u_2 \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \lambda_j u_1 \tilde{u}_N \end{pmatrix}$$

[10] $L = \sum \lambda_j u^{(j)} \otimes \tilde{u}^{(j)}$.

dove l'apice $(l)$ indica l'l-esima riga di ciascuna matrice. La verifica di questa uguaglianza è immediata se si tiene presente che gli $u^{(j)}$ e gli $\tilde{u}_{(j)}$ sono autovettori rispettivamente del problema spettrale (4.16) e del problema spettrale aggiunto (4.17), entrambi con autovalore $\lambda_j$. $\square$

Questo risultato comporta, quindi [11]

$$P_2 \bigtriangledown \lambda_j = \lambda_j P_1 \bigtriangledown \lambda_j$$

e, in generale

$$P_2 \sum_j \lambda_j^k \bigtriangledown \lambda_j = P_1 \sum_j \lambda_j^{k+1} \bigtriangledown \lambda_j$$

per $0 \leq k \leq N-2$, e quindi, ponendo

$$I_k = \frac{Tr(L^k)}{k} \tag{4.21}$$

si può scrivere la relazione di ricorrenza

$$P_2 \bigtriangledown I_k = P_1 \bigtriangledown I_{k+1} \tag{4.22}$$

per $0 \leq k \leq N-1$. In particolare, essendo

$$P_2 \sum_j \frac{\bigtriangledown \lambda_j}{\lambda_j} = P_1 \bigtriangledown \lambda_j = P_1 \bigtriangledown I_1 = 0$$

abbiamo

$$P_2 \bigtriangledown Tr(\ln L) = P_2 \bigtriangledown \ln(\det L) = 0 \tag{4.23}$$

il ché equivale a dire

$$P_2 \bigtriangledown \det L = 0. \tag{4.24}$$

In tal modo, abbiamo trovato che $\det L$ è funzione di Casimir per la seconda struttura $\mathbf{P}_2$.

Questo schema ricorsivo ricorda molto da vicino quello che si ottiene a partire dal polinomio di Gel'fand - Zakharevich. Sia esso $H(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} H_j \lambda^{N-j}$. Poiché

$$(P_2 - \lambda P_1) \bigtriangledown H(\lambda) = 0$$

[11] È bene tenere a mente che non sussiste, benché la forma possa trarre in inganno, alcuna relazione tra gli autovalori della matrice di Lax ed il parametro $\lambda$ del fascio di Poisson.

segue che

$$P_2 \bigtriangledown H(\lambda) = \lambda P_1 \bigtriangledown H(\lambda)$$

e quindi, per il principio d'identità dei polinomi

$$\begin{aligned} P_2 \bigtriangledown H_N &= 0 \\ &\vdots \\ P_2 \bigtriangledown H_{k-1} &= P_1 \bigtriangledown H_k \quad 2 \leq k \leq N \\ &\vdots \\ 0 &= P_1 \bigtriangledown H_1 \end{aligned} \tag{4.25}$$

L'idea naturale è quindi quella di mettere in relazione i due schemi iterativi, osservando però che la ricorrenza definita per gli integrali primi originati dalla matrice di Lax, a differenza di quella definita sul polinomio di Gel'fand - Zakharevich, non si tronca mai. Una via per fare ciò è ricercare il Casimir del fascio sotto forma di *serie di Laurent* e imporre, quindi, che

$$(P_2 - \lambda P_1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\lambda^k} = 0 \tag{4.26}$$

È subito visto che l'equazione (4.26) è verificata con $g_k = \frac{\bigtriangledown Tr(L^k)}{k} = \bigtriangledown I_k$. D'altra parte, per il *teorema di Cayley - Hamilton* possiamo scrivere

$$L^N + c_1 L^{N-1} + ... + c_N = 0 \tag{4.27}$$

con $c_N = (-1)^N \det L$, e perciò, passando alle tracce,

$$N I_N + (N-1) c_1 I_{N-1} + ... + c_{N-1} I_1 + N c_N = 0$$

[12] cioè

$$\sum_{j=0}^{N} \frac{N-j}{N} c_j I_{N-j} = (-1)^N \det L$$

con $c_0 = 1$, e quindi, per i gradienti,

$$g_N + \sum_{j=1}^{N} \frac{N-j}{N} c_j g_{N-j} = (-1)^{N+1} \bigtriangledown \det L \tag{4.28}$$

[12] Infatti $Tr\mathbb{I}_N = N$.

D'altra parte, essendo il Casimir di $P_1$ non banale, la successione dei coefficienti $g_k$ non può essere unica. Ponendo dunque:

$$\tilde{g}_r = g_r + \sum_{j=1}^{r-1} \alpha_j g_{r-j}$$

vediamo che scegliendo i coefficienti

$$\alpha_j = \frac{N-j}{N} c_j$$

otteniamo

$$\tilde{g}_N = \bigtriangledown \det L$$

e quindi

$$P_2 \tilde{g}_N = 0$$

Moltiplicando per $\lambda^N$ la serie di Laurent

$$\sum_{j=1}^{N} \tilde{g}_j \lambda^{-j}$$

ora costruita, abbiamo un polinomio di grado $N-1$:

$$\sum_{j=1}^{N} \tilde{g}_j \lambda^{N-j} \tag{4.29}$$

che è esso stesso gradiente di una funzione di Casimir per il fascio. Integrando, quindi, i coefficienti $\tilde{g}_j$, otteniamo ancora un polinomio, che è proprio il polinomio di Gel'fand - Zakharevich $H(\lambda)$.

