UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica

di

Annapina Papalillo

Configurazioni e Teoremi Classici

Relatore

Prof. Andrea Bruno

Il Relatore	Il Candidato
Prof. Andrea Bruno	Annapina Papalillo

ANNO ACCADEMICO 2002 - 2003

Ottobre 2003

Classificazione AMS : 50D30.

Parole Chiave : Configurazioni, Desargues.

Sintesi

Con questo lavoro ci proponiamo di studiare alcune configurazioni della Geometria Proiettiva, in particolare della configurazione di Desargues.
Una *configurazione astratta*, (a_α, b_β), è una coppia di insiemi finiti, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, di cardinalità, rispettivamente, a e b con una relazione sul prodotto degli insiemi, in cui ogni elemento del primo insieme è in relazione con α elementi del secondo insieme e ogni elemento del secondo insieme è in relazione con β elementi del primo insieme. Nel caso in cui $a = b$ la configurazione si dirà *simmetrica*. Le configurazioni più interessanti sono quelle che si possono realizzare tra gli spazi lineari dello spazio proiettivo. Un esempio di configurazione è quella che si ricava dal teorema di Pascal:

Teorema 0.0.1 (Teorema di Pascal) *Se i vertici di un esagono giacciono alternativamente su due rette, allora i punti d'intersezione dei lati opposti sono collineari.*

É costituita dai lati e dai vertici dell'esagono, dalle diagonali e dai loro punti d'intersezione; tale che ogni retta passa per tre punti e per ogni punto passano tre rette. Otteniamo lo stesso numero di punti e rette, è una configurazione simmetrica (9_3).
Un altro esempio di configurazione realizzabile è la configurazione di Ceva, $Ceva(n)$.

In $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dato il gruppo delle radici n-esime dell'unità α_n, consideriamo n^3 punti: $P_{0,\alpha} = (0, 1, \alpha), P_{1,\alpha} = (\alpha, 0, 1), P_{2,\alpha} = (1, \alpha, 0)$, dove $\alpha \in \alpha_n$. Sia $L_{0,\alpha}$ la retta congiungente il punto $(1, 0, 0)$ con $P_{0,\alpha}$, $L_{1,\alpha}$ la congiungente il punto $(0, 1, 0)$ con $P_{1,\alpha}$ e $L_{2,\alpha}$ la congiungente il punto $(0, 0, 1)$ con $P_{2,\alpha}$. Le

rette $L_{0,\alpha}$, $L_{1,\alpha}$, $L_{2,\alpha}$ sono incidenti in un unico punto $p_{\alpha,\beta,\gamma}$ se e soltanto se $\alpha\beta\gamma = -1$, dove tale condizione deriva dai teoremi di Ceva e Menelao (vedi teorema **??**). Ricaviamo n^2 punti, essendo $\gamma = -1/\alpha\beta$ e α, β variano n-volte, e $3n$ rette $L_{i,\alpha}$ che formano la configurazione $(n^2_3, 3n_n)$.
Le configurazioni accennate sono particolari, ovvero sono alcune delle più importanti configurazioni studiate. La loro importanza deriva dal fatto che rappresentano alcuni teoremi classici della geometria proiettiva. Quanto detto vale anche per la configurazione (10_3), essa esprime e rappresenta il teorema di Desargues:

Teorema 0.0.2 (Teorema di Desargues) *Dati nello spazio due triangoli $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, disposti in modo che le congiungenti i vertici corrispondenti passino per un punto unico O. Allora le tre coppie di lati corrispondenti si tagliano in tre punti R, S, T, e tali punti giacciono su una stessa retta, la* retta di Desargues.

La figura ottenuta è costituita dai due triangoli, dalle congiungenti i vertici corrispondenti e dal loro punto d'incidenza, dalle congiungenti i lati corrispondenti, dai loro punti d'incidenza e dalla retta che li contiene. Numerando gli elementi otteniamo 10 punti e 10 rette tali che per ogni punto passano tre rette e su ogni retta giacciono tre punti, la configurazione (10_3) è simmetrica. Un altro modo di ottenere la configurazione di Desargues è dato da 5 punti in posizione generale in $\mathbb{P}^3$ ed un piano $\pi \in \mathbb{P}^3$ ma non passante per nessuno dei cinque punti dati.

Si ottiene, a meno di proiettività, che le configurazioni di Desargues sono in corrispondenza biunivoca con le orbite del gruppo simmetrico $\mathcal{S}_5$

su un aperto dello spazio proiettivo. In seguito, approfondiamo l'analisi considerando gli automorfismi delle configurazioni di Desargues.

Nel primo capitolo abbiamo introdotto e studiato con i metodi propri della geometria proiettiva i teoremi enunciati, riportando alcune definizioni basilari e alcuni risultati importanti.

Definizione 0.0.1 *Due forme primitive si definiscono* prospettiche *se e soltanto se sono in corrispondenza biunivoca in modo tale che ogni elemento di una forma è in corrispondenza biunivoca con il suo omologo nell'altra, dati $[P]$ e $[Q]$, scriveremo, allora,*

$$[P] \overset{=}{\barwedge} [Q].$$

In questa formulazione il teorema di Desargues si enuncia nel modo seguente:

Teorema 0.0.3 (Teorema di Desargues) *Se due triangoli, giacenti nello stesso piano, sono prospettici rispetto ad un punto, le tre coppie di lati omologhi s'incontrano in punti collineari, allora i triangoli sono prospettici rispetto ad una retta.*

Una proiettività (vedi def **??**) particolare che ci permetterà di studiare gli automorfismi della configurazione di Desargues è la collineazione.

