Università degli Studi Roma Tre
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

di

Federica Mondini

Quantum Path Integrals and Monte Carlo simulations

Sintesi

Relatore
Prof. Vittorio Lubicz

Candidata
Federica Mondini

Anno Accademico 2007-2008

Sintesi

Il principale scopo della tesi è stato quello di scrivere un programma per valutare numericamente l' integrale di cammino per sistemi quantistici unidimensionali. Gli integrali di cammino sono stati calcolati utilizzando un metodo Monte Carlo, il Metropolis, che è un algoritmo comunemente utilizzato per simulazioni numeriche nella meccanica statistica. Abbiamo compiuto studi numerici su diversi sistemi quantistici: l' oscillatore armonico e anarmonico, la buca di potenziale infinita e la doppia buca di potenziale. Quando è stato possibile abbiamo confrontato i risultati ottenuti dalle simulazioni numeriche svolte, tra cui la funzione d'onda dello stato fondamentale e i primi livelli energetici, con quelli ottenuti o dalla soluzione dell' equazione di Schrödinger o usando un differente approccio numerico. Questi confronti hanno sempre mostrato un accordo soddisfacente.

Per introdurre il problema affrontato nella tesi osserviamo che la meccanica classica e quella quantistica, pur concordando nel limite in cui la costante di Planck $\hbar \to 0$, differiscono sostanzialmente nella descrizione del moto. Nella meccanica classica infatti, il moto di una particella con Lagrangiana L dal punto $a = (x_a, t_a)$ al punto $b = (x_b, t_b)$ segue un ben definito cammino che è quello che minimizza l' azione

$$S\,[x(t)] = \int_{t_a}^{t_b} dt\; L\,(\dot{x}, x, t)\;, \tag{1}$$

mentre nella meccanica quantistica ogni possibile cammino $x(t)$ che la particella può percorrere tra a e b, gioca un ruolo importante. Infatti l' ampiezza di probabilità $K(b, a)$ per la particella di andare da a a b riceve un contributo da ogni $x(t)$ proporzionale a $\exp\,\{\frac{i}{\hbar} S\,[x(t)]\}$, dove $S\,[x(t)]$ è l' azione classica definita dall' eq.

(1),

$$K(b,a) \propto \sum_{tutti\ i\ cammini\ da\ a\ a\ b} e^{\frac{i}{\hbar}\, S\, [x(t)]} \ . \tag{2}$$

Per capire come si arriva alla formula per l' ampiezza di probabilità (2), ripercorriamo idealmente l' esperimento delle "Doppie fenditure. Una sorgente di elettroni (A) è posta davanti ad uno schermo con due fenditure (B) attraverso le quali gli elettroni sono liberi di passare, oltre cui c'è un altro schermo (C) con un rivelatore (vedi fig. (1)). Supponiamo di chiudere una delle due fenditure, ad esempio la 1; allora gli elettroni possono oltrepassare lo schermo B solo attraversando la fenditura 2. Tramite il rivelatore osserviamo che la probabilità $P_1(x)$ con cui gli elettroni si distribuiscono sulla parete C è rappresentata da una Gaussiana con massimo in prossimità del foro 2. Analogamente accade se impediamo agli elettroni di passare attraverso il foro 2. A questo punto osserviamo cosa succede se lasciamo entrambe le fenditure aperte. Al contrario di quanto ci aspetteremmo, la probabilità che un elettrone sia rivelato sulla parete C in una certa posizione x, cioè $P(x)$, non è data dalla somma delle due probabilità $P_1(x)$ e $P_2(x)$, ma gli elettroni si distribuiscono in modo tale da formare una curva di interferenza come mostrato in fig. (1). Il risul-