### 4.1.5 Il caso del reticolo periodico a tre particelle

Per il reticolo periodico a tre particelle è possibile fare esplicitamente tutti i calcoli. In particolare, grazie alla costruzione proposta nel paragrafo precedente, le funzioni che costituiscono i coefficienti del polinomio di Gel'fand - Zakharevich si possono costruire a partire dalla rappresentazione di Lax del sistema.

Sappiamo già che, per il reticolo periodico a tre particelle, una rappresentazione di Lax può essere ottenuta in termini della matrice

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 1 \\ 1 & b_2 & a_2 \\ a_3 & 1 & b_3 \end{pmatrix} \tag{4.30}$$

È immediato calcolare le tracce delle potenze di questa matrice $L$:

$$\begin{gathered} TrL = b_1 + b_2 + b_3 \\ TrL^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 \end{gathered} \tag{4.31}$$

mentre

$$\det L = a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 - a_1b_3 - a_2b_1 - a_3b_2 + 1. \tag{4.32}$$

Poniamo

$$g_1 = \bigtriangledown TrL$$

$$g_2 = \bigtriangledown TrL^2.$$

Il teorema di Cayley - Hamilton ci permette di scrivere la relazione

$$L^3 + c_1L^2 + c_2L = \det L$$

dove

$$c_1 = -TrL.$$

Scriviamo i gradienti $\tilde{g}_j$ dei coefficienti del polinomio di Gel'fand - Zakharevich:

$$\tilde{g}_1 = g_1$$

$$\tilde{g}_2 = g_2 + \alpha_1 g_1$$

dove

$$\alpha_1 = \frac{2}{3}c_1 = -\frac{2}{3}TrL,$$

quindi

$$\tilde{g}_1 = \bigtriangledown TrL$$

$$\tilde{g}_2 = \bigtriangledown TrL^2 - \frac{2}{3}TrL \bigtriangledown TrL$$

e, infine, per costruzione

$$\tilde{g}_3 = \bigtriangledown \det L.$$

Il polinomio di Gel'fand - Zakharevich, i cui coefficienti sono ottenibili, come abbiamo detto, integrando le funzioni $\tilde{g}_j$, è

$$H(\lambda) = H_1\lambda^2 + H_2\lambda + H_3, \tag{4.33}$$

dove

$$\begin{aligned} &H_1 = TrL = b_1 + b_2 + b_3 \\ &H_2 = \frac{TrL^2}{2} - \frac{(TrL)^2}{3} = \frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2}{6} + \frac{2}{3}(b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1) + a_1 + a_2 + a_3 \\ &H_3 = \det L = a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 - a_1b_3 - a_2b_1 - a_3b_2 + 1. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Possiamo, a questo punto, scrivere esplicitamente la *catena* costruita a partire dai coefficienti del polinomio di Gel'fand - Zakharevich[13]:

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \overset{\mathbf{P}_1}{\rightarrow} & 0 \\ & \overset{\mathbf{P}_2}{\searrow} & \\ H_2 & \overset{\mathbf{P}_1}{\rightarrow} & X \\ & \overset{\mathbf{P}_2}{\searrow} & \\ H_3 & \overset{\mathbf{P}_1}{\rightarrow} & Y \\ & \overset{\mathbf{P}_2}{\searrow} & \\ & & 0 \end{array} \tag{4.35}$$

I campi vettoriali hamiltoniani $X$ e $Y$ generano l'*anima* del fascio di Poisson $\mathbf{P}_2 - \lambda\mathbf{P}_1$. Essi generano, cioè, l'intersezione di tutte le foglie simplettiche, al variare del parametro $\lambda$. Rispetto alla base $(\frac{\partial}{\partial b_1}, \frac{\partial}{\partial b_2}, \frac{\partial}{\partial b_3}, \frac{\partial}{\partial a_1}, \frac{\partial}{\partial a_2}, \frac{\partial}{\partial a_3})$, il campo $X$ ha coordinate

$$\begin{pmatrix} a_3 - a_1 \\ a_1 - a_2 \\ a_2 - a_3 \\ b_1a_1 - b_2a_1 \\ b_2a_2 - b_3a_2 \\ b_3a_3 - b_1a_3 \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

[13]Ricordiamo che una funzione $f$ è mappata da un bivettore di Poisson $\mathbf{P}$ nel campo vettoriale hamiltoniano $\mathbf{P}df$. La catena scritta qui di seguito va pertanto intesa in questi termini.

mentre, per il campo $Y$, abbiamo

$$\begin{pmatrix} b_3a_1 - b_2a_3 \\ b_1a_2 - b_3a_1 \\ b_2a_3 - b_1a_2 \\ b_2b_3a_1 - b_1b_3a_1 + a_3a_1 - a_1a_2 \\ b_3b_1a_2 - b_2b_1a_2 + a_1a_2 - a_2a_3 \\ b_1b_2a_3 - b_3b_2a_3 + a_2a_3 - a_3a_1 \end{pmatrix} \tag{4.37}$$