Definizione 0.0.2 *Una* collineazione proiettiva *è una corrispondenza biunivoca proiettiva, che trasforma punti collineari in punti collineari, quindi rette in rette, fasci in fasci.*

I primi teoremi che vengono enunciati e dimostrati con i metodi sintetici descritti nel primo capitolo sono:

Teorema 0.0.4 (Teorema di Pascal) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè sei punti, tre dei quali non collineari, siano punti di una stessa conica* *è che le tre coppie di lati opposti dell' esagono semplice, individuato da tali punti, devono incontrarsi in punti collineari.*

Applicando il Principio di Dualità, ricaviamo:

Teorema 0.0.5 (Teorema di Brianchon) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè sei rette, tre delle quali non incidenti, siano rette di una conica è che le rette congiungenti le tre coppie di vertici opposti dell'esagono semplice, individuato dalle rette, devono essere incidenti.*

Usando la teoria delle coniche il teorema di Pascal assume nuove formulazioni, definite degeneri. Il primo caso degenere si ricava volendo determinare il sesto punto di una conica su una retta passante per uno dei cinque punti dati. Consideriamo sei punti su una conica, A, B, C, D, E, F, dei quali due sono punti doppi, ad esempio A e B, e sia l la retta passante per A. Se A e B coincidono, e la retta l diviene la tangente in A, otteniamo cinque punti sulla conica, A, B, C, D, E, la figura inscritta è un pentagono e il teorema di Pascal è ancora valido:

Teorema 0.0.6 *Se i vertici di un pentagono piano semplice sono punti di una conica, la tangente alla conica in uno dei vertici, incontra il lato opposto in un punto, collineare con i punti d'intersezione delle altre coppie di lati non adiacenti. (vedi fig* **??***)*

Quindi se l non è più una secante della conica ma diviene tangente, l'esagono degenera in pentagono, allo stesso modo se la retta risulta nuovamente tangente alla conica il pentagono degenera in un quadrangolo e se la condizione di tangenza si verifica ulteriormente il quadrangolo diviene un triangolo. Un particolare caso degenere del teorema di Pascal lo si ricava quando la conica degenera in due rette distinte, in tal caso otteniamo il teorema di Pappo.

Teorema 0.0.7 (Pappo) *Se i vertici di un esagono si trovano alternativamente su due rette, e se due coppie di lati opposti sono costituite da lati paralleli, allora anche la terza coppia è formata da lati paralleli.*

Anche per il teorema di Desargues abbiamo alcune degenerazioni. Accanto al caso degenere di Pascal, riguardante il pentagono piano inscritto in una conica, abbiamo il primo caso degenere del teorema di Desargues, dal quale ricaviamo la costruzione di una conica per quattro punti dati e la tangente a uno di tali. Su ogni retta passante per uno dei punti, non appartenente alla tangente, è determinata un involuzione. In tale involuzione la tangente e la retta passante per gli altri due punti determinano una coppia dell'involuzione, e le rette congiungenti il punto di contatto con gli altri due punti determinano un'altra coppia dell'involuzione.

Teorema 0.0.8 *Se i vertici di un triangolo giacciono su una conica, e una retta l incontra la conica in due punti, gli ultimi sono una coppia della involuzione, determinata su l dalla coppia di punti nei quali i due lati del triangolo incontrano l. Nel caso in cui l è una tangente alla conica, il punto di contatto è un punto doppio dell'involuzione.*

L'importanza dei teoremi esposti è dimostrata anche dal fatto che sono stati analizzati e studiati da diversi punti di vista. Infatti, nel secondo capitolo riportiamo alcune dimostrazioni dei teoremi classici con tecniche non strettamente proiettive. Oltre ai teoremi di Pascal e Desargues abbiamo anche analizzato i teoremi di Ceva, Menelao, Brianchon e Poncelet.

Utilizzando le nozioni di parallelismo e similitudine abbiamo ridimostrato il teorema di Pascal e quello di Desargues, e i rispettivi teoremi duali.

Un altro approccio è stato fatto tramite le nozioni di dilatazione e birapporto. Una dilatazione è una collineazione che trasforma rette in rette parallele. In particolare, abbiamo utilizzato l'omotetia, che è una dilatazione con un punto fisso, dove dato un numero $r > 0$, e il punto fisso P, allora ad ogni punto del piano Q corrisponderà un unico punto Q', appartenente alla retta PQ e tale che $PQ' = rPQ$; l'omotetia sarà denotata da $\delta_{P,r}$. Il birapporto degli elementi A, B, C, D di una qualsiasi forma unidimensionale, indicato da $R(AB, CD)$, è la coordinata, λ, dell'elemento in cui D viene trasformato dalla proiettività, che trasforma gli elementi A, B, C, in ∞, 0, 1: $ABCD \barwedge \infty 01\lambda$,

$$R(AB, CD) = \frac{(A - C)}{(A - D)} \cdot \frac{(B - D)}{(B - C)} = \lambda.$$

Inoltre, dato un triangolo $\triangle ABC$ e siano D, E, F, tre punti sui suoi lati, distinti dai vertici, definiamo il *prodotto di rapporti delle distanze dirette* l'equazione

$$* = (\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA}).$$

I primi teoremi classici dimostrati con le nozioni esposte, sono il teorema di Menelao e il teorema di Ceva, che permettono di determinare la collinearità di tre punti e l'incidenza di tre rette sono.