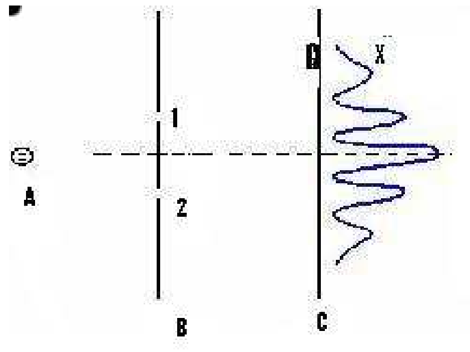

Figura 1: *esperimento delle "Doppie fenditure*

tato ottenuto è spiegato se si ricorre al formalismo matematico dell' interferenza, basato sulla quantità complessa $\Phi(x)$ tale che

$$P(x) = |\Phi(x)|^2 \quad \text{e} \quad \Phi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x) \ , \tag{3}$$

con $P_1(x) = |\Phi_1(x)|^2$ e $P_2(x) = |\Phi_2(x)|^2$. Se poi, invece di avere un solo schermo con due fenditure, supponiamo di aggiungere un altro schermo con altre due fenditure, la probabilità sarà data da $P(x) = |\Phi_1(x) + \Phi_2(x) + \Phi_3(x) + \Phi_4(x)|^2$. Cosí se aumentiamo sempre più il numero degli schermi e il numero delle fenditure in ogni schermo otteniamo che

$$K(b,a) = \sum_{tutti\ i\ cammini\ da\ a\ a\ b} \Phi\left[x(t)\right] \tag{4}$$

dove $\Phi[x(t)]$ è l' ampiezza di probabilità di seguire il particolare cammino $x(t)$ mentre $K(b,a)$, detto "kernel del moto, rappresenta l' ampiezza di probabilità complessiva di andare da a a b. La relazione tra un certo cammino e la sua ampiezza di probabilità fu definita da Feynman come

$$\Phi[x(t)] = const \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\, S\, [x(t)]}\ , \tag{5}$$

in cui *const* rappresenta una ben definita costante di normalizzazione. Sostituendo l' espressione (5) nell' eq. (4), si ottiene l' eq. (2) indicata col nome di "integrale di cammino.

Feynman, inoltre, ha fornito una rigorosa definizione matematica per la somma su tutti gli infiniti cammini, espressa da un integrale funzionale, che abbiamo esplicitamente derivato nel lavoro di tesi. Prima di riportarla osserviamo che dividendo l' intervallo temporale (t_a, t_b) in n segmenti di lunghezza ϵ, ogni cammino è approssimato da una spezzata definita dalla sequenza di "nodi $\{x_a = x_0, x_1, \cdots, x_n = x_b\}$ dove $x_k = x(t_k)$ e $t_k = k\epsilon$ (vedi fig. (2)). Quindi, per una particella di massa m che si muove in un campo esterno di forze descritto dal potenziale $V(x)$, l' integrale di cammino é espresso da

$$\begin{aligned} K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int Dx(t)\ \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{2\hbar\pi i\epsilon}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \\ \cdot \int \prod_{k=1}^{n-1} dx_k\ \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{k=0}^{n-1}\epsilon\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{\epsilon}\right)^2 - V\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{6}$$

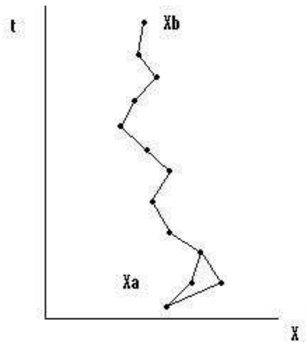

Figura 2: generico cammino

Osserviamo inoltre che utilizzando la notazione dei bra e dei ket per l' ampiezza di probabilità, il kernel corrisponde alla sovrapposizione degli stati iniziale e finale:

$$K(x_b, t_b \,; x_a, t_a) = \langle x_b; t_b |\; x_a; t_a \rangle = \langle x_b | \;\exp\; \left\{ -\frac{i}{\hbar}\; H(t_b - t_a) \right\} |\; x_a \rangle \;, \tag{7}$$

in cui $|x\rangle$ sono gli autostati dell' operatore di posizione x nella rappresentazione di Schrödinger, e $|x;t\rangle$ indicano gli stati nella rappresentazione di Heisenberg. Formalmente, l' eq. (7) afferma che il kernel $K(x_b, t_b; x_a, t_a)$ corrisponde al valore di aspettazione dell' operatore di evoluzione temporale di Schrödinger exp $\left\{-\frac{i}{\hbar} H(t_b - t_a)\right\}$ nella rappresentazione delle coordinate.

