

# OPERADS LINEARI E QUADRATICI

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica  
di Miriam Nassuato

Relatore Dott. Andrea Bruno

Nel loro scritto, "Koszul duality for Operads", Victor Ginzburg e Mikhail Kapranov riprendono un concetto molto astratto che fu introdotto da J.P.May nel 1972: **gli Operads**.

Gli operads furono originariamente introdotti da May come uno strumento da utilizzare nella teoria delle omotopie e in particolare per studiare gli spazi di cappi; la teoria degli operads ha però recentemente avuto nuove applicazioni nella teoria delle categorie, nell'algebra omologica, nella geometria algebrica e nella fisica matematica. Scopo di questa tesi è quello di descrivere le prime istanze di questi oggetti.

Il nome "Operad" e la definizione originale comparvero per la prima volta in "The Geometry of Iterated Loop Space" [12] di J.P.May nel 1970, ma alcuni anni prima Bordman e Vogt descrissero lo stesso concetto sotto il nome di 'categorie di operatori nella forma standard', ispirati ai Props & Pacts definiti da S.Mac Lane e Adams nel 1950 [2]. Un Prop è una categoria  $H$  di ordinali con in più una operazione di prodotto e una di permutazione (Prop è, infatti, l'abbreviazione di PROduct and Permutation category).

Un altro predecessore del concetto di operad è Arnold che, insieme a Kolmogoroff, nel 1950 provò, in connessione con il tredicesimo problema di Hilbert <sup>1</sup>, che ogni funzione continua in  $n \geq 3$  variabili può essere scritta come superposizione di funzioni continue in una o due variabili. Nella seconda metà degli anni '50 anche Lazard introdusse nel suo studio sui gruppi formali il concetto di operad, o più precisamente di sistemi di composizione. Recentemente si è iniziato a sistematizzare la teoria degli operads (vedi "Operads in Algebra, Topology and Phisycs" di S.Shnider, J.Stasheff, M.Markl, scritto e corretto nel giugno del 2000).

La parola operad sta per OPERatore e monADe che sono i due concetti che esso racchiude.

Da un punto di vista algebrico, che è quello che noi approfondiremo, un

---

<sup>1</sup>"L'equazione generale del settimo grado non può essere risolta utilizzando le funzioni di due soli argomenti", problema che Hilbert provò solo in parte.

operad è un sistema di dati che formalizzano determinate proprietà di una classe di funzioni  $X^n \longrightarrow X$ , su un certo insieme  $X$  per ogni  $n = 1, 2, \dots$ , che possiede un'azione del gruppo simmetrico sulle variabili, un elemento unità e delle operazioni n-arie che soddisfano determinati assiomi.

May definisce la categoria degli operads come una sotto-categoria della categoria dei funtori controvarianti dalla categoria  $\tilde{S}$  (categoria che ha come elementi gli insiemi del tipo  $[n] = \{1, \dots, n\} \forall n \in \mathbb{N}$  e per morfismi le biiezioni) ad una categoria simmetrica monoidale  $C$ ; cosicchè in prima analisi un operad consiste di un oggetto  $C(n)$  di  $C$  con un'azione di  $\Sigma_n$  su  $C(n)$  per ogni  $n$ .

Un esempio di operad è l'operad delle funzioni continue in cui  $X$  è uno spazio topologico, la categoria  $C$  è quella degli spazi vettoriali e  $P(n)$  è lo spazio delle funzioni continue  $f : X^n \longrightarrow X$  dotato delle seguenti mappe  $\gamma$  che definiscono la superposizione di variabili:

$$\gamma_{a_1, \dots, a_n} : P(n) \times P(a_1) \times \dots \times P(a_n) \rightarrow P(a_1 + \dots + a_n)$$

$$f \circ g_1 \circ \dots \circ g_n \mapsto f(g_1, \dots, g_n)$$

dove  $f$  è una funzione di  $n$  variabili,  $g_i$  è una funzione di  $a_i$  variabili e  $f(g_1, \dots, g_n)$  è funzione di  $\sum_i a_i$  variabili.

Gli operads di maggiore interesse sono quelli lineari, definiti considerando come categoria simmetrica e monoidale la categoria degli spazi vettoriali su un campo  $k$ .

