

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI “ROMA TRE”
FACOLTÀ DI S.M.F.N.

SINTESI DELLA TESI DI LAUREA IN MATEMATICA
di

Pambianchi Perla

**Tableaux di Young e applicazioni alla
teoria delle rappresentazioni.**

Relatore
Prof. Andrea Bruno

Anno Accademico 2001-2002

Classificazione AMS: 05E10 05E05
Parole chiave: Rappresentazioni del gruppo simmetrico, Tableaux.

Perla Pambianchi è nata a Roma il 14/09/1977
Ha conseguito il diploma di maturità scientifica presso il Liceo Scientifico Statale M.Malpighi di Roma nel luglio 1996.
Si è iscritta al Corso di Laurea in Matematica presso l'Università degli studi "Roma Tre" nell'A.A. 1996/97.
Negli A.A. 1999-2000 e 2001-2002 ha svolto attività di assistenza ai due laboratori di informatica presso la Facoltà di Matematica dell'Università degli Studi "Roma Tre", in quanto vincitrice di borsa di collaborazione.

Prove di qualificazione presentate:

- Piani affini (Prof.ssa Cruciani)
- Polimoni costruibili con riga e compasso (Prof.ssa Gabelli)

Sintesi.

Tra gli obiettivi di questo lavoro vi è quello di mostrare come le rappresentazioni del gruppo simmetrico e del gruppo lineare generale, analizzate solitamente attraverso risultati provenienti dalla teoria classica delle rappresentazioni, possano realizzarsi attraverso costruzioni puramente combinatorie, provenienti dal calcolo dei tableaux di Young.

Il percorso seguito in questa tesi consta di tre momenti principali.

In un primo momento ricordiamo le principali proprietà del gruppo simmetrico e introduciamo la teoria classica delle rappresentazioni dei gruppi finiti, con la teoria dei caratteri che mette in corrispondenza biunivoca le rappresentazioni di un gruppo G con le sue classi di coniugio. Enfatizziamo soprattutto le rappresentazioni ed i rispettivi caratteri del gruppo simmetrico, servendoci di esempi e di proprietà particolari del gruppo stesso. In un secondo momento, sviluppiamo l'importante costruzione combinatoria dei tableaux di Young, una classe di tabelle numerate, alla quale si può dare una struttura di monoide associativo. I due algoritmi fondamentali, che definiscono l'operazione di prodotto in questo monoide sono quello di "inserimento per righe", dovuto a Schensted, e quello dello "sliding", dovuto a Schützenberger. Il monoide così ottenuto, oggetto puramente combinatorio, ha un omomorfismo canonico nell'anello dei polinomi a coefficienti interi; questo ci porta a tradurre risultati puramente combinatori in relazioni algebriche tra polinomi simmetrici; ad esempio la classica regola di Littlewood-Richardson,

relativa all'espressione in polinomi di Schur del prodotto di due tali polinomi, si deriva da una formula sui tableaux, atta a contare il numero di tableaux di un dato contenuto su una data partizione.

Il lavoro si conclude con la costruzione delle rappresentazioni irriducibili del gruppo simmetrico, dette moduli di Specht e di una classe importante di rappresentazioni del gruppo lineare generale, dette moduli di Weyl. Costruendo in un modo puramente combinatorio tali rappresentazioni, saremo capaci di riportare i risultati algebrico-combinatori delle parti precedenti nel contesto classico della teoria delle rappresentazioni; ad esempio, poiché dimostreremo che i polinomi di Schur sono i caratteri dei moduli di Weyl, troveremo che la regola di Littlewood-Richardson, dimostrata in contesto combinatorio, si adatta a governare la decomposizione in addendi irriducibili di prodotti tensoriali di rappresentazioni. La presente tesi è suddivisa in tre capitoli.