## 4.2 L'equazione di Korteweg - De Vries

L'*equazione di Kortweg - De Vries* è a ragione considerata il prototipo di tutti i problemi di evoluzione non lineari *conservativi.*

Kortaweg e De Vries ricavarono la loro equazione,

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x \tag{4.38}$$

dove, come al solito, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ e analogamente $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, nel 1895, per chiudere il dibattito apertosi nel 1844, quando il naturalista e ingegnere navale Russell espose in una famosa relazione dal titolo *Report on waves* i risultati di un esperimento da lui stesso condotto una decina d'anni prima. Egli aveva osservato le onde provocate da una chiatta che si era improvvisamente fermata mentre percorreva un canale poco profondo. Aveva notato, in particolare, la presenza di "*onde solitarie*", lunghe una trentina di piedi e alte circa uno, propagarsi nel canale mantenendo per oltre un miglio la forma e la velocità di circa otto miglia l'ora. Russell, evidentemente affascinato da questo curioso fenomeno, fece, in seguito, ulteriori esperimenti in una vasca da lui stesso progettata, con l'obiettivo di derivare una formula esatta che legasse velocità e ampiezza di queste onde. Secondo i calcoli di Airy e Stokes, tuttavia, non potevano esistere onde la cui forma e velocità si mantenessero così a lungo come affermava Russell. Solo più tardi, i lavori di Boussinesq del 1872, di Rayleigh del 1876, ed infine l'articolo di Korteweg e De Vries *On the change of form of long wave advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, apparso, come abbiamo detto, solo nel 1895, sottolinearono gli errori commessi da Airy e Stokes nella loro analisi ed affermarono la correttezza delle conclusioni di Russell.

Negli anni 1954-55, a Los Alamos, esperimenti numerici apparentemente innocui condotti sul computer MANIAC da Fermi, Pasta e Ulam mostrarono l'esistenza di sorprendenti soluzioni *quasi-periodiche* per un sitema non lineare di equazioni discrete. Una decina di anni più tardi, Kruskal e Zabusky mostrarono che il limite continuo di alcune soluzioni delle equazioni di Fermi - Pasta - Ulam sono esprimibili in termini delle soluzioni dell'equazione (4.38). Studiando il problema iniziale per la (4.38), scoprirono, inoltre, notevoli somiglianze tra le caratteristiche delle soluzioni, ottenute numericamente, di questa equazione e quelle del sistema di Fermi - Pasta - Ulam. Queste soluzioni dal comportamento tanto notevole presero il nome di *soluzioni solitoniche* o *solitoni*.

A partire dal lavoro di Kruskal e Zabusky fu messa in luce una ricca e complessa fenomenologia, ampiamente descritta in quella che oggi prende il nome di *teoria delle equazioni risolubili con la tecnica dello scattering inverso* [18, 20, 22]. Grazie a questa teoria fu provata, fra l'altro, l'integrabilità di tutta la gerarchia di equazioni non lineari costruita a partire dall'equazione di Korteweg - De Vries e furono costruite esplicitamente le soluzioni solitoniche in termini di funzioni iperellittiche.

Per maggiori dettagli sulla storia dell'equazione di Korteweg - De Vries, in relazione, soprattutto, allo sviluppo della teoria dello *scattering inverso*, si veda [22, pag.17–31].

### 4.2.1 La struttura bi-hamiltoniana

Per l'equazione di Korteweg - De Vries (4.38) è possibile ricavare facilmente una formulazione bi-hamiltoniana considerando come $M$ l'*algebra dei polinomi in* $u, u_x, u_{xx}, ...$ dove $u = u(x)$ è una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$. I bivettori di Poisson, in questo caso, non possono avere una rappresentazione in termini di matrici, dato che la varietà ha dimensione infinita. Tuttavia essi esistono e sono espressi sotto forma di operatori differenziali.

Per l'equazione di Korteweg - De Vries, il primo bivettore è dato da

$$\mathbf{P}_1 = \frac{d}{dx} \tag{4.39}$$

mentre il secondo è dato da

$$\mathbf{P}_2 = \frac{d^3}{dx^3} + 4u\frac{d}{dx} + 2u_x \tag{4.40}$$

Naturalmente, anche le parentesi di Poisson hanno un aspetto diverso. Esse si costruiscono come segue:

Siano $f, g \in M$. Consideriamo le due leggi di composizione

$$\{F, G\}_{\mathbf{P}_1} \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta g}{\delta u} \left( \frac{\delta f}{\delta u} \right)_x dx \tag{4.41}$$

$$\{F, G\}_{\mathbf{P}_2} \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta g}{\delta u} \left[ \left( \frac{\delta f}{\delta u} \right)_{xxx} + 4u \left( \frac{\delta f}{\delta u} \right)_x + 2u_x \frac{\delta f}{\delta u} \right] dx \tag{4.42}$$

sullo spazio dei funzionali $F[u]$ di tipo integrale:

$$F[u] \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, u_x, u_{xx}, ...) dx, \tag{4.43}$$

dove

$$\frac{\delta f}{\delta u} \overset{def}{=} \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left( \frac{\partial f}{\partial u_{\underbrace{x...x}_{k\text{volte}}}} \right) \tag{4.44}$$

è detto *gradiente lagrangiano* di $f$.