Un passaggio del nostro lavoro di tesi è stato quello di ricavare esplicitamente gli autovalori e le autofunzioni dell' energia nel caso specifico della particella libera e dell' oscillatore armonico. A tale scopo abbiamo utilizzato due importanti proprietà che legano rispettivamente il kernel alle autofunzioni $\psi_n(x)$ e agli autovalori E_n della Hamiltoniana. Tali relazioni derivano dall' osservare che nel caso di una cammino chiuso, in cui il punto iniziale coincide con quello finale, si ha

$$K(x_a, t_b; x_a, t_a) = \sum_n |\psi_n(x_a)|^2 \;\exp\; \left\{ -\frac{i}{\hbar}\; E_n\; (t_b - t_a) \right\} \;, \tag{8}$$

che integrata su tutti i possibili valori x_a definisce

$$G(t_b; t_a) \;\; \equiv \;\; \int \; dx_a \; K(x_a, t_b; x_a, t_a) = \sum_n \;\exp\; \left\{ -\frac{i}{\hbar}\; E_n\; (t_b - t_a) \right\} \;. \tag{9}$$

Per i due sistemi discussi in dettaglio nella tesi, cioè la particella libera e l' oscillatore armonico abbiamo dunque ricavato analiticamente il kernel e abbiamo derivato da esso le autofunzioni e gli autovalori dell' energia utilizzando le eqs. (8) e (9). Riportiamo nell' ordine l' espressione del kernel ottenuta per la particella libera e quella per l' oscillatore armonico:

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a)_{PL} = \left(\frac{m}{2\hbar\pi i(t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{im(x_b - x_a)^2}{2\hbar(t_b - t_a)} \right\} \tag{10}$$

e

$$\begin{aligned} K(x_b, t_b; x_a, t_a)_{OA} &= \left(\frac{m\omega}{2\hbar\pi i \sin[\omega(t_b - t_a)]} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \\ &\cdot \exp \left\{ \frac{im\omega}{2\hbar \sin[\omega(t_b - t_a)]} [(x_a^2 + x_b^2) \cos[\omega(t_b - t_a)] - 2x_a x_b] \right\} . \end{aligned} \tag{11}$$

È importante notare che la formulazione della meccanica quantistica di Feynman, anche detta degli integrali di cammino, fornisce un approccio alternativo completamete equivalente a quello basato sulla quantizzazione canonica. Inoltre, tramite gli integrali di cammino, è possibile studiare numericamente il comportamento di un certo sistema di cui non si conosce la soluzione dell' equazione di Schrödinger e a cui non si può applicare la teoria delle perturbazioni. Questo è stato appunto lo scopo della tesi, valutare numericamente gli integrali di cammino di alcuni specifici sistemi, applicando un metodo preso in prestito dalla meccanica statistica basato sulle simulazioni Monte Carlo. Infatti, nell' implementare un codice per simulare gli integrali di cammino, ci siamo trovati ad affrontare il problema di dover sommare un grandissimo numero di termini. Abbiamo risolto il problema utilizzando un algoritmo Monte Carlo, con cui abbiamo selezionato un insieme particolarmente rappresentativo di cammini $x^{(i)}$, con una data distribuzione di probabilità proporzionale a $e^{-S[x]}$ che è proprio il peso di ogni fattore che compare nell' integrale di cammino (6) dopo avere introdotto il tempo immaginario $\tau = i(t_b - t_a)$. In questo modo, una volta che i cammini sono effettivamente distribuiti come $e^{-S[x]}$, il valore di aspettazione di un dato operatore O funzione di x

$$\langle O\rangle = \frac{\int Dx\ O[x^{(i)}]\ e^{-S\ [x^{(i)}]}}{\int Dx\ e^{-S\ [x^{(i)}]}}\ , \tag{12}$$

è approssimato dalla somma sui cammini generati nella simulazione,

$$\langle O\rangle\ =\ \frac{1}{N}\ \sum_{i=1}^{N}\ O\ (\{x^{(i)}\}_i)\ . \tag{13}$$