Nel primo capitolo abbiamo presentato risultati generali inerenti al gruppo simmetrico. Ad esempio abbiamo ricordato che ogni permutazione può essere suddivisa in cicli, la cui lunghezza definisce una partizione; che due permutazioni, aventi stessa partizione, stanno nella medesima classe di coniugio; che il numero delle classi di coniugio si ottiene quozientando la cardinalità del gruppo simmetrico e quella del centro, che dipende esclusivamente dalla partizione. In formule:

$$\#\{\text{classi di coniugio}\} = \frac{n!}{1^{m_1} m_1! 2^{m_2} m_2! \cdots n^{m_n} m_n!}$$

se la partizione considerata è $\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n})$.

Successivamente abbiamo introdotto la teoria classica delle rappresentazioni, con la teoria dei caratteri e quella degli invarianti. Poiché tratteremo in particolare le rappresentazioni del gruppo simmetrico, porremo attenzione ai polinomi simmetrici.

Definizione 1. *Un polinomio $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ si dice **sim-***

metrico se $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \sigma(f)$. È chiaro che tali polinomi sono invarianti e che costituiscono un solo sottospazio

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^{\mathbf{S}_n} \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n].$$

Definiamo poi i polinomi alterni sia come gli elementi $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tali che:

$$\forall \sigma \in \mathbf{S}_n \quad \sigma(f(x_1, \dots, x_n)) = \text{sgn}(\sigma)f(x_1, \dots, x_n),$$

sia a partire dal più importante polinomio alterno, il determinante di Vandermonde $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$, come segue:

Proposizione 1. *I polinomi alterni sono tutti e soli quelli della forma $V \cdot g$, con $g(x_1, \dots, x_n)$ polinomio simmetrico, $V(x_1, \dots, x_n)$ determinante di Vandermonde.*

Concludiamo il capitolo introducendo un'altra importante classe di polinomi, che costituiscono una base per lo spazio vettoriale dei polinomi simmetrici; essi sono i polinomi di Schur che saranno così definiti:

Definizione 2.

*I polinomi $\frac{|h_1, h_2, \dots, h_n|}{V}$ sono detti **polinomi di Schur**, dove*

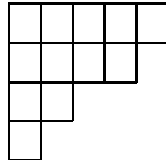
$$|h_1, h_2, \dots, h_n| := \begin{vmatrix} x_1^{h_1} & x_2^{h_1} & \dots & x_n^{h_1} \\ x_1^{h_2} & x_2^{h_2} & \dots & x_n^{h_2} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ x_1^{h_n} & x_2^{h_n} & \dots & x_n^{h_n} \end{vmatrix}$$

Il capitolo secondo è interamente dedicato al calcolo dei tableaux di Young e costituisce il cuore della teoria combinatoria presente in questa tesi. Iniziamo pertanto dando le definizioni di diagramma e tableau di Young:

Definizione 3. *Un **diagramma di Young** è una tabella suddivisa in celle, arrangiate su righe, allineate a sinistra e ordinate in modo tale che il loro numero sia non crescente su ciascuna riga, a partire dalla prima.*

Elencando il numero di celle su ciascuna riga diamo una partizione di n , che è il numero totale di celle in cui è stato suddiviso il diagramma; pertanto esiste una corrispondenza biunivoca tra diagrammi e rispettive partizioni.

Esempio:



La partizione associata a questo diagramma è $\lambda = (5, 4, 2, 1)$

Definizione 4. *Un **tableau di Young** è una numerazione, che associa ad ogni cella del diagramma, un intero positivo, rispettando le seguenti regole:*

1. *La numerazione sulle righe avviene in ordine non decrescente.*
2. *La numerazione sulle colonne avviene in ordine strettamente crescente.*

Se la numerazione di un diagramma è tale che anche gli elementi sulle righe siano strettamente crescenti, il tableau corrispondente a questa numerazione prende il nome di tableau standard.

Ci sono due operazioni fondamentali sui tableaux, dalle quali si possono dedurre la maggior parte delle proprietà combinatorie che utilizzeremo in seguito: esse sono rispettivamente l'algoritmo di "inserimento per righe" di Schensted e l'algoritmo di "sliding" di Schützenberger.