Un operad  $P$   $k$ -lineare è una collezione  $\{P(n), n \geq 1\}$  di  $k$ -spazi vettoriali con i seguenti dati:

1. un'azione del gruppo simmetrico  $\Sigma_n$  su  $P(n)$  per ogni  $n$ ;
2. mappe lineari (chiamate composizioni)

$$\gamma_{m_1, \dots, m_l} : P(l) \otimes P(m_1) \otimes \dots \otimes P(m_l) \longrightarrow P(m_1 + \dots + m_l) \quad (1)$$

per ogni  $m_1, \dots, m_l \geq 1$ .

3. un elemento  $1 \in P(1)$ , chiamato unità.

Si richiede inoltre che siano soddisfatti assiomi di associatività, equivarianza e unità, che nell'interpretazione di un operad come sistema di dati di operazioni, garantiscono le naturali compatibilità tra esse.

Un esempio di operad lineare è l'operad degli endomorfismi di uno spazio vettoriale  $V$  con  $E_V(n) = \text{Hom}(V^{\otimes n}, V)$  con le composizioni e l'azione di  $\Sigma_n$  su  $E_V$  definite nel seguente modo:

$$\Sigma_n \otimes E_V(n) \longrightarrow E_V(n)$$

$$(\sigma, \phi) \longmapsto \sigma \circ \phi$$

con  $\sigma(\phi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)) = \phi(x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma^{-1}(n)})$ .

Le mappe composizione sono le seguenti:

$$\gamma_{m_1, \dots, m_n} : E_V(n) \otimes E_V(m_1) \otimes \cdots \otimes E_V(m_n) \rightarrow E_V(m_1 + \cdots + m_n)$$

$$f \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \mapsto f(g_1, \dots, g_n).$$

Esse soddisfano gli assiomi di equivarianza, associatività e unità.

Ciò che è utile ed interessante riguardo agli operads sono le loro rappresentazioni, dette *P-algebre* o *algebre su operads*.

Un algebra su un operad  $P$  è un  $k$ -spazio vettoriale  $A$  con un morfismo di operads:

$$f : P \longrightarrow E_A$$

dove  $E_A$  è l'operad degli endomorfismi di  $A$ . Molti esempi importanti di strutture algebriche sono algebre su un operad.

Si consideri ad esempio l'operad  $As$  definito a partire dall'algebra libera associativa generata da  $x_1, \dots, x_n$ :  $As(x_1, \dots, x_n)$  per ogni  $n$ . Sia  $As(n) \subset As(x_1, \dots, x_n)$  il sottospazio generato dai monomi che contengono ogni  $x_i$  esattamente una volta. La collezione  $As = \{As(n)\}$ , con il dato della rappresentazione regolare di  $\Sigma_n$ , per ogni  $n$ , forma un operad chiamato *operad associativo*. La mappa di composizione propria di questo operad è la seguente:

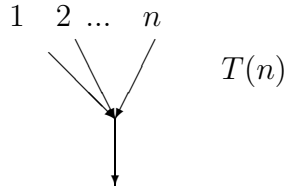
$$As(l) \otimes As(m_1) \otimes \cdots \otimes As(m_l) \longrightarrow As(m_1 + \cdots + m_l)$$

definita sostituendo nel monomio  $\Psi \in As(l)$  i monomi  $\Phi_1 \in As(m_1), \dots, \Phi_l \in As(m_l)$  al posto dei generatori  $x_1, \dots, x_l$ . Si mostra che una  $As$ -algebra è un'algebra associativa nel senso comune del termine.

Se un operad si definisce come funtore con dominio la categoria  $\tilde{S}$ , si usa estenderne naturalmente la definizione come funtore con dominio la categoria *Trees* degli alberi, grafi finiti, connessi e senza cicli; ciò consente da un lato di utilizzare un linguaggio intuitivo e capace di rendere visibili le operazioni di un operad (ad esempio composizioni e contrazioni), da un altro di evidenziare