È immediato verificare che valgono le proprietà (2.1) e (2.6). Pertanto, le due leggi di composizioni sono effettivamente due parentesi di Poisson.

I due bivettori (4.39) e (4.40) risultano essere compatibili ed ha quindi senso considerare il fascio di Poisson

$$\mathbf{P}_2 - \lambda \mathbf{P}_1$$

e ricercarne i Casimir utilizzando una serie di Laurent formale

$$h(\lambda) = \sum_{j \geq 0} \frac{h_j}{\lambda^j} \tag{4.45}$$

dove i coefficienti $h_j$ sono 1-forme differenziali. Naturalmente, è definito in questo modo uno schema ricorsivo in modo tale che $h_0$ è Casimir di $\mathbf{P}_1$ mentre i successivi coefficienti $h_j$ sono le funzioni di Hamilton per una *gerarchia* di campi vettoriali bi-hamiltoniani:

$$X_{h_j} = \mathbf{P}_2 dh_j = \mathbf{P}_2 dh_{j+1} \tag{4.46}$$

In ogni punto $u \in M$ i flussi bi-hamiltoniani sono dati da $\frac{du}{dt_j} = X_{h_j}(u)$, dove $t_j$è il parametro di evoluzione del flusso j-esimo.

Scriviamo, le prime hamiltoniane della gerarchia di Korteweg - De Vries:

$$\begin{array}{l} h_0 = \frac{1}{2}u \\ h_1 = \frac{1}{2}u^2 \\ h_2 = -\frac{1}{2}u_x^2 + u^3 \\ h_3 = \frac{1}{2}u_{xx}^2 - 5uu_x^2 + \frac{5}{2}u^4 \\ \vdots \end{array} \tag{4.47}$$

Le funzioni $h_j$ sono un numero *infinito* di quantità conservate per la (4.38) e costituiscono, rispetto ad entrambi i bivettori di Poisson, una *gerarchia di sistemi bi-hamiltoniani integrabili.* Le equazioni di evoluzione (alle derivate parziali) che si ottengono hanno ordine via via più alto: esattamente, all'hamiltoniana $h_k$, corrisponde un'equazione di evoluzione di ordine $2k+1$ (nelle derivate rispetto a $x$).

### 4.2.2 I flussi stazionari e la mappa di Miura

In questo lavoro, il nostro interesse è principalmente rivolto a sistemi bi-hamiltoniani di dimensione finita, cioè parametrizzabili in termini di una varietà di Poisson finito-dimensionale. In effetti, sebbene la gerarchia di Korteweg - De Vries conduca, come abbiamo visto, a sistemi bi-hamiltoniani di dimensione infinita, essa "nasconde", ad ogni ordine, una famiglia di sistemi bi-hamiltoniani integrabili di *dimensione finita.* Tali sistemi sono i cosiddetti *flussi stazionari.*

Sia $M_n$ l'insieme dei punti fissi del flusso $n$-esimo $X_{2n+1} \stackrel{def}{=} X_{h_n}$ della gerarchia di Korteweg - De Vries:

$$M_n = \{u | X_{2n+1}(u, u_x, ..., u^{(2n+1)}) = 0\}. \tag{4.48}$$

$M_n$ è una varietà di dimensione finita e *dispari*, e può essere interpretata come *spazio delle fasi esteso* per il sistema hamiltoniano relativo alla struttura di Poisson

$$\mathbf{P}_1 = P_1^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{4.49}$$

dove ciascuna $x^i$ è funzione di $u$ e delle sue derivate, mentre

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_n & 0 \\ -\mathbb{I}_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(2n+1). \tag{4.50}$$

Le foglie simplettiche $2n$-dimensionali, indotte su $M_n$ da questa struttura, sono perciò:

$$S_n = \{u | x^{2n+1} = C_{2n+1}\} \tag{4.51}$$

dove $C_{2n+1}$ è una costante. In effetti, per costruzione, essa è esattamente il Casimir del bivettore $\mathbf{P}_1$.

Per costruire una seconda struttura di Poisson, compatibile con la (4.49), si utilizza, per questi sistemi, un metodo particolare, basato sul concetto di *mappa di Miura*. In breve, si tratta di una trasformazione $M$, che mette in relazione l'equazione (4.38) con la cosiddetta *equazione modificata*:

$$v_t = v_{xxx} - 6v^2 v_x, \tag{4.52}$$

ponendo $u = M(v) = -v_x - v^2$.

In particolare, la *mappa di Miura* stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i flussi stazionari di (4.38) e gli analoghi di (4.52). Più esattamente, $\forall n$, $M$ è un *diffeomorfismo locale* tra la varietà di Poisson $M_n$ e la varietà di Poisson $N_n$ costruita a partire dal flusso $n$-esimo della (4.52).

La seconda struttura di Poisson si ottiene in modo canonico: la matrice che la rappresenta è congruente alla matrice (4.50) per mezzo della *matrice jacobiana* $J$ della mappa di Miura $M$:

$$P_2 = J P_1 {}^t J|_{u=M(v)} \tag{4.53}$$

Per una trattazione completa di questo procedimento si veda, ad esempio [1].