Inserimento per righe:

Preso un tableau T ed un intero positivo x , questo algoritmo ci permette di costruire un nuovo tableau $T \leftarrow x$, inserendo in T l'elemento x . Esso verrà descritto in questi tre punti:

1. Se x è l'elemento maggiore tra tutti quelli che si trovano nella prima riga, lo andiamo semplicemente ad aggiungere alla fine di questa.

2. Se invece troviamo un elemento $y > x$, il primo di tali y lo rimpiazziamo con x e cerchiamo poi di inserire con lo stesso criterio, nelle righe successive, la y che è stata prima rimpiazzata.
3. Se non riusciamo ad inserire un elemento nelle righe precedenti con il metodo sopra riportato, questo elemento sarà messo alla fine dell'ultima riga o al principio di una nuova, in maniera tale che venga conservata la struttura di tableau.

Esempio: Preso il tableau T , costruiremo, seguendo le tre regole appena date, il Tableau $T \leftarrow 2$:

1	2	2	3	3	
2	3	4	4		← 2
4	6				
5					

1	2	2	2	3	
2	3	3	4		← 4
4	6				
5					

1	2	2	2	3	
2	3	4	4		← 3
4	6				
5					

1	2	2	2	3	
2	3	3	4		← 6
4	4				
5					

1	2	2	2	3	
2	3	3	4		
4	4				
5	6				

Tableau $T \leftarrow 2$

Definizione 5. Se T e U sono tableaux, tramite l'algoritmo di inserimento per righe, definiamo $T \cdot U$ come il tableau prodotto, ottenuto da T inserendo con un ordine determinato gli elementi di U con l'algoritmo sopra descritto.

Prima di introdurre l'algoritmo di "sliding", ricordiamo che:

Definizione 6. Definiamo **obliquo** λ/μ , il diagramma ottenuto rimuovendo un diagramma di Young più piccolo μ , da uno più grande λ che lo contiene.

Sliding:

Siano μ e λ due diagrammi tali che $\mu \subseteq \lambda$ e sia B una cella del diagramma μ che confini sotto e a destra con due celle numerate del diagramma obliquo λ/μ . Nel corso dell' algoritmo, considereremo B come fosse una scatola vuota che scorre sul tableau secondo le seguenti regole:

1. B verrà confrontata con le scatole confinanti con essa a destra e sotto; B prenderà il posto di quella che contiene l'elemento di valore minore e tale scatola di conseguenza andrà ad occupare il posto dove prima era B . A parità di valore dei due elementi, B prenderà comunque il posto di quello della scatola sotto.
2. Se una delle due scatole, confinanti a destra o sotto con B , non appartiene al diagramma, ovviamente B scambierà il suo posto con quella che ci appartiene.
3. Il procedimento avrà termine solo quando la scatola B non avrà più confinanti nel diagramma, cioè finché B non sarà diventata un angolo esterno.

Applicando l'operazione di sliding ad ogni siffatta scatola B di un tableau obliquo S , si ottiene un tableau che chiameremo **rettificazione di S** e indicheremo con $Ret(S)$.

Definizione 7. *Siano T e U due tableaux costruiti rispettivamente sui diagrammi $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$ supponiamo che $\mu \subseteq \lambda$; allora indichiamo con $T * U$ è il tableau obliquo che si ottiene affiancando ad un rettangolo di altezza pari all'altezza di p scatole e larghezza pari a quella di λ_1 scatole, i due tableaux, ovviamente ponendo U alla destra di questo rettangolo e T al di sotto.*

Esempio :

$$\text{Se } T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 4 & \\ \hline 4 & 6 & & & \\ \hline 5 & & & & \\ \hline \end{array} \quad e \quad U = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Allora } T * U = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & 1 & 3 \\ \hline & & & & & 2 & \\ \hline 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & & \\ \hline 2 & 3 & 4 & 4 & & & \\ \hline 4 & 6 & & & & & \\ \hline 5 & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