Per far convergere i cammini alla desiderata distribuzione di probabilità proporzionale a $e^{-S\ [x]}$ è sufficiente richiedere che la probabilità di transizione $P_{ij} = P(x^{(i)} \rightarrow x^{(j)})$ che definisce la cosiddetta catena di Markov, soddisfi la "condizione del bilanciamento dettagliato:

$$e^{-S\ [x^{(i)}]}P(x^{(i)} \rightarrow x^{(j)})\ =\ e^{-S\ [x^{(j)}]}P(x^{(j)} \rightarrow x^{(i)}) \tag{14}$$

per ogni coppia di cammini $x^{(i)}$ e $x^{(j)}$. In fig. (3) si può osservare come la deviazione dal valore di aspettazione dell' azione all' equilibrio decresce ad ogni implementazione del metodo Monte Carlo. Abbiamo mostrato che l' algoritmo Metropolis soddisfa la condizione del bilanciamento dettagliato e quindi i cammini selezionati da tale procedura hanno distribuzione di probabilità proporzionale a $e^{-S[x]}$. Ne segue che possiamo approssimare il valore di aspettazione di un generico operatore O funzione di x tramite la somma (13). Ovviamente la stima di ogni valore di aspettazione non sarà mai esatta poichè il numero N di cammini generati è sempre finito. l' incertezza del metodo Monte Carlo per le nostre stime è una potenziale sorgente di errore detto errore statistico e valutato come

$$\sigma_o = \sqrt{\frac{\langle O\rangle^2 - \langle O^2\rangle}{N}}\ . \tag{15}$$

Utilizzando i risultati brevemente descritti, abbiamo scritto un programma capace di simulare gli integrali di cammino attraverso il metodo Metropolis e capace di derivare, utilizzando la somma (13), importanti quantità per i sistemi quantistici, come la funzione d'onda dello stato fondamentale, il valore di aspettazione per

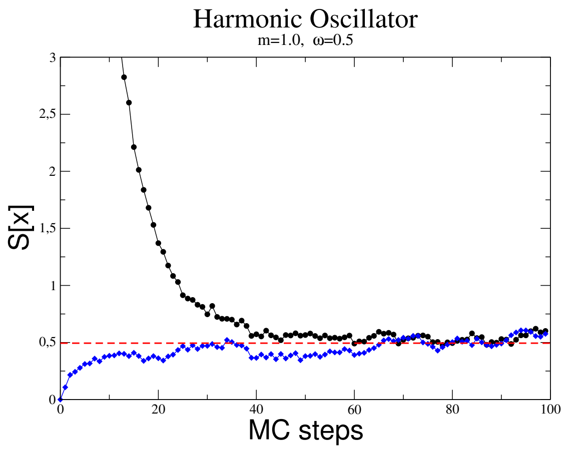

Figura 3: *Valori dell' azione euclidea $S[x]$ come funzione del numero dei passi Monte Carlo nel caso dell' oscillatore armonico unidimensionale. Il cammino iniziale è generato a caso (cerchi neri) oppure è il cammino classico all' equilibrio (diamanti blu). La linea rossa tratteggiata rappresenta l' aspettazione teorica per il valore medio dell' azione all' equilibrio ($\langle S\rangle = 0.494$ per $\omega = 0.5$ espresse in unità $\epsilon = 1$, che sarà usata anche in seguito).*

gli operatori x^2 e x^4, e la differenza di energia tra lo stato fondamentale e il primo stato eccitato. Ad esempio il modulo quadro della funzione d'onda dello stato fondamentale risulta espresso come somma di funzioni delta su tutti i cammini

$$|\psi_0(x_a)\,|^2 = \lim_{\tau\to+\infty} \frac{\int Dx\ \delta(x_a - x_0)e^{-S_E[x]}}{\int Dx\ e^{-S_E[x]}} \simeq \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\ \delta(x_a - x_0^{(\alpha)})\ , \qquad (16)$$

mentre il valore di aspettazione del generico operatore x^s con $s = 0, 1, 2, \cdots$ è

$$\langle x^s(\tau)\rangle = \frac{\int Dx\ x^s(\tau)\ e^{-S[x]}}{\int Dx\ e^{-S[x]}} \simeq \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} [x^{(\alpha)}]^s\ . \qquad (17)$$