Teorema 0.0.9 (Menelao) *Dato il triangolo $\triangle ABC$, siano D, E, F, tre punti appartenenti alle rette BC, AC, AB, distinti dai vertici del triangolo. Allora tali punti sono collineari se e soltanto se*

$$(\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA}) = -1$$

Teorema 0.0.10 (Ceva) *Dato il triangolo $\triangle ABC$, siano D, E, F, tre punti appartenenti alle rette BC, AC, AB, distinti dai vertici del triangolo. Allora* *le rette AD, BE e CF sono incidenti se e soltanto se*

$$(\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA}) = +1$$

Un altro teorema riguardante i triangoli è il teorema di Poncelet,

Teorema 0.0.11 (Teorema di Poncelet) *In ogni triangolo i punti medi dei lati, i piedi delle altezze e i punti di Eulero giacciono tutti su una stessa circonferenza.*

Altre dimostrazioni particolari per il teorema di Pascal e il teorema di Desargues le otteniamo seguendo Hilbert e Todd.
Nella dimostrazione del teorema di Pascal, secondo Hilbert, abbiamo utilizzato la teoria delle quadriche, $Q \subset \mathbb{R}^3$.
Consideriamo l'iperboloide ad una falda, che è una superficie di secondo ordine ottenuta dalla rotazione di una retta sghemba, g, intorno ad un'altra fissa a, definita asse. Su tale superficie giacciono due schiere di rette, dove ogni schiera copre completamente la superficie. Le schiere sono ordinate in modo tale che ogni retta di una tagli ogni retta dell'altra, mentre due rette della stessa schiera non s'incontrano mai. Scelte su ogni schiera tre rette, otteniamo nove punti d'intersezione. Presi sei di tali punti, in modo tale da definire un esagono i cui lati giacciono alternativamente sulle due schiere, le congiungenti i vertici opposti s'incontrano in un punto. Quanto detto è la formulazione spaziale del teorema di Brianchon, duale del teorema di Pascal, dalla quale ricaviamo le formulazioni piane, proiettando l'iperboloide da un punto appartenente alla superficie oppure no. Nel caso in cui il centro di proiezione non giace sulla superficie si ha:

Teorema 0.0.12 (Brianchon) *Le diagonali d'un esagono piano circoscritto a una conica si tagliano in un punto.*

Mentre se il centro di proiezione appartiene alla superficie:

Teorema 0.0.13 (Brianchon) *Le diagonali d'un esagono piano, i cui lati passino alternativamente per due punti fissi, si tagliano in un unico punto.*

Osserviamo che ogni esagono piano, soddisfacente le ipotesi di uno dei teoremi di Brianchon, può essere completato in modo da formare una delle figure spaziali considerate, segue che quanto ricavato vale per ogni esagono piano. L'ultima dimostrazione analizzata per il teorema di Desargues è quella proposta da Todd, utilizzando i metodi della geometria algebrica.

Nel terzo capitolo abbiamo introdotto le configurazioni:

Definizione 0.0.3 *Una* configurazione astratta *è una tripla* $\{\mathcal{A},\ \mathcal{B},\ \mathcal{R}\}$, *dove* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *sono insiemi non vuoti e* $\mathcal{R} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ *è una relazione tale che la cardinalità dell'insieme*

$$\mathcal{R}(x) = \{B \in \mathcal{B} : (x, B) \in \mathcal{R}\}$$

(allo stesso modo

$$\mathcal{R}(B) = \{x \in \mathcal{A} : (x, B) \in \mathcal{R}\}),$$

non dipende da $x \in \mathcal{A}$ *(rispettivamente* $B \in \mathcal{B}$*). Gli elementi di* $\mathcal{A}$ *si definiscono* punti*, gli elementi di* $\mathcal{B}$ blocchi.

Se

$$a = \#\mathcal{A},\ b = \#\mathcal{B},$$

$$\alpha = \#\mathcal{R}(x),\ \beta = \#\mathcal{R}(B),$$

allora la configurazione è rappresentata dal simbolo (a_α, b_β).

Una configurazione simmetrica *è una configurazione tale che* $\#\mathcal{A} = \#\mathcal{B}$, *quindi* $\alpha = \beta$ *e sarà indicata con* (a_α).