L'algoritmo di "sliding" ci fornisce un'altra costruzione del prodotto di due tableaux di Young:

Definizione 8. *Definiamo il prodotto di due tableaux T e U , il tableau $T \cdot U$ ottenuto da $\text{Ret}(T * U)$.*

Anche l'operazione appena definita rende l'insieme dei tableaux un monoide associativo con unità. Successivamente analizziamo le parole di un tableau, che sono successioni di elementi, presi dal tableau, rispettando un certo criterio. La decodifica dei tableaux attraverso le loro parole è utile per la dimostrazione del fatto che le precedenti strutture algebriche sono associative con unità e che sorprendentemente i due prodotti su definiti sono in realtà equivalenti. L'inserimento per righe e lo sliding, applicati alla parola di un tableau, definiscono due trasformazioni che ci permettono di introdurre l'equivalenza secondo Knuth, che è una relazione di equivalenza sulle parole, che ci conduce alla dimostrazione del seguente teorema:

Teorema 1. *Se w è equivalente secondo Knuth alla parola $w(T)$ del tableau T , allora T è univocamente determinato da w .*

Sia F il monoide libero formato da tutte le parole aventi per unità la parola vuota, e per prodotto la giustapposizione di due parole, e sia R la relazione di equivalenza secondo Knuth. Allora seguendo le notazioni di Lascoux, Knuth e Schützenberger possiamo formalizzare il contenuto del precedente teorema e dei precedenti fatti, costruendo il monoide quoziente F/R e concludendo che il monoide dei tableaux (i cui elementi appartengono all'insieme $\{1, \dots, m\}$) è isomorfo a questo. Ora la nostra ricerca procede collegando la costruzione di M appena definita, ai polinomi di Schur. Esiste un omomorfismo canonico dall'anello di gruppo $R_{[m]}$ (associato al monoide M) all'anello dei polinomi a coefficienti interi $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$, che associa ad ogni tableau T il monomio x^T , che è il prodotto delle variabili x_i ciascuna presa tante volte quanto è l'occorrenza dell'elemento i in T . Questo omomorfismo ci permette di dare una definizione alternativa dei polinomi di Schur come la somma su tutti i tableaux T , aventi stessa partizione, dei monomi x^T . L'utilizzo dei tableaux nella definizione dei polinomi di Schur permette di sviluppare, riportare nel campo algebrico, parecchie formule combinatorie. Meritano di essere citate:

1. Le formule di Pieri, che permettono di moltiplicare un polinomio di Schur (indicato con s_λ) rispettivamente con un polinomio simmetrico completo (indicato con h_p) o con un polinomio simmetrico elementare (indicato con e_p):

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_m) \cdot h_p(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\mu} s_\mu(x_1, \dots, x_m). \quad (0.0.1)$$

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_m) \cdot e_p(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\mu} s_\mu(x_1, \dots, x_m). \quad (0.0.2)$$

2. Il numero di Kostka $K_{\lambda\mu}$, che conta quanti tableaux di contenuto μ è

possibile costruire su una data partizione λ , entra nella formula:

$$h_{\mu_1} \cdot \dots \cdot h_{\mu_l} = \sum_{\lambda} K_{\lambda\mu} s_{\lambda}. \quad (0.0.3)$$

3. La regola di Littlewood-Richardson che generalizza le formule di Pieri e permette di moltiplicare due polinomi di Schur qualsiasi:

$$s_{\lambda}(x_1, \dots, x_k) \cdot s_{\mu}(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\nu} c_{\lambda\mu}^{\nu} s_{\nu}(x_1, \dots, x_k). \quad (0.0.4)$$

$$s_{\nu/\lambda}(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\mu} c_{\lambda\mu}^{\nu} s_{\mu}(x_1, \dots, x_k). \quad (0.0.5)$$

Un ruolo importante è anche svolto dalla corrispondenza biunivoca tra parole e coppie di tableaux, aventi stessa partizione, nota come corrispondenza di Robinson Schensted e Knuth. La costruzione di una tale corrispondenza ci porta a dimostrare, attraverso tecniche puramente combinatorie, non solo che i polinomi di Schur sono polinomi simmetrici, ma anche le seguenti formule:

1.