Per ricavare la differenza di energia tra lo stato fondamentale E_0 e il primo stato eccitato E_1 abbiamo definito il correlatore

$$G(\tau_2 - \tau_1) \equiv \langle x(\tau_2)x(\tau_1)\rangle = \frac{\int Dx\ x(\tau_2)x(\tau_1)e^{-S[x]}}{\int Dx\ e^{-S[x]}} \simeq \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\langle x^\alpha(\tau_2)\ x^\alpha(\tau_1)\rangle\ . \quad (18)$$

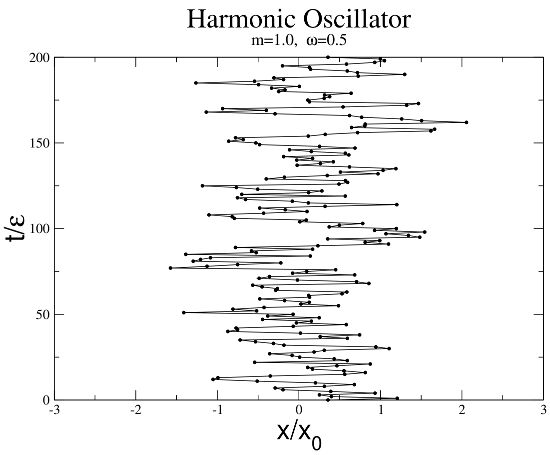

Figura 4: *Esempio di cammino per l' oscillatore armonico unidimensionale con massa* $m = 1$ *e frequenza* $\omega = 0.5$ *generato dopo* 200 *passi Monte Carlo.*

per cui, a grandi tempi, vale la seguente relazione

$$G(\tau_2 - \tau_1) = \langle x(\tau_2) x(\tau_1) \rangle \stackrel{\tau \gg 0}{\longrightarrow} |\langle 0 \mid x \mid 1 \rangle|^2 \, e^{-(E_1 - E_0)(\tau_2 - \tau_1)} \; . \tag{19}$$

L' andamento del correlatore a grandi tempi quindi, fornisce l' espressione per la differenza di energia, data da

$$\Delta E(\tau) = \log(G(\tau)/G(\tau + \Delta\tau)) \stackrel{\tau \gg 0}{\longrightarrow} (E_1 - E_0) \, \Delta\tau \; . \tag{20}$$

Inoltre, l' espressione del logaritmo del correlatore a grandi tempi può essere vista come un' equazione lineare in τ

$$\log G(\tau) = \log |\langle 0 \, | x \, | 1 \rangle|^2 - (E_1 - E_0) \, \tau \; , \tag{21}$$

in cui il termine noto è proprio l' elemento di matrice $|\langle 0 \, | x \, | 1 \rangle|$. Tramite un' interpolazione lineare dei valori ottenuti nella simulazione per il correlatore $G(\tau)$ abbiamo ricavato anche il valore dell' elemento di matrice $|\langle 0 \, | x \, | 1 \rangle|$ per il particolare sistema studiato.

Riassumendo, il programma elaborato genera un cammino iniziale e varia ogni nodo definendo un nuovo potenziale cammino che viene sottoposto al test Metropolis. In questo modo vengono generati quei cammini, elementi della catena di Markov, che tendono all' equilibrio (vedi fig. (3)) e con cui calcoliamo $|\psi_0(x)|^2$, i valori medi $\langle x^2 \rangle$ e $\langle x^4 \rangle$ e la differenza di energia $E_1 - E_0$ utilizzando rispettivamente le eqs. (16), (17) e (20). Nelle simulazioni svolte abbiamo generato 10000 cammini costituiti da 200 nodi ognuno e, per garantire che i cammini generati fossero indipendenti tra loro, abbiamo svolto le misure ogni 20 cammini. Le simulazioni Monte Carlo sono state effettuate su alcuni sistemi significativi e precisamente sull' oscillatore armonico, sulla buca di potenziale infinita, sull' oscillatore anarmonico e sulla doppia buca di potenziale; abbiamo riscontrato per ogni sistema simulato un ottimo accordo con i risultati noti. Nel caso dell' oscillatore armonico e della buca di potenziale abbiamo direttamente confrontato i risultati ottenuti dalle simulazioni Monte Carlo con quelli analitici; in entrambi i casi infatti esiste la soluzione dell' equazione di Schrödinger.