Definizione 0.0.4 *Una configurazione (astratta) si definisce* connessa *se non è uguale alla somma diretta di configurazioni, o equivalentemente:*

$$\forall\, x, y\, \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}\, \exists\, z_1, ..., z_k\, \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}\, \textit{tale che}\, (x\mathcal{R}z_1),\ (z_1\mathcal{R}z_2), ..., (z_n\mathcal{R}y).$$

Considerate $C = \{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{R}\}$ e $D = \{\mathcal{Q}, \mathcal{P}, \mathcal{J}\}$, due configurazioni astratte, una *mappa che conserva la relazione* di C su D è una applicazione, φ, di $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ in $\mathcal{Q} \cup \mathcal{P}$ tale che

$$x\, \mathcal{R}\, B\ \Rightarrow \varphi(x)\, \mathcal{J}\, \varphi(B)\ \ \forall x \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}.$$

Definizione 0.0.5 *L'applicazione φ si definisce un* omomorfismo *se $\varphi(\mathcal{A}) \subseteqq \mathcal{Q}$ e $\varphi(\mathcal{B}) \subseteqq \mathcal{P}$. Un* isomorfismo *se è un omorfismo biiettivo di C su D tale che $\varphi(\mathcal{A}) = \mathcal{Q}$ e $\varphi(\mathcal{B}) = \mathcal{P}$, la cui inversa preserva la relazione, e quindi è ancora un isomorfismo. Un* automorfismo *di una configurazione astratta è, quindi, isomorfismo della configurazione su se stessa.*

Un automorfismo si ottiene se è possibile scambiare i punti della configurazione con altri suoi punti e le rette con altre sue rette, in modo tale che non si perdano incidenze e non se ottengano delle altre. L'insieme degli automorfismi di una configurazione è un gruppo, e se il gruppo è transitivo, cioè se contiene un numero di rappresentazioni che permettano di trasformare un punto qualunque in un altro punto qualunque della configurazione, allora la configurazione si definisce *regolare*. Il concetto di regolarità nasce dal voler rappresentare la configurazione su se stessa.
Un caso speciale di isomorfismo di una configurazione è la *simmetria* di una configurazione.

Definizione 0.0.6 *Si definisce una* simmetria *di una configurazione un isomorfismo biiettivo, ψ, dell'insieme $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ tale che:*

$\forall\, p \in \mathcal{A},\ q \in \mathcal{B},\ \psi(p) \in \mathcal{R}(\psi(q))$ *se e soltanto se* $p \in \mathcal{R}(q)$ *e* $\psi(q) \in \mathcal{R}(\psi(p))$ *se e soltanto se* $q \in \mathcal{R}(p)$.

Le configurazioni più semplici da analizzare sono quelle simmetriche. Daremo l'esempio delle configurazioni simmetriche (a_3), che possono essere realizzate nello spazio proiettivo da a punti ed a piani in posizione generale in $\mathbb{P}^3$.
Per $a \leq 6$ abbiamo un unica configurazione, rispettivamente, per $a = 4, 5, 6$. Tali configurazioni soddisfano la proprietà:

$$\forall\, x, y \in \mathcal{A},\ \text{con } x \neq y \text{ tale che } \#R(x) \cap R(y) > 1.$$

Per questo motivo non possono essere realizzate da punti e rette nello spazio proiettivo.
La configurazione (4_3) è realizzata da quattro facce e quattro vertici di un tetraedro. La (5_3) è realizzata dai 5 punti p_1,...,p_5 in posizione generale e i piani $\langle p_1, p_2, p_5\rangle$, $\langle p_1, p_2, p_3\rangle$, $\langle p_2, p_3, p_4\rangle$, $\langle p_3, p_4, p_5\rangle$, $\langle p_1, p_4, p_5\rangle$. Mentre la (6_3) è realizzata da 6 punti in posizione generale e dai piani $\langle p_1, p_3, p_4\rangle$, $\langle p_1, p_4, p_6\rangle$, $\langle p_1, p_2, p_5\rangle$, $\langle p_2, p_3, p_6\rangle$, $\langle p_2, p_4, p_5\rangle$, $\langle p_3, p_5, p_6\rangle$.

Le prime configurazioni realizzabili tramite punti e rette sono la (7_3) e la (8_3), che analizzeremo come configurazioni piane. Le analizziamo tramite uno schema aritmetico che ci permette di costruirle punto dopo punto.
Considerata una generica configurazione (a_3) facciamo corrispondere agli a punti i numeri da 1 fino a a e alle a rette i numeri da (1) fino (a), determinando così uno schema rettangolare di $a \cdot \alpha$ punti, costituito da a colonne e α righe, dove le colonne corrispondono alle rette della configurazione, nelle quali abbiamo gli α numeri, corrispondenti ai punti giacenti su ciascuna retta. Naturalmente la costruzione di tale schema non è totalmente arbitraria, infatti devono essere soddisfatte le condizioni:

- le cifre scritte in ogni colonna devono essere tutte differenti;
- due colonne non devono avere mai due cifre in comune, altrimenti le rette coinciderebbero;
- ogni cifra deve comparire in tutto tre volte, perchè per ogni punto devono passare tre rette.

Queste tre condizioni non sono sufficienti per la realizzazione di una configurazione. Infatti, oltre a considerazioni geometriche abbiamo bisogno di considerazioni algebriche, che non possono essere espresse tramite uno schema aritmetico.
La configurazione (7_3) è rappresentata dallo schema:

(**1**)	(**2**)	(**3**)	(**4**)	(**5**)	(**6**)	(**7**)
1	1	1	2	2	3	3
2	4	6	4	5	4	5
3	5	7	6	7	7	6

L'esistenza dello schema non implica l'esistenza della configurazione, in quanto, come osservato prima, abbiamo bisogno anche di proprietà algebriche che non possono essere espresse tramite uno schema aritmetico. Ad esempio, lo schema della (7_3) non è realizzabile. Se cerchiamo di determinare le equazioni delle rette, con i metodi della geometria analitica, otteniamo un sistema d'equazioni incompatibili. Possiamo verificare quanto detto anche in modo intuitivo disegnando la configurazione. Tracciando le rette osserviamo che gli ultimi punti non risultano collineari. Tale problema non è dovuto dalla scelta arbitraria dei punti e delle rette, ma dalla mancanza di alcune condizioni iniziali.