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{1}{1 - x_i x_j} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) \cdot s_{\lambda}(y_1, \dots, y_m), \quad (0.0.6)$$

Identità nota sotto il nome di formula di Cauchy.

2.

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} (f^{\lambda})^2 \quad (0.0.7)$$

dove f^{λ} indica il numero di tableaux standard che possono essere costruiti sulla partizione λ .

3.

$$m^n = d_\lambda(m) \cdot f^\lambda, \quad (0.0.8)$$

dove $d_\lambda(m)$ indica il numero di tableaux con elementi appartenenti all'insieme $\{1, \dots, m\}$, che possono essere costruiti su λ . Ovviamente m^n indica il numero di parole con n lettere che possono essere costruite con gli elementi dell'insieme $\{1, \dots, m\}$.

Nel terzo ed ultimo capitolo infine descriveremo l'uso dei tableaux nella teoria delle rappresentazioni. In particolare vedremo come ad ogni partizione $\lambda \vdash n$ si possa associare una rappresentazione irriducibile del gruppo simmetrico \mathbf{S}_n , detta modulo di Specht e denotata con S^λ , e una rappresentazione irriducibile di $GL(V)$ denotata con V^λ e detta modulo di Weyl (ovviamente V è uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita). La costruzione dei moduli di Specht viene data a partire dall'azione di \mathbf{S}_n sui tabloids.

Definizione 9. Per ogni numerazione T abbiamo due sottogruppi di \mathbf{S}_n detti rispettivamente **gruppo riga** $R(T)$ e **gruppo colonna** $C(T)$.

$$R(T) = \{\sigma \in \mathbf{S}_n : \sigma \text{ permuta gli elementi di ogni riga}\}$$

mentre

$$C(T) = \{\sigma \in \mathbf{S}_n : \sigma \text{ permuta gli elementi di ogni colonna}\}$$

$R(T)$ e $C(T)$ sono noti anche sotto il nome di sottogruppi di Young e possono essere espressi come prodotto di gruppi simmetrici. Siano $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ una partizione e sia $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ la partizione coniugata di λ , allora:

$$R(T) = \mathbf{S}_{\lambda_1} \times \mathbf{S}_{\lambda_2} \times \cdots \times \mathbf{S}_{\lambda_k}.$$

$$C(T) = \mathbf{S}_{\mu_1} \times \mathbf{S}_{\mu_2} \times \cdots \times \mathbf{S}_{\mu_l}.$$

Definizione 10. Definiamo **tabloid** la classe di equivalenza di una numerazione T di un diagramma di Young e lo denotiamo con $\{T\}$. Dunque $\{T\} = \{T'\}$ se $T' = p \cdot T$ per qualche $p \in R(T)$.

Esempio: Con

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 4 & 7 & \\ \hline 6 & 2 & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 3 & 1 \\ \hline 7 & 4 & \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline \end{array}$$

Indichiamo il tabloid della numerazione $T =$

1	3	5
4	7	
6	2	

Osservazione: Il gruppo simmetrico \mathbf{S}_n agisce sull'insieme dei tabloids come segue:

$$\forall \sigma \in \mathbf{S}_n \quad \sigma \cdot \{T\} = \{\sigma \cdot T\}$$

Definizione 11. Definiamo M^λ lo spazio vettoriale complesso avente per base i tabloids di una numerazione associata ad una partizione λ di n .

Definizione 12. I **moduli di Specht** che indichiamo con S^λ sono i sottospazi di M^λ generati dai vettori $v_T = \sum_{q \in C(T)} \text{sgn}(q) \{q \cdot T\}$ al variare delle numerazioni T su λ .