### 4.2.3 Il flusso stazionario del terzo ordine

Il più semplice esempio di flusso stazionario dell'equazione 4.38 è, naturalmente, quello di ordine più basso[14]:

$$X_3 = 0. \tag{4.54}$$

[14] Tale flusso si indica, in letteratura, con la sigla $\mathbf{KdV}_3$.

Integrando una volta rispetto ad $x$, si ha:

$$u_{xx} + 3u^2 = C_3 \tag{4.55}$$

Poniamo $q = u$ e $p = -u_x$. L'equazione (4.55) si trasforma nel sistema

$$\begin{array}{l} q_x = -p \\ p_x = 3q^2 - C_3 \\ (C_3)_x = 0 \end{array} \tag{4.56}$$

che è hamiltoniano rispetto a $\mathbf{P}_1$, con funzione di Hamilton

$$H_1(q, p, C_3) = -\frac{p^2}{2} - q^3 + C_3 q. \tag{4.57}$$

Il secondo bivettore di Poisson $\mathbf{P}_2$, costruito con il metodo della mappa di Miura, è parametrizzato dalla matrice

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2q & -2p \\ 2q & 0 & 6q^2 + 2C_3 \\ 2p & -6q^2 + 2C_3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(3). \tag{4.58}$$

La hamiltoniana che ci fa ritrovare il sistema (4.56) in termini di questa seconda struttura è la funzione

$$H_0(p, q, C_3) = \frac{1}{2} C_3, \tag{4.59}$$

che abbiamo già detto essere Casimir del primo bivettore. Inoltre si verifica, con un semplice calcolo, che $H_1$ è Casimir di $\mathbf{P}_2$. Ciò permette di scrivere, ancora una volta, la ricorrenza di Lenard:

$$\begin{array}{rl} 0 = & \mathbf{P}_1 dH_0 \\ \mathbf{P}_2 dH_0 = & \mathbf{P}_1 dH_1 \\ \mathbf{P}_2 dH_1 = & 0 \end{array} \tag{4.60}$$

ovvero la *catena*:

$$\begin{array}{ccc} H_0 & \overset{\mathbf{P}_1}{\rightarrow} & 0 \\ & \overset{\mathbf{P}_2}{\searrow} & \\ H_1 & \overset{\mathbf{P}_1}{\rightarrow} & \Xi \\ & \overset{\mathbf{P}_2}{\searrow} & \\ & & 0 \end{array} \tag{4.61}$$

Il campo vettoriale $\Xi$ genera l'anima unidimensionale del fascio di Poisson $\mathbf{P}_\lambda = \mathbf{P}_2 - \lambda \mathbf{P}_1$. Vale la pena ricordare che, per costruzione, le sue coordinate nella base $(\frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial C_3})$ non sono altro che i membri di destra delle *equazioni di Hamilton* (4.56).

Il polinomio di Gel'fand - Zakharevich del fascio è di primo grado e si scrive:

$$H(\lambda) = H_1 + \lambda H_0. \tag{4.62}$$

### 4.2.4 Il flusso stazionario del quinto ordine

Il flusso del quinto ordine[15] è un esempio meno banale rispetto al precedente. L'equazione che lo rappresenta è:

$$u_{5x} + 10uu_{xxx} + 20u_x u_{xx} + 30u^2 u_x = 0, \tag{4.63}$$

dove $u_{kx} \stackrel{def}{=} \frac{\partial^k u}{\partial x^k}$.

Integrando una volta la (4.63), otteniamo:

$$u_{4x} + 10uu_{xx} + 5u_x^2 + 10u^3 = C_5, \tag{4.64}$$

dove $C_5$ è, al solito, una costante d'integrazione.

Poniamo:

$$\begin{aligned} q_1 &= u \\ q_2 &= u_x \\ p_1 &= -u_{xxx} - 10uu_x \\ p_2 &= u_x x \end{aligned} \tag{4.65}$$

In questi termini, l'equazione (4.64) si trasforma in un sistema di cinque equazioni, hamiltoniano, rispetto al bivettore di Poisson $\mathbf{P}_1$, dato, per $n = 2$, dalla (4.50), con hamiltoniana

$$H_1(q_1, q_2, p_1, p_2, C_5) = \frac{1}{2}p_2^2 + q_2 p_1 + 5q_1 q_2^2 - \frac{5}{2}q_1^4 + q_1 C_5, \tag{4.66}$$

[15] Esso è detto $\mathbf{KdV}_5$.

ed ancora hamiltoniano, rispetto al bivettore di Poisson $\mathbf{P}_2$, dato da

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4q_1 & 0 & 2q_2 \\ 1 & 0 & -4q_2 & -6q_1 & 2p_2 \\ -4q_1 & 4q_2 & 0 & 2p_2+30q_1^2 & -\Omega \\ 0 & 6q_1 & -2p_2-30q_1^2 & 0 & -2p_1-20q_1q_2 \\ -2q_2 & -2p_2 & \Omega & 2p_1+20q_1q_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(5), \tag{4.67}$$

dove $\Omega = 2C_5 + 10q_2^2 - 20q_1^3$, con hamiltoniana

$$H_0 = \frac{1}{2}C_5. \tag{4.68}$$

Questa funzione è, evidentemente, Casimir del bivettore $\mathbf{P}_1$.