Anche per $a = 8$ c'è un unica configurazione retta-punto (8_3), la *configurazione di Möbius-Kantor*. Si ricava dalla configurazione di Hesse $(9_4, 12_3)$, considerando le curve piane di terzo ordine, prive di punti doppi:

$$F(x_0, x_1, x_2) = a_0 + \sum_{i+j+k=3} a_{ijk} x_0^i x_1^j x_2^k = 0 \text{ tale che } \frac{\partial F}{\partial x_0} \cap \frac{\partial F}{\partial x_1} \cap \frac{\partial F}{\partial x_2} = \emptyset.$$

Su tali curve abbiamo nove punti di flesso, dei quali al massimo tre possono essere reali. Si verifica algebricamente che una retta passante per due punti di flesso deve passare anche per il terzo. Le rette passanti per i punti di flesso formano una configurazione costituita da $a = 9$ punti, da $\beta = 3$ incidenze per ogni retta e da $\alpha = 4$ rette per ogni punto. Dalla definizione di configurazione riaviamo la seguente relazione $a \cdot \alpha = b \cdot \beta$, quindi il numero delle rette è dato da $b = a\alpha/\beta$. In questo caso $b = 12$, da cui $(9_4, 12_3)$. Omettendo un punto di flesso e le rette passanti per esso otteniamo lo schema della (8_3), in realtà, ciò avviene omettendo uno qualunque dei nove punti e le quattro rette passanti per esso, essendo i punti della configurazione di Hesse equivalenti. La seguente tabella illustra la configurazione di Möbius-Kantor.

(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**	**(8)**
1	1	1	2	2	3	3	4
2	4	6	3	7	4	5	5
5	8	7	6	8	7	8	6

Per $a = 9$ abbiamo tre configurazioni realizzate da rette e punti, $(9_3)_1$, $(9_3)_2$, $(9_3)_3$. La più importante, è la $(9_3)_1$, la *configurazione di Brianchon-Pascal*, tale configurazione esprime e rappresenta sia il teorema di Brianchon sia il teorema di Pascal. Il teorema di Brianchon afferma che: *Dato un esagono, i cui lati passano alternativamente per due punti, le congiungenti i vertici opposti s'incontrano in un punto.*

Dato l'esagono $ABCDEF$, individuato in modo tale che i lati AB, CD, EF sono incidenti in un punto a, i lati BC, DE, FA in un punto b, e le tre diagonali nel punto c, il *punto di Brianchon*, la configurazione $(9_3)_1$ è così individuata.

Il teorema di Pascal:

Dato un esagono, i cui vertici giacciono alternativamente su due rette, i punti d'intersezione dei lati opposti giacciono su una stessa retta.

Facendo tale costruzione, otteniamo la stessa configurazione del teorema di Brianchon. Riassumendo, la $(9_3)_1$ è allora costituita dai lati e dai vertici di un esagono, dai tre punti d'intersezione dei lati opposti, dalla retta individuata da tali punti, la *retta di Pascal*, e dal punto di intersezione delle diagonali, il *punto di Brianchon*. Intuitivamente possiamo rappresentarla con lo schema seguente:

(**1**)	(**2**)	(**3**)	(**4**)	(**5**)	(**6**)	(**7**)	(**8**)	(**9**)
1	1	1	2	2	3	3	4	5
2	4	6	4	7	6	5	6	7
3	5	7	8	9	8	9	9	8

Disegnando la configurazione partendo da due punti arbitrari nel piano, ad esempio i punti 8 e 9, individuiamo tre rette passanti per essi, nel nostro caso le rette (**4**), (**6**), (**9**) per il punto 8 e le rette (**5**), (**7**), (**8**) per il punto 9. Otteniamo nove punti d'intersezione, ma solo sei di tali punti appartengono alla configurazione, e determinano le rette mancanti, (**1**), (**2**), (**3**). Nonostante la scelta arbitraria dei punti iniziali, 8 e 9, gli ultimi punti della configurazioe risultano automaticamente collineari, 1, 6, 7, giacciono tutti sulla retta (**3**).

Costruendo per gradi la $(9_3)_2$ e la $(9_3)_3$, le ultime incidenze non si verificano automaticamente ma soltanto imponendo alcune condizioni iniziali, e per tale caratteristica non esprimono nessun teorema della geometria, da cui segue la loro scarsa importanza. Per tutti e tre gli schemi della configurazione (9_3) otteniamo la soluzione in campo reale, quindi possiamo costruirle solamente con la riga. Infatti tutti gli elementi delle configurazioni sono determinabili con risoluzioni successive di equazioni lineari. Un'altra proprietà della configurazione $(9_3)_1$ è la *regolarità*, riscontriamo una simmetria intrinseca che definisce la configurazione regolare, infatti ogni punto e ogni retta della configurazione può essere definito, rispettivamente, come punto di Brianchon e retta di Pascal.