Essendo $\sigma \cdot v_T = v_{\sigma \cdot T}$ segue che S^λ è un $\mathbb{C}[\mathbf{S}_n]$ -sottomodulo di M^λ dunque per ogni numerazione T su λ abbiamo $S^\lambda = \mathbb{C}[\mathbf{S}_n] \cdot v_T$

Si dimostra che tutte e sole le rappresentazioni irriducibili di \mathbf{S}_n sono date dai moduli di Specht. Si noti che, data la natura combinatoria delle precedenti definizioni, i risultati della seconda parte si estendono al contesto delle rappresentazioni: ad esempio, nella decomposizione in fattori irriducibili dei moduli M^λ , ritroviamo le formule combinatorie introdotte nel precedente capitolo. Ad esempio il numero di Kostka è presente nella seguente decomposizione di M^λ :

$$M^\lambda \cong S^\lambda \bigoplus_{\nu \triangleright \lambda} (S^\nu)^{\oplus K_{\nu\lambda}}$$

Per ogni ν il numero $K_{\nu\lambda}$ indica quante volte S^ν occorre in M^λ . Sfruttando la formula 0.0.7 deduciamo inoltre che $f^\lambda = \dim(S^\lambda)$.

Consideriamo uno spazio vettoriale complesso F e la mappa

$$\varphi : V^{\times n} \rightarrow F$$

tale che soddisfi le tre seguenti proprietà:

1. φ è multilineare.
2. φ è alterna sugli elementi di ciascuna colonna di λ . (Ovvero φ è nulla non appena due elementi sulla stessa colonna di λ sono uguali.)
3. Per ogni $\mathbf{v} \in V^\lambda$, si deve avere $\varphi(\mathbf{v}) = \sum \varphi(\mathbf{w})$. Tale somma viene fatta sopra tutti i vettori \mathbf{w} ottenuti da \mathbf{v} scambiando tra due date colonne un dato sottoinsieme di celle scelte a priori nella colonna di destra.

Definizione 13. *Definiamo modulo di Weyl o modulo di Schur il modulo V^λ tale che la mappa $\varphi : V^{\times \lambda} \rightarrow V^\lambda$ sia universale e soddisfi le proprietà 1.-3. sopra descritte.*

Definiremo un modulo di Weyl anche come immagine nello spazio $End(V^{\otimes n})$ del simmetrizzatore di Young c_T , definito come segue:

Definizione 14. *Definiamo simmetrizzatori di Young i seguenti elementi di $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$:*

$$\mathbf{a}_T = \sum_{p \in R(T)} p \quad \mathbf{b}_T = \sum_{q \in C(T)} \text{sgn}(q)q \quad \mathbf{c}_T = \mathbf{a}_T \cdot \mathbf{b}_T$$

Dunque in formule: $V^\lambda := Im(c_T|_{V^{\otimes n}})$.

Una costruzione dei moduli di Weyl, affine alla precedente sarà fatta inoltre a partire dalle rappresentazioni del gruppo simmetrico.

Definizione 15. Per ogni rappresentazione M di \mathbf{S}_n definiamo lo spazio vettoriale

$$V(M) = V^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{C}[\mathbf{S}_n]} M.$$

Caratterizziamo allora il modulo di Weyl V^λ attraverso l'isomorfismo canonico: $V^\lambda \cong V(S^\lambda)$ Concludiamo infine il seguente lavoro, mostrando che i caratteri dei moduli di Weyl sono i polinomi di Schur e da ciò ricaviamo corollari interessanti, adattando a questi caratteri le formule combinatorie trovate studiando i tableaux di Young. Anche in questo caso meritano di essere citate le formule di decomposizione delle rappresentazioni di $GL(V)$:

$$V^{\otimes n} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} (V^\lambda)^{\oplus f^\lambda}.$$

Dalle formule di Pieri e di Littlewood-Richardson, ricaviamo i seguenti risultati:

1.

$$\text{Sym}^{\lambda_1} V \otimes \cdots \otimes \text{Sym}^{\lambda_n} V \cong \bigoplus (V^\nu)^{\otimes K_{\nu\lambda}} \cong (V^\lambda) \otimes \bigotimes_{\nu \triangleright \lambda} (V^\nu)^{\otimes K_{\nu\lambda}}$$

Dove $K_{\nu\lambda}$ è il numero di Kostka.