Il bivettore $\mathbf{P}_2$ è stato ottenuto attraverso il metodo della mappa di Miura e, quindi, è, per costruzione, compatibile con il bivettore $\mathbf{P}_1$. Il sistema è, pertanto, *bi-hamiltoniano*.

Mediante il consueto procedimento ricorsivo di Lenard, otteniamo l'ulteriore quantità conservata:

$$\begin{aligned} H_2(q_1,q_2,p_1,p_2,C_5) = \; & -\tfrac{1}{2}p_1^2 - 2q_1p_2^2 + (q_2^2 - 10q_1^3)p_2 - 4q_1q_2p_1 \\ & -5q_1^2q_2^2 - 12q_1^5 + (p_2+3q_1^2)C_5. \end{aligned} \tag{4.69}$$

Si verifica facilmente che $H_2$ è Casimir del bivettore $\mathbf{P}_2$.

Possiamo scrivere, a questo punto, la catena:

$$\begin{array}{ccc} H_0 & \xrightarrow{\mathbf{P}_1} & 0 \\ & \overset{\mathbf{P}_2}{\searrow} & \\ H_1 & \xrightarrow{\mathbf{P}_1} & X \\ & \overset{\mathbf{P}_2}{\searrow} & \\ H_2 & \xrightarrow{\mathbf{P}_1} & Y \\ & \overset{\mathbf{P}_2}{\searrow} & \\ & & 0 \end{array} \tag{4.70}$$

Il polinomio di Gel'fand - Zakharevich è:

$$H(\lambda) = H_2 + \lambda H_1 + \lambda^2 H_0. \tag{4.71}$$

I campi vettoriali hamiltoniani $X$ ed $Y$, che figurano nella catena (4.70), generano l'anima bidimensionale del fascio di Poisson.

Nella base $(\frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2}, \frac{\partial}{\partial C_5})$ questi campi hanno coordinate, rispettivamente

$$\begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \\ 10q_1^3 - 5q_2^2 - C_5 \\ -10q_1q_2 - p1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.72}$$

e

$$\begin{pmatrix} -4q_1q_2 - p_1 \\ -10q_1^3 - 4q_1p_2 + q_2 + C_5 \\ 60q_1^4 + 30q_1^2p_2 + 10q_1q_2^2 - 6q_1C_5 + 4p_1p_2 + 2p_2^2 \\ 10q_1^2q_2 + 4q_1p_1 - 2q_2p_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.73}$$

Per ottenere la forma canonica di Darboux - Kronecker di cui abbiamo parlato nel teorema 3.3, basterà partire da una funzione $K_1$, il cui differenziale si trovi in[16] $L_0 \setminus L_1$. La seconda funzione coordinata $K_2$ si ottiene utilizzando il procedimento ricorsivo (3.21). La matrice che rappresenta il fascio di Poisson $\mathbf{P}_\lambda$ nelle coordinate $(H_0, H_1, H_2, K_1, K_2)$ ha la forma cercata:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(5). \tag{4.74}$$

### 4.2.5 Il sistema di Hénon - Heiles

Il sitema di *Hénon - Heiles* è descritto dalla hamiltoniana

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2; \omega_1, \omega_2, a, b) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}\omega_1 q_1^2 + \frac{1}{2}\omega_2 q_2^2 + a q_1 q_2^2 - \frac{1}{3} b q_1^3. \tag{4.75}$$

[16] Per la definizione di questi sottospazi, si veda lo schema (3.9).

L'interesse di questo sistema bidimensionale sta nel fatto che, nonostante la evidente semplicità della funzione di Hamilton, il comportamento dinamico, al variare dei parametri $\omega_1, \omega_2, a, b$, è particolarmente ricco.

Va subito notato che il sistema di Hénon - Heiles non è sempre integrabile. Esistono, tuttavia, tre casi particolari nei quali è stata provata l'integrabilità:

- il caso di *Korteweg - De Vries*:

$$b = -6a, \quad \omega_i \quad \text{arbitari;}$$

- il caso di *Sawada - Kotera*:

$$b = -a, \quad \omega_1 = \omega_2;$$

- il caso di *Kaup - Kuperschmidt*:

$$b = -16a, \quad \omega_1 = 16\omega_2.$$

Il sistema di Hénon - Heiles può essere considerato come caso particolare di un sistema hamiltoniano, detto *Hénon - Heiles generalizzato*, avente funzione di Hamilton

$$H_g = H + \frac{\alpha}{2q_2^2}, \tag{4.76}$$

con $\alpha$ costante arbitraria. Il sistema generalizzato è equivalente ai flussi stazionari di alcune equazioni alle derivate partiali. In particolare, nei tre casi in precedenza descritti, si tratta dei flussi del quinto ordine delle gerarchie, rispettivamente, di Kortewg - De Vries, di Sawada - Kotera e di Kaup - Kuperschmidt[17].

Nei tre casi integrabili, inoltre, esistono trasformazioni di coordinate che consentono l'eliminazione dalla hamiltoniana dei termini "*armonici*" $\omega_i$. Ciò ci permette di scrivere:

$$H_g = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + aq_1q_2^2 - \frac{1}{3}bq_1^3 + \frac{\alpha}{2q_2^2}. \tag{4.77}$$

Possiamo, a questo punto, interpretare la (4.77) come funzione delle cinque variabili dinamiche $q_1, q_2, p_1, p_2, \alpha$, e quindi considerare il sistema di

[17] Per ulteriori riferimenti, si vedano [5, 31].