In ogni configurazione (a_3) ogni punto è congiunto per mezzo di rette della configurazione, con altri sei punti della stessa, quindi ci saranno due punti non congiunti con esso. Partendo da tale particolarità, definiamo:

Definizione 0.0.7 *Sia, S, l'insieme delle coppie $x, y \in \mathcal{A}$ tali che $\mathcal{R}(x) \cap \mathcal{R}(y) = \emptyset$. Due elementi $x, y \in \mathcal{A}$ si definisono* equivalenti *se $x = y$ o esiste una sequenza di coppie $s_1 = (x, x_1)$, $s_2 = (x_1, x_2)$,..., $s_n = (x_{n-1}, y)$ in S.*

Definizione 0.0.8 *Una configurazione è* regolare *quando tutte le classi d'equivalenza hanno lo stesso numero di elementi.*

Nella $(9_3)_1$ i punti 1, 8 e 9 non sono congiunti tra loro e formano un triangolo di punti non congiunti, allo stesso modo i punti 2, 5, 6, e 3, 4, 7 formano

altri due triangoli. Applicando lo stesso procedimento alla $(9_3)_2$ e alla $(9_3)_3$, ricaviamo nella prima un ennagono, nella seconda un esagono e un triangolo. Allora nella configurazione $(9_3)_1$ abbiamo tre classi di equivalenza, costituite da 3 elementi, è regolare, nella $(9_3)_2$ un'unica classe equivalenza, l'ennagono, è regolare, mentre nella $(9_3)_3$ due classi di 6 e 3 elementi, l'esagono e il triangolo, non è regolare.
La configurazione di Brianchon è isomorfa alla configurazione di Ceva per $n = 3$.

Nel quarto capitolo studiamo la configurazione (10_3). La configurazione (10_3) è la *configurazione di Desargues*, costituita dai vertici e dai lati di due triangoli, dalle congiungenti le coppie di vertici corrispondenti, dall'intersezione di tali congiungenti, dalle intersezioni delle coppie di lati corrispondenti e dalla retta contenente tali intersezioni. Lo schema aritmetico di tale configurazione è:

(**1**)	(**2**)	(**3**)	(**4**)	(**5**)	(**6**)	(**7**)	(**8**)	(**9**)	(**10**)
1	1	1	2	2	7	3	3	4	8
2	7	6	7	6	6	4	5	5	9
3	4	5	8	9	10	8	9	10	10

Seguendo tale schema disegniamo la (10_3). Scelto arbitrariamente un punto del piano, il punto 1, tracciamo tre rette passanti per esso, le rette (**1**), (**2**) e (**3**). Sulla retta (**1**) giacciono i punti 2 e 3 disegniamo le altre due rette mancanti. Otteniamo 8 punti d'intersezione, rispettivamente, quattro sulla retta (**2**) e quattro sulla retta (**3**), di tali punti ne consideriamo due su ognuna delle rette, in modo tale che con i punti 2 e 3, della retta (**1**), otteniamo due triangoli distinti, $\triangle 276$ e $\triangle 345$, con le congiungenti i vertici corrispondenti incidenti nel punto 1, *punto di Desargues*. Abbiamo individuato altre 6 rette, le rette (**4**), (**5**), (**6**), che individuano il primo triangolo, e le rette (**7**), (**8**), (**9**), che individuano il secondo. Tali rette s'intersecano a due a due, rispettivamente, la retta (**6**) e la retta (**9**) determinano il punto 10, le rette (**5**) e (**8**) il punto 9 e la retta (**4**) e la retta (**7**) il punto 8. I punti 8, 9 e 10 risultano collineari, giacciono tutti sulla retta (**10**), *retta di Desargues*, in particolare l'ultima incidenza si verifica automaticamente.

La configurazione di Desargues è regolare, qualsiasi punto e qualsiasi retta può essere definito come punto di Brianchon e retta di Pascal. Applicando la definizione di punti equivalenti si ha che tutti i punti sono equivalenti, infatti da qualsiasi punto non congiunto partiamo, otteniamo, sempre, una sequenza di nove punti non congiunti, con il decimo punto equivalente a un punto della sequenza. Riportiamo la seguente tabella che dimostra l'equivalenza di tutti i punti.

Punti	Punti Equivalenti	Punti	Punti Equivalenti
1	8, 9, 10	**6**	3, 4, 8
2	5, 4, 10	**7**	3, 5, 9
3	6, 7, 10	**8**	1, 5, 6
4	2, 6, 9	**9**	1, 4, 7
5	2, 4, 8	**10**	1, 2, 3

Tabella 1: Regolarità della configurazione di Desargues.

La configurazione spaziale di Desargues è individuata da due triedri, formati dai piani α, β, γ, α', β' e γ', dai piani congiungenti gli spigoli corrispondenti, dalle rette intersezione delle facce corrispondenti, dal piano contenente le rette intersezione dei piani corrispondenti, $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ e $\gamma\gamma'$, il *piano di Desargues*, e dalla retta contenente i punti d'intersezione dei piani $\alpha\beta\gamma$ e $\alpha'\beta'\gamma'$, la *retta di Desargues*.