2.

$$\bigwedge^{\mu_1} V \otimes \cdots \otimes \bigwedge^{\mu_m} V \cong \bigoplus (V^\nu)^{\otimes K_{\nu\mu}} \cong (V^{\tilde{\mu}}) \otimes \bigotimes_{\tilde{\nu} \triangleright \lambda} (V^\nu)^{\otimes K_{\tilde{\nu}\mu}}$$

3.

$$V^\lambda \otimes V^\mu \cong \bigotimes_{\nu} (V^\nu)^{\otimes c_{\lambda\mu}^\nu}$$

Dove $c_{\lambda\mu}^\nu$ è il numero di Littlewood-Richardson.

Qui riportiamo le costruzioni dei moduli di Specht e di Weyl associati ai due casi estremi dati dalle partizioni $\lambda = (n)$ e $\lambda = (1^n)$.

Se $\lambda = (n)$ il modulo di Specht $S^{(n)}$ è la rappresentazione banale di \mathbf{S}_n ,

di dimensione uno, ovvero lo spazio vettoriale \mathbb{C} con l'azione $\sigma \cdot z = z$ $\forall \sigma \in \mathbf{S}_n$ e $\forall z \in \mathbb{C}$, mentre il modulo di Weyl $V^{(n)}$ corrisponde all'ennesima potenza simmetrica $Sym^n(V)$ avente come carattere l'ennesimo polinomio simmetrico completo.

Se $\lambda = (1^n)$, il corrispondente modulo di Specht è dato dalla rappresentazione alterna uno dimensionale definita dallo spazio vettoriale \mathbb{C} e dall'azione $\sigma \cdot z = sgn(\sigma)z$ $\forall \sigma \in \mathbf{S}_n$ e $\forall z \in \mathbb{C}$, mentre il modulo di Weyl $V^{(1^n)}$, corrisponde all'ennesima potenza alterna $\bigwedge^n(V)$ avente come carattere l'ennesimo polinomio simmetrico elementare.

Bibliografia

- [1] Akin, D.A. Buchsbaum, J. Weyman. *Schur functors and Schur complexes* Advances in Math.44 (1982), 207-278
- [2] W. Fulton. *Young Tableaux*. Cambridge University Press. (1997)
- [3] W. Fulton, J. Harris. *Representation Theory: A First Course*. Springer-Verlang (1991)
- [4] J.A Green *Polynomial representation of GL_n* . Lecture Notes in Math. 830. Springer-Verlang (1980)
- [5] G.D. James *The irriducibile representations of the symmetric groups*. Bull. London Math. Soc. 8 (1976), 229-232
- [6] G.D. James *The Rapresentations Theory Symmetric groups*. Lecture Notes in Math 682. Springer-Verlang (1978)
- [7] D.E. Knuth *Permutations, matrices and generalized Young tableaux*. Pacific J. Math. Soc. 34 (1970), 709-727
- [8] S.Lang *Algebra Lineare*. Boringhieri (1970)
- [9] A Lascoux, M.P. Schützenberger “*Le monoïde plaxique*” in *Non-Commutative Structures in Algebra e Geometric Combinatorics*. Quaderni de “La ricerca scientifica” 109, Roma CNR (1981) 129-156

- [10] I.G.Macdonald *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. Claredon Press, Oxford (1979)
- [11] B. E. Sagan. *The symmetric group: representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*. Wadsworth. Springer-Verlang (1991)
- [12] C. Schensted *Longest increasing and decreasing subsequences*. Canad. J. Math. 13 (1963), 179-191
- [13] J.P. Serre *Linear Representations of Finite Groups*. Springer-Verlang (1977)