Hénon - Heiles generalizzato come sistema hamiltoniano rispetto al bivettore di Poisson $\mathbf{P}_1$, definito dalla matrice:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(5). \tag{4.78}$$

Una proprietà notevole del sistema generalizzato, nel caso detto di Korteweg - De Vries, è l'esistenza di una seconda parametrizzazione, detta *parametrizzazione* $r$. La deduciamo, fissate $a = \frac{1}{2}$ e $b = -3$, dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} q_1 &= \ r_1 \\ q_2^2 &= \ -2r_2 - r_1^2 \\ p_1 &= \ s_2 \\ q_2 p_2 &= \ -s_1 - r_2 s_2 \\ \alpha &= \ 2r_2 s_2 - s_1^2 - 2r_1 s_1 s_2 - 4r_1 r_2^2 + 2r_2 c + r_1^2 c \end{aligned} \tag{4.79}$$

La *mappa di Miura* $M : (r_1, r_2, s_1, s_2, c) \to (q_1, q_2, p_1, p_2, \alpha)$ permette di costruire, nel modo già discusso, una seconda struttura di Poisson $\mathbf{P}_2$ per il sistema, data dalla matrice:

$$P_2 = J_M {P_1}^t J_M =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{q_2} & 2q_2 p_2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{q_2} & \frac{2q_1}{q_2^2} & 2p_1 q_2 - 4p_2 q_1 \\ 0 & \frac{1}{q_2} & 0 & -\frac{p_2}{q_2^2} & -2q_1 q_2^2 + 2p_2^2 + 2\frac{\alpha}{q_2^2} \\ \frac{1}{q_2} & -\frac{2q_1}{q_2^2} & \frac{p_2}{q_2^2} & 0 & -2p_1 p_2 - 2q_1^2 q_2 - q_2^3 - \frac{4\alpha q_1}{q_2^2} \\ * & * & * & * & 0 \end{pmatrix} \tag{4.80}$$

dove $J_M$ è la matrice jacobiana della mappa $M$, e gli asterischi dell'ultima riga indicano gli elementi che antisimmetrizzano la matrice[18].

In effetti, anche negli altri casi integrabili esiste un modo per costruire una seconda struttura di Poisson per il sistema generalizzato. Tuttavia, è *solo*[19] nel caso presente, che i bivettori $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ risultano compatibili.

[18] L'ultima riga della matrice $P_2$ è, cioè, la trasposta della quinta colonna, campbiata di segno.

[19] Si può dimostrare (si veda ancora [5]) che il sistema di Hénon - Heiles generalizzato è *bi-hamiltoniano*, esclusivamente per $\frac{b}{a} = -6$, cioè nel caso di Korteweg - De Vries. Negli altri due casi integrabili si riesce, comunque, a costruire delle strutture *quasi bi-hamiltoniane*.

Questa considerazione apre la strada all'*analisi di Kronecker* del fascio $\mathbf{P}_\lambda = \mathbf{P}_2 - \lambda \mathbf{P}_1$.

Osserviamo che la funzione

$$H_0 = -\frac{1}{2}\alpha \tag{4.81}$$

è Casimir della struttura $\mathbf{P}_1$, mentre la hamiltonana $H_g$ è Casimir di $\mathbf{P}_2$. Denotiamo con $H_2$ la funzione $H_g$. Scriviamo la ricorrenza di Lenard:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 dH_0 &= \ 0 \\ \mathbf{P}_1 dH_1 &= \ \mathbf{P}_2 dH_0 \\ \mathbf{P}_1 dH_2 &= \ \mathbf{P}_2 dH_1 \\ 0 &= \ \mathbf{P}_2 dH_2 \end{aligned} \tag{4.82}$$

che equivale, come sappiamo, a scrivere il Casimir del fascio, per mezzo del polinomio di Gel'fand - Zakharevich:

$$H(\lambda) = H_2 + H_1\lambda + H_0\lambda^2. \tag{4.83}$$

La funzione $H_1$ è, in questo caso, il *secondo integrale del moto* in involuzione con $H_g \equiv H_2$, ottenuto, classicamente, facendo uso del metodo di Lax[20]:

$$H_1(q_1, q_2, p_1, p_2, \alpha) = -q_2 p_1 p_2 + q_1 p_2^2 - \frac{1}{8} q_2^4 - \frac{1}{2} q_1^2 q_2^2 + \frac{q_1 \alpha}{q_2^2}. \tag{4.84}$$

Anche in questo caso, come d'altra parte abbiamo visto per il flusso stazionario del quinto ordine della gerarchia di Korteweg - De Vries, l'anima bidimensionale del fascio è generata dai campi vettoriali hamiltoniani:

$$\begin{aligned} X &= \mathbf{P}_1 dH_1 = \mathbf{P}_2 dH_0, \\ Y &= \mathbf{P}_1 dH_2 = \mathbf{P}_2 dH_1. \end{aligned} \tag{4.85}$$

* * *

A conclusione di questo lavoro di tesi, mi piace ricordare una frase del grande Henri Poincaré, tratta dalla sua opera epistemologica principale, *Il*

[20] Una proprietà notevole di tutti e tre i casi integrabili del sistema generalizzato è proprio l'esistenza di una tale rappresentazione. Per altri dettagli si veda, ancora una volta, [5].