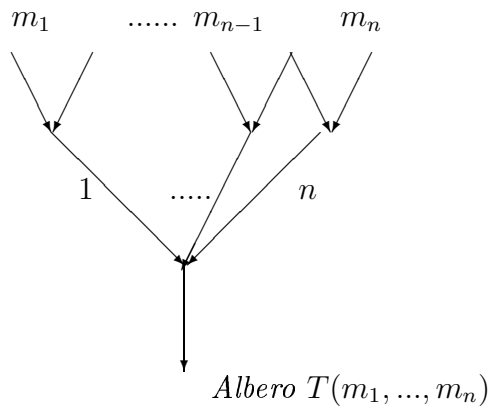
come il linguaggio degli operads sia naturale in contesti combinatori.  
 Sia  $T$  un albero ridotto e ben fondato (con almeno due foglie per vertice e con un solo lato uscente). Se  $T = T(n)$  possiede  $n$  foglie numerate e un vertice definiamo l'operad su  $T$  come:

$$\tilde{P}(T) := P(n);$$



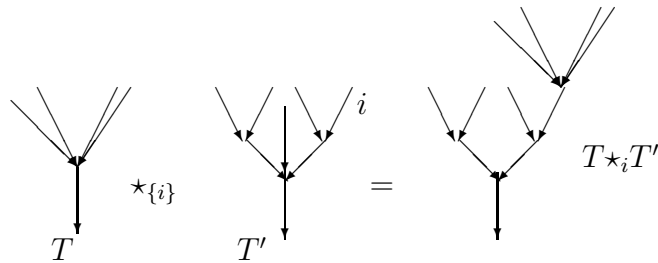
se  $T = T(m_1, \dots, m_n)$  ha  $m_1 + \dots + m_n$  foglie e  $n$  vertici con una numerazione delle foglie entranti in ciascun vertice, definiamo l'operad su  $T$  come:

$$\tilde{P}(T) := P(n) \otimes P(m_1) \otimes \dots \otimes P(m_n).$$



Poichè  $P$  è un operad esiste una procedura standard per ovviare al fatto che gli alberi non sono numerati, cosicchè supporremo qui di seguito che una numerazione ci sia.

Dati due alberi  $T, T'$ , si definisce l'albero composizione  $T \star_i T'$  come l'albero ottenuto "innestando" la radice dell'albero  $T$  sulla foglia di  $T'$  etichettata con  $i$ ;



Si definisce

$$\tilde{P}(T \star_i T') := \tilde{P}(T) \otimes \tilde{P}(T').$$

Poichè ogni albero si ottiene da alberi del tipo  $T(n)$  mediante innesti, si può definire  $\tilde{P}(T)$  per ogni albero.

Sia ora  $v \xrightarrow{e} w$  un lato interno di  $T$ . Si consideri il nuovo albero  $T/e$  ottenuto contraendo il lato  $e$  in un punto. Questo nuovo punto è un vertice di  $T/e$  denotato con  $\langle e \rangle$  e questa operazione sarà detta contrazione e indicata con  $\circ_e$ . Considerando che la mappa

$$\gamma_{m_1, \dots, m_n} : P(n) \otimes P(m_1) \otimes \dots \otimes P(m_n) \longrightarrow P(m_1 + \dots + m_n)$$

si può interpretare come

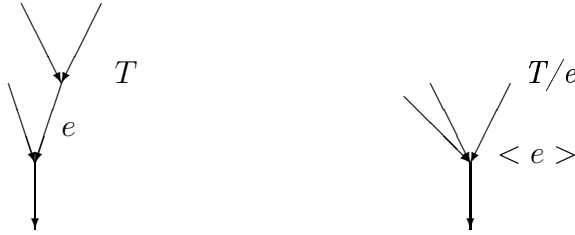
$$\gamma_{m_1, \dots, m_n} : \tilde{P}(T(m_1, \dots, m_n)) \longrightarrow \tilde{P}(T(n))$$

e poichè

$$T(m_1, \dots, m_n) \longrightarrow T(n)$$

è una composizione di contrazioni si ricavano dalle mappe  $\gamma_{m_1, \dots, m_n}$ , delle mappe

$$\tilde{\gamma}_{T,e} : P(T) \longrightarrow P(T/e).$$



Poichè ogni morfismo tra alberi o è un isomorfismo oppure è una contrazione, il funtore  $P$  definisce un funtore dalla categoria degli alberi a quella degli spazi vettoriali:

$$\begin{aligned} \tilde{P} : Trees &\longrightarrow Vect \\ T &\mapsto \tilde{P}(T). \end{aligned}$$

Si noti che gli assiomi di associatività sono equivalenti al fatto che la scomposizione di

$$\gamma_{m_1, \dots, m_n} : \tilde{P}(T(m_1, \dots, m_n)) \longrightarrow \tilde{P}(T(n))$$

secondo contrazioni intermedie non dipende dall'ordine di scomposizione.