Sezionando la figura con un piano arbitrario, che non passi per nessuno dei punti P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, otteniamo la configurazione piana di Desargues, essendo le sezioni dei triedri dei triangoli, in particolare, i piani e le rette della figura spaziale le rette e i punti della figura piana.

Abbiamo già osservato che alcune configurazioni possono essere rappresentate come poligoni reciprocamente inscritti e circoscritti, in particolare nelle configurazioni (a_3); infatti su ogni lato dei poligoni abbiamo tre vertici e per ogni vertice passano tre lati.

La configurazione di Desargues può essere rappresentata come una coppia di pentagoni reciprocamente inscritti e circoscritti. Naturalmente i pentagoni devono appartenere alla configurazione, tutti i vertici e i lati del poligono devono essere punti e rette della configurazione e tre vertici consecutivi non devono giacere sulla stessa retta. Ritorniamo alla figura spaziale, ricordando che ai suoi spigoli corrispondono i vertici della figura piana. Due vertici del pentagono piano giacenti sulla stessa retta corrisponderanno nello spazio a due spigoli giacenti nello stesso piano, e perciò incidenti. Affinchè affinchè tre vertici consecutivi non giacciano sulla stessa retta, gli spigoli corrispondenti non devono giacere nello stesso piano e ciò si verifica se e soltanto se i tre spigoli formano un triangolo. Percorrendo le congiungenti i vertici del poligono spaziale in un certo ordine, per esempio P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, otteniamo una poligonale chiusa che nella configurazione piana determina uno dei

pentagoni cercati. Da ogni vertice del pentagono spaziale partono in tutto quattro spigoli, due dei quali li abbiamo utilizzati per la prima poligonale, i rimanenti determinano una nuova poligonale chiusa che corrisponde nella configurazione piana ad un secondo pentagono, inscritto nel primo, e per simmetria anche il primo deve essere inscritto nel secondo.
Ad ogni permutazione dei vertici corrisponde un automorfismo della configurazione e poichè la scomposizione del pentagono spaziale in due poligoni è perfettamente determinata dall'ordine dei vertici della prima poligonale, risulta che esiste una sola possibilità di scomporre la configurazione di Desargues in due pentagoni inscritti l'uno nell'altro.

La configurazione di Desargues non è l'unica configurazione (10_3), anzi abbiamo ancora nove possibilità. Uno degli schemi non è realizzabile nè in campo reale nè in campo complesso, poichè le equazioni contengono una contraddizione. Gli altri otto sono tutti costruibili con la sola riga però l'ultima incidenza non si verifica da sè, quindi non esprimono un teorema geometrico generale, da cui segue la loro scarsa importanza rispetto a quella di Desargues.

La configurazione di Desargues è ottenuta come la sezione piana di un pentagono completo, $P_1P_2P_3P_4P_5$, nello spazio proiettivo. Definiamo i punti e le rette della configurazione nel seguente modo: i dieci punti $G_{\alpha\beta}$ sono le sezioni delle dieci rette $P_\alpha P_\beta$ $(1 \leq \alpha < \beta \leq 5)$ mentre le dieci rette $l_{\alpha\beta\gamma}$ sono le sezioni dei dieci piani $P_\alpha P_\beta P_\gamma$. I tre punti sulla retta $l_{\alpha\beta\gamma}$ sono $G_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\gamma}$, $G_{\beta\gamma}$, e le tre rette passanti per $G_{\alpha\beta}$ sono $l_{\alpha\beta\gamma}$, $l_{\alpha\beta\delta}$, $l_{\alpha\beta\epsilon}$ (dove $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ è una permutazione di 12345). Poniamo la retta $l_{\alpha\beta\gamma} = g_{\delta\epsilon}$. Sia ρ_{12} il birapporto dell'omologia, o elazione, con centro G_{12} e asse g_{12}, che trasforma il triangolo

$G_{13}G_{14}G_{15}$ nel $G_{23}G_{24}G_{25}$, e il suo reciproco $\rho_{21} = 1/\rho_{12}$. I rimanenti 9 si definiscono allo stesso modo e

$$\rho_{\alpha\beta}\rho_{\beta\alpha} = 1. \tag{1}$$

Sia $X_1X_2X_3X_4X_5$ un simplesso nello spazio proiettivo quadridimensionale, U un punto in un qualsiasi iperpiano $x_\alpha = 0$, Λ un iperpiano per U ma non per X_α. Scegliamo U e Λ come

$$(1,1,1,1,1) \text{ e } \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 + \lambda_5 x_5 = 0$$

con

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0,\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5 \neq 0. \tag{2}$$

Gli iperpiani, i piani e le rette-spigoli del simplesso incontrano Λ nei 5 piani π_α, 10 rette $p_{\alpha\beta}$ e 10 punti $P_{\alpha\beta}$ di un pentaedro completo. Considerato un qualsiasi piano, ω, di Λ non passante per il punto U, la proiezione dei punti $P_{\alpha\beta}$ e delle rette $p_{\alpha\beta}$ da U individua i punti $G_{\alpha\beta}$ e le rette $g_{\alpha\beta}$ di una configurazione di Desargues sul piano ω, inversamente ogni configurazione piana di Desargues può essere ottenuta dalla sezione e dalla proiezione da un simplesso.