*valore della scienza*[21], del 1905, a proposito delle "nuove" - per quell'epoca - frontiere della Geometria:

"*Sorge quindi una questione: questo continuo amorfo che la nostra analisi ha lasciato sussistere, non è una forma imposta alla nostra sensibilità? Avremmo allargata la prigione in cui quest'ultima è rinchiusa, ma sarebbe sempre una prigione.*"

[21] Si veda [24, pag.48].

# Bibliografia


[1] Antonowicz M. Fordy A.P. Wojciechwski S., *Integrable Stationary Flows: Miura Maps and Bi-Hamiltonian Structures, Physics Letters A, 124,3,* 1987

[2] Arnol'd V.I., *Metodi Matematici della Meccanica Classica,* Editori Riuniti, Roma 1992

[3] Arnol'd V.I. Novikov S.P., *Dynamical Systems IV, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 4,* Springer Verlag, Berlin Heidelberg 1990

[4] Audin M., *Spinning Tops,* Cambridge University Press, Cambridge 1996

[5] Blaszak M. Rauch - Wojciechowski S., *A generalized Hénon - Heiles system and related integrable Newton equations,* preprint Linkoeping University, Sweden 1993

[6] Casati P. Falqui G. Magri F. Pedroni M., *The KP Theory revisited, fasc. I-IV, Ref. SISSA/2-5/96/FM,* SISSA-ISAS, Trieste 1996

[7] Fordy A.P. Harris S.D., *Hamiltonian Structures in Stationary Manifold Coordinates, Algebraic Aspects of Integrable Systems,* a cura di A.Fokas e I.M.Gel'fand, Birkhäuser Verlag, Boston 1997

[8] Fokas A.S. Olver P.J. Rosenau P., *A Plethora of Integrable Bi-Hamiltonian Equations, Algebraic Aspects of Integrable Systems,* Birkhäuser Verlag, Boston 1997

[9] Gantmacher F.R., *The Theory of Matrices,* Chelsea Publishing Company, New York 1960

[10] Gel'fand I.M. Zakharevich I., *On the local Geometry of a Bihamiltonian Structure, The Gel'fand Mathematical Seminars 1990-1992,* Birkhäuser Verlag, Boston 1993

[11] Kosniowski C., *Introduzione alla Topologia Algebrica,* Zanichelli, Bologna 1988

[12] Landau L.D. Lifschitz E., *Mécanique, Physique Théorique, Tome 1,* Mir, Moscou 1982

[13] Mackenzie K., *Lie Grupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry,* Cambridge University Press, Cambridge New York 1987

[14] Magri F., *Sistemi Hamiltoniani infinito dimensionali, Enciclopedia della Fisica Treccani*

[15] Magri F. Morosi C., *A Geometrical Characterization of Integrable Systems through the Theory of Poisson-Nijenhuis Manifolds, Quaderno S19,* preprint, Università degli Studi di Milano, Milano 1985

[16] Magri F. Morosi C. Ragnisco O., *Reduction Techniques for Infinite-Dimensional Hamiltonian Systems: Some Ideas and Applications, Communications in Mathematical Physics, 99, 115-140,* Springer Verlag, 1985

[17] Magri F. Morosi C. Tondo G., *The Geometry of Soliton Equations,* World Scientific, Singapore 1988

[18] Martinez Alonso L., *Aspectos clasicos y cuanticos del metodo del Scattering Inverso,* Universidad Complutense, Madrid 1984

[19] Maschietti A., *Lezioni di Geometria,* Aracne, Roma 1993

[20] Mikhailov A.V. Shabat A.B., *Liouville's Theorem,* preprint, Landau Institute, Chernogolovka 1997

[21] Najmark M.A. Štern A.I., *Teoria delle rappresentazioni dei gruppi,* Editori Riuniti, Roma 1984

[22] Palais R.S., *The Symmetries of Solitons,* preprint, Brandeis University 1997

[23] Perelomov A.M., *Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras,* vol.I, Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin 1990

[24] Poincaré H., *Il valore della scienza,* La Nuova Italia, Scandicci (FI) 1994

[25] Postnikov M., *Leçons de Géometrie, Varietés differentiables,* Editions Mir, Moscou 1990

[26] Rigal M., *Geometrie globale des systemes bihamiltoniens en dimension impaire,* Academie de Montpellier, Montpellier 1996

[27] Rigal M., *Systèmes bihamiltoniens en dimension impaire,* École Normale Supérieure de Lyon, Lyon 1997

[28] Sernesi E., *Appunti del corso di Geometria Algebrica*

[29] Sernesi E., *Geometria 2,* Bollati Boringhieri, Torino 1994

[30] Suris Y.B., *Bi-Hamiltonian structure of the qd algorithm and new discretization of the Toda lattice, Physics Letters A 206, 153-161,* 1995

[31] Tondo G., *On the integrability of stationary and restricted flows of the KdV hierarchy, Journal of Physics A: Math. Gen. 28, 5097-5115,* 1995

[32] Vaisman I., *Lecture on the Geometry of Poisson Manifolds, Progress in Mathematics, 118,* Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin 1994