In fig. (5) è mostrata la $|\psi_0(x)|^2$ dell' oscillatore armonico ottenuta dalla simulazione Monte Carlo (cerchi neri) sovrapposta a quella nota dall' equazione di Schrödinger (linea continua rossa). Si osserva come le due curve siano in ottimo accordo così come lo sono i valori ottenuti per l' elemento di matrice $\langle 0|x|1 \rangle$ e per la differenza di energia $E_1 - E_0$:

$$\langle 0\,|x\,|1\rangle = 0.996 \pm 0.010 \quad \text{e} \quad E_1 - E_0 = 0.50 \pm 0.01 \,, \tag{22}$$

con i risultati noti 1 e 0.5 rispettivamente.

Il potenziale per la buca di potenziale infinita

$$\begin{cases} V(x) = 0 & \text{per} \quad -a \leq x \leq a \\ V(x) = \infty & \text{per} \quad x < -a \vee x > a \end{cases} \tag{23}$$

è stato numericamente riprodotto nella simulazione ponendo $V(x) = 100$ all' esterno della buca. La forte discontinuità in a e $-a$ si riflette nelle discrepanze che si osservano negli intorni dei due punti, come mostrato in fig. (6), dove è rappresentata la $|\psi_1(x)|^2$ ottenuta dalla simulazione Monte Carlo (cerchi neri) e dalla soluzione dell' equazione di Schrödinger (linea continua rossa). In generale comunque l' andamento delle due determinazioni della funzione d'onda è concorde.

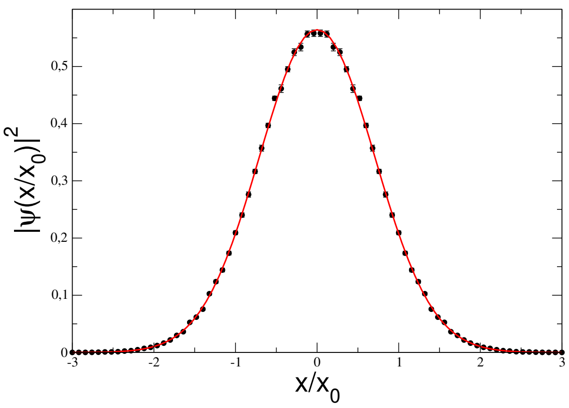

Figura 5: *Funzione d'onda $|\psi_0(x)|^2$ per lo stato fondamentale dell' oscillatore armonico in funzione di x/x_0 dove $x_0 = (1/m\omega)^{1/2}$. La curva corrisponde alla scelta $m = 1$ e $\omega = 0.5$ per i parametri hamiltoniani.*

I risultati ottenuti per l' oscillatore anarmonico definito dal potenziale

$$V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \lambda m^2 \omega^2 x^4 \ , \tag{24}$$

per cui non è nota la soluzione dell' equazione di Schrödinger, sono stati invece confrontati con quelli ottenuti tramite un differente metodo numerico basato sulla diagonalizzazione della matrice Hamiltoniana nel sottospazio dei primi 120 autovettori dell' oscillatore armonico. Anche in questo caso abbiamo riscontrato un buon accordo tra le $|\psi_0(x)|^2$ ottenute dai due metodi numerici, per differenti valori di λ, come si può osservare in fig. (7). Riportiamo i valori ottenuti per la differenza di energia, riscontrando anche in questo caso che i valori concordano:

$$\begin{array}{lll} & \text{simulazione Monte Carlo} & \text{metodo alternativo} \\ \lambda = 0.0 & (E_1 - E_0)/\omega = 1.00 \pm 0.05 & (E_1 - E_0)/\omega = 1.0 \\ \lambda = 0.1 & (E_1 - E_0)/\omega = 1.14 \pm 0.06 & (E_1 - E_0)/\omega \simeq 1.21 \\ \lambda = 1.0 & (E_1 - E_0)/\omega \simeq 1.96 \pm 0.09 & (E_1 - E_0)/\omega = 1.93 \\ \lambda = 3.0 & (E_1 - E_0)/\omega \simeq 2.55 \pm 0.10 & (E_1 - E_0)/\omega = 2.63 \ . \end{array} \tag{25}$$