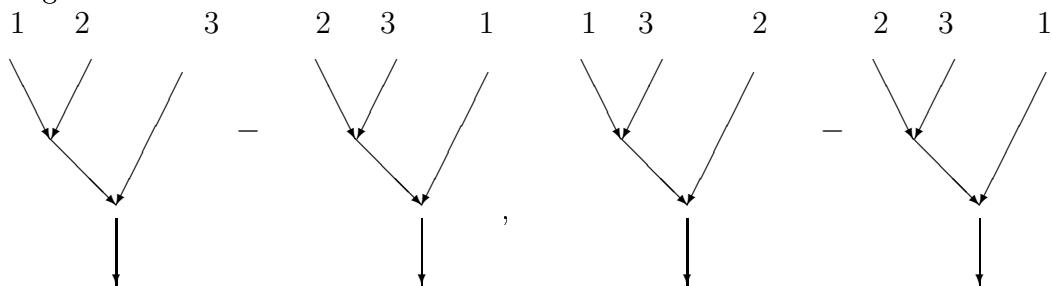
Una classe di operads per cui il linguaggio degli alberi si rivela utile è la classe degli *operads quadratici*.

Un operad  $P$  è quadratico se è generato da operazioni binarie (in grado 2) soggette a relazioni che coinvolgono solo tre argomenti. Un operad quadratico  $P$  si scrive  $P(K, E, R)$  indicando con  $K$  un'algebra semisemplice, con  $E$  uno spazio di generatori e con  $R$  lo spazio delle relazioni.

In questo senso il succitato risultato di Arnold può essere interpretato come evidenza per la quadraticità dell'operad delle funzioni continue. (Non è noto se le relazioni siano ternarie.)

Gli operads  $Com$ ,  $As$  e  $Lie$ , generati dalle algebre più note (rispettivamente Commutativa, Associativa, di Lie), sono quadratici.

Ad esempio l'operad  $Com$  è generato in grado 2 (cioè un'algebra sull'operad  $Com$  ha un'operazione binaria) e lo spazio delle sue relazioni (che implicano la commutatività e l'associatività della suddetta operazione) è bidimensionale ed è generato da:



che coinvolge solo tre argomenti.

Dato un operad è possibile associargli due operads.

- Sia  $P(K, E, R)$  un operad quadratico, si definisce allora il *duale quadratico*  $P^! = P(K^{op}, E^\vee, R^\perp)$ .
- Sia  $P$  un dg-operad ammissibile si definisce il suo duale operadico  $D(P)$ .

Una classe di operads importante è quella per cui le due definizioni di duale ( $P^!, D(P)$ ) coincidono. Essa è data dalla classe *degli operads di Koszul*, introdotta e studiata da Ginzburg e Kapranov; a questa classe appartengono  $As, Com, Lie$ .

La ragione per cui questi operads si chiamano di Koszul è che le algebre sugli operads di Koszul sono proprio le algebre di Koszul secondo la definizione originaria di Priddy.

Priddy introdusse nel 1970 il concetto di algebra quadratica, algebra quoziente dell'algebra tensoriale rispetto ad un ideale quadratico omogeneo.

Ad un'algebra quadratica è possibile associare un'algebra duale  $A^\perp$  e ad esse si associa il complesso:

$$P(A) : A \rightarrow A \otimes_k V^* \rightarrow A \otimes_k A_2^\perp \rightarrow \dots \rightarrow A \otimes_k A_d^\perp \rightarrow \dots$$

che coincide con il complesso di Koszul se l'algebra  $A$  è l'algebra simmetrica  $S(V)$ , essendo in questo caso  $A^\perp = \bigwedge V^*$ .

Un'algebra quadratica è un'algebra di Koszul se e solo se il suo complesso di Koszul è esatto.