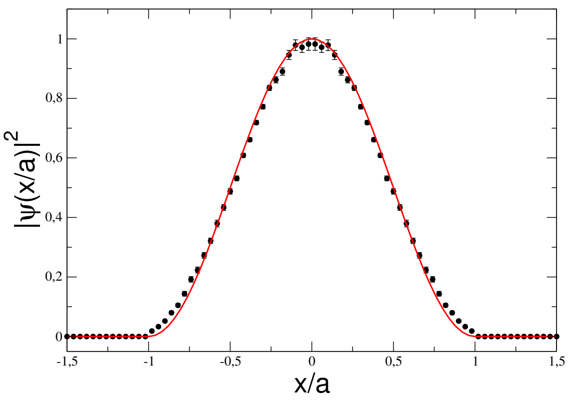

Figura 6: *Funzione d'onda dello stato fondamentale* $|\psi_1(x)|^2$ *per la buca di potenziale infinita (cerchi neri). Abbiamo fissato la mezza larghezza della buca a* $a = 10$ *e la massa della particella a* $m = 0.5$. *La linea continua rossa rappresenta la soluzione analitica ottenuta dall' equazione di Schrödinger.*

La tesi si conclude con la simulazione della doppia buca di potenziale

$$V(x) = \lambda(x^2 - 1)^2 \tag{26}$$

al variare di λ (vedi fig. (8)). In questo caso ci siamo limitati a presentare i risultati ottenuti, che non abbiamo potuto confrontare nè con la soluzione analitica dell' equazione di Schrödinger che non esiste, nè con altri metodi numerici. Riportiamo in fig. (9) l' andamento del modulo quadro della funzione d'onda per lo stato fondamentale. In accordo con l' intuizione fisica, $|\psi_0(x)|^2$ ha un minimo dove l' energia potenziale ha un massimo, vedi figs. (8) e (9). Inoltre presentiamo i valori ottenuti per la differenza di energia $E_1 - E_0$ al variare del parametro λ

$$\begin{aligned}
\lambda = 0.5 &\qquad E_1 - E_0 = 0.47 \pm 0.02 \\
\lambda = 1.0 &\qquad E_1 - E_0 = 0.40 \pm 0.02 \\
\lambda = 3.0 &\qquad E_1 - E_0 = 0.080 \pm 0.004 \\
\lambda = 5.0 &\qquad E_1 - E_0 = 0.109 \pm 0.008 \; . \qquad (27)
\end{aligned}$$