Per un operad quadratico, tale che un'algebra su  $P$  è quadratica, l'operad  $P^!$  è definito in modo tale che l'algebra quadratica duale nel senso di Priddy sia una  $P^!$ -algebra; per tali operads è possibile dunque definire un operad di dg-spazi vettoriali che è la diretta generalizzazione del complesso di Koszul. Gli operads di Koszul sono quelli per cui tale complesso di Koszul è esatto. Essi sono di notevole importanza perchè posseggono molte proprietà interessanti tra cui ad esempio la possibilità di calcolare gli invarianti omologici in modo elementare.

Non soltanto nel linguaggio degli operads la teoria delle algebre quadratiche trova una generalizzazione appropriata, ma, essendo quella degli operads una nozione ubiqua in matematica, questo consente di utilizzare queste teorie algebriche in campi anche lontani.

La teoria degli operads di Koszul generalizza dunque quella di Priddy per le algebre quadratiche.

Con questo lavoro ci proponiamo di analizzare il concetto di Operad nelle sue forme più semplici e significative e darne alcuni esempi.

Il lavoro è così strutturato.

Nel primo capitolo, tratteremo tutte quelle nozioni e notazioni indispensabili per lo studio della struttura di un operad.

Ampio spazio ha, in questo capitolo, la teoria delle categorie che è l'ambiente in cui nasce la prima definizione di operad; daremo alcune definizioni fondamentali come quella di *funtore controvariante*, di *coequalizzatore*, di *categoria simmetrica monoidale*, nozioni che non sempre si incontrano in un corso di studi.

Di grande importanza anche la sezione sulla teoria dei Grafi.

Abbiamo trattato, inoltre, la teoria dell'omologia e delle rappresentazioni che saranno di fondamentale importanza per la costruzione del complesso Cobar.

Nel secondo capitolo vedremo in generale la costruzione del *complesso Bar e Cobar* di un'algebra e la definizione di *algebra quadratica* e di *algebra di Koszul*. Descriveremo in modo generale il *complesso tautologico di Koszul* e tratteremo la teoria di Manin sulle operazioni tra algebre quadratiche.

Il terzo capitolo vuole essere una introduzione generale al concetto di operad. Tratta in generale la teoria dei Props & Pacts di Mac Lane e la collega alla prima definizione di operad data da J.P.May, che vedremo per esteso.

Mostreremo poi l'importante teorema che permette di estendere la definizione di operad ad ogni categoria  $S$  di insiemi finiti.

Daremo alcuni cenni sulla nozione di *pseudo-operad* e di *operad libero* trattata con maggiore rilievo in [6].

Nel quarto e nel quinto capitolo abbiamo approfondito l'articolo di Ginzburg e Kapranov [1], mettendo in evidenza la definizione di operad lineare e quadratico, studiandone le proprietà e dandone alcuni semplici esempi, la nozione di complesso Cobar e di operad di Koszul.

Il quarto capitolo è incentrato sulla definizione di operad lineare e quadratico; descriveremo l'estensione dell'operad alla categoria degli alberi, e daremo alcune definizioni importanti come quella di algebra su un operad, di ideale su un operad, di algebra quadratica su un operad.

Dopo aver definito il duale quadratico di un operad faremo vedere che il duale quadratico di  $Com$  è  $Lie$  e viceversa e che il duale quadratico di  $As$  è  $As$  stesso:

$$Com^! = Lie \quad Lie^! = Com \quad As^! = As.$$

Daremo infine cenni dell'estensione della teoria di Manin agli operads.

Nell'ultimo capitolo descriveremo la costruzione del complesso Cobar di un operad lineare e quella del complesso  $D(P)$  duale del complesso Cobar. Mostreremo che esiste una classe di operad per cui  $D(P)$  è particolarmente semplice, gli operads di Koszul; diremo che un operad è di *Koszul* se il suo duale quadratico coincide con il duale del complesso Cobar, cioè se:  $D(P) \longrightarrow P^!$  è un quasiisomorfismo.

Daremo dei cenni sulla costruzione dell'*n-simo complesso di Koszul* per un operad ed enunceremo il teorema per cui l'operad  $P$  è di Koszul se e solo se l'*n-simo* complesso di Koszul è esatto per ogni  $n \geq 2$ . Da qui la ovvia analogia con la definizione di algebra di Koszul data da Priddy.