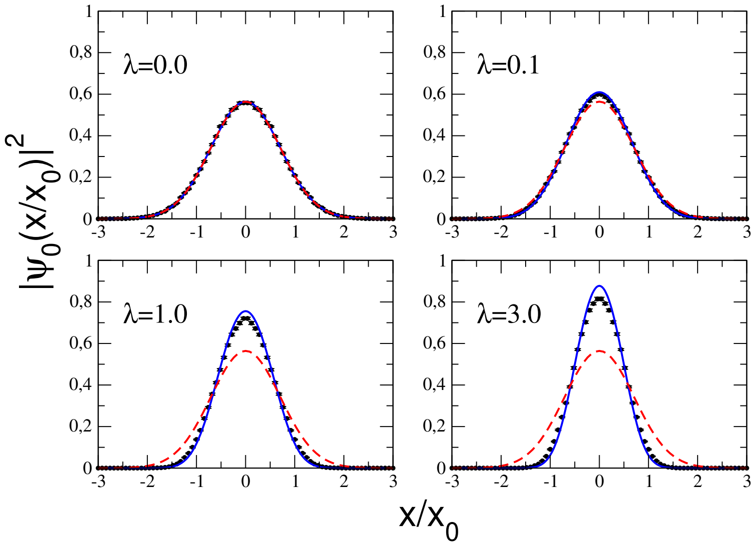

Figura 7: *Funzione d'onda dello stato fondamentale $|\psi_0(x)|^2$ per l' oscillatore anarmonico ottenuta da simulazioni Monte Carlo (cerchi neri) e dall' alternativa procedura numerica (linea continua blu) per $\lambda = 0$, $\lambda = 0.1$, $\lambda = 1$ e $\lambda = 3$. Le funzioni d' onda sono tracciate in funzione di x/x_0 dove $x_0 = (m/\omega)^{-1/2}$. Le linee (rosse) tratteggiate mostrano, per confronto, i risultati analitici conosciuti per l' oscillatore armonico ($\lambda = 0$).*

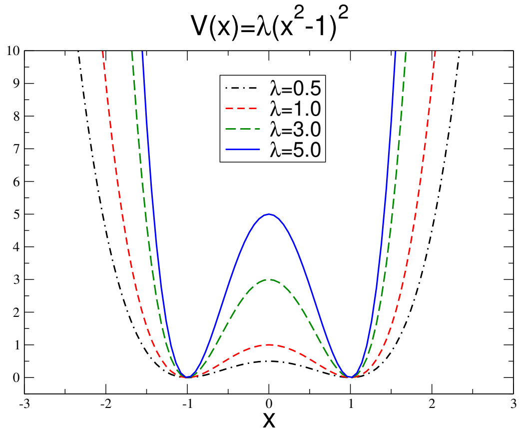

Figura 8: *Potenziale per la doppia buca di potenziale di eq. (26) in funzione di x, per differenti valori del parametro λ.*

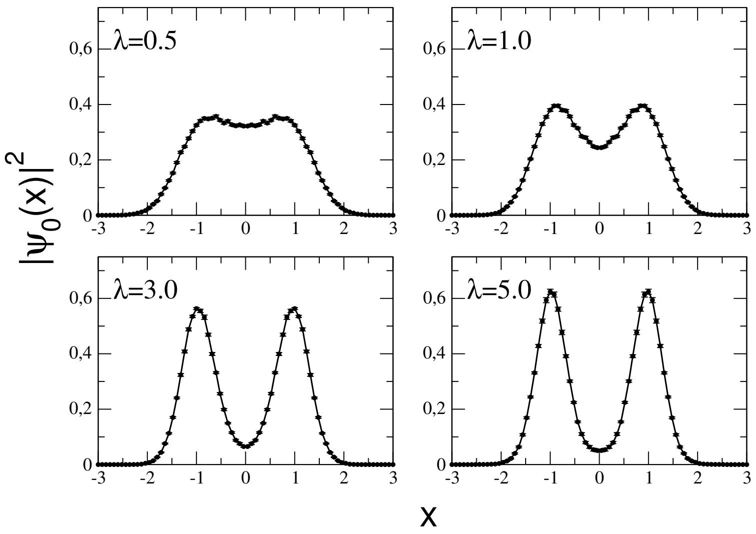

Figura 9: *Funzioni d'onda dello stato fondamentale $|\psi_0(x)|^2$ per la doppia buca, ottenute per differenti valori del parametro di λ.*

Bibliografia

[1] R. P. Feynman. *Space-Time approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*. Rev. Mod. Phys. **20** (1948) 367.

[2] R. P. Feynman, A. R. Hibbs. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill (1965).

[3] R. P. Feynman. *The Character of Physical Law*. (MIT Press, 1965), p.168.

[4] P. A. M. Dirac. *The Lagrangian in quantum mechanics*. Phys. Zeits. Sowjetunion **3** (1933), p. 64-72.

[5] Ta-Pei Cheng, Ling-Fong Li. *Gauge theory of elementary particle physics*. Clarendon Press Oxford (1984).

[6] M. E. Peskin, D. V. Schroeder. *An introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley Publishing Company (1995).

[7] J. J. Sakurai. *Meccanica Quantistica Moderna*. Zanichelli (1996).

[8] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller and E. Teller, J. Chem. Phys. **21** (1953) 1087.

[9] H. J. Rothe. *Lattice gauge theories. An introduction*. World Scientific.