Considerata la retta p_{45} definita dall'equazione $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = x_4 = x_5 = 0$ e contenente i tre punti

$$P_{23} = (0, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3}, 0, 0)\ ,\ P_{13} = (\frac{1}{\lambda_1}, 0, -\frac{1}{\lambda_3}, 0, 0),$$

$$P_{12} = (\frac{1}{\lambda_1}, -\frac{1}{\lambda_2}, 0, 0, 0) = P_{13} - P_{23}.$$

Il piano $x_1 = x_2$, che unisce p_{12} a U, incontra p_{45} nel punto

$$(1, 1, -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_3}, 0, 0) = \lambda_1 P_{13} + \lambda_2 P_{23}.$$

Quindi $\rho_{12} = \lambda_1/\lambda_2$ e similmente

$$\rho_{\alpha\beta} = -\lambda_\alpha/\lambda_\beta,\ \forall\alpha \neq \beta. \tag{3}$$

La perfetta simmetria di tale relazione mostra che: *Ogni insieme omogeneo non ordinato di 5 numeri soddisfacente l'equazione 2 determina una classe di configurazioni di Desargues proiettivamente equivalenti.*

Definiamo

$$U = \mathbb{P}_3^\vee \setminus \cup_{i=1}^5 P_{e_i},$$

dove P_{e_i} denota il piano nello spazio proiettivo duale, $\mathbb{P}_3^\vee$, parametrizzando il piano π con $e_i \in \pi$, allora si ha:

Teorema 0.0.14 *L'insieme $M_D = U/\mathcal{S}_5$ è uno spazio di moduli per le configurazioni di Desargues.*

Esiste una corrispondenza tra le configurazioni di Desargues e le classi d'equivalenza $U/\mathcal{S}_5$. La costruzione dello spazio dei moduli può essere ottenuta in modo diverso. Ad esempio, scegliamo i 4 punti di un quadrangolo completo come una base proiettiva di $\mathbb{P}^2$, A, A_1, B, B_1. Sia $A_1' = AA_1 \cap B_1C_1$, $B_1' = AB_1 \cap A_1C_1$, $C_1' = AC_1 \cap A_1B_1$. I tre birapporti $\{A, A_1, A_1', A_2\}$, $\{A, B_1, B_1', B_2\}$ e $\{A, C_1, C_1', C_2\}$ determinano una configurazione di Desargues e un insieme aperto V di $\mathbb{P}_3^1$ che rappresenta la configurazione di Desargues. La scelta del quadrangolo completo induce un azione di $\mathcal{S}_5$ su V, cioè $V/\mathcal{S}_5$ è uno spazio di moduli di configurazione di Desargues.

Dall'equazione 1 ricaviamo:

$$\rho_{\beta\gamma}\rho_{\gamma\alpha}\rho_{\alpha\beta} = -1,\ \rho_{\alpha\epsilon} + \rho_{\beta\epsilon} + \rho_{\gamma\epsilon} + \rho_{\delta\epsilon} = 1,$$

dove $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ è una qualsiasi permutazione 12345.

Abbiamo studiato, infine, le simmetrie della configurazione. Se la generale ha come gruppo di simmetria $\mathcal{S}_5$, che agisce permutando i 5 punti, esistono configurazioni con meno simmetrie. In particolare, esiste una configurazione con gruppo di simmetria il gruppo $\mathcal{S}_4$ con la caratteristica di essere definito da collineazioni reali.
Considerate le trasposizioni (12), (34), (23), possiamo realizzarle come collineazioni armoniche di centro e asse, rispettivamente, G_{12} e g_{12}, G_{34}, g_{34} e G_{23} e g_{23}, tali trasposizioni generano l'intero gruppo ottaedrico, $\mathcal{S}_4$, quindi possiamo affermare che $\mathcal{S}_4$ preserva la configurazione (10_3), che definiamo "ottaedrica".

Se si verificano le condizioni $\lambda_1 = \lambda_2$ *e* $\lambda_3 = \lambda_4$ abbiamo in generale, un "4-gruppo di Klein" $\mathcal{D}_2$.
Nel caso speciale

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 \tag{4}$$

il gruppo è $\mathcal{S}_4$.
La configurazione l'ottoedrica, è la sola configurazione di Desargues nella quale la permutazione (1234) occorre come una collineazione proiettiva. Dalla condizione 4 ricaviamo che $\rho_{\alpha\beta} = -1$ per tutti gli α e β minori di 5. Allora i gruppi di collineazioni proiettive $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{D}_4$ e $\mathcal{A}_4$ possono essere considerati solo come sottogruppi di $\mathcal{S}_4$.
Nel piano proiettivo complesso, alcune delle permutazioni che non possono essere realizzate come collineazioni proiettive possono essere realizzate come collineazioni *antiproiettive* (comportando il cambiamento da i a -i). Il primo esempio è la permutazione (1234), che genera il gruppo ciclico $\mathcal{C}_4$, in questo caso abbiamo

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \lambda_3 = \bar{\lambda}_4,$$

queste equazioni sono soddisfatte se poniamo

$$\lambda_1 = \lambda_3 = e^{\theta i},\ \lambda_2 = \lambda_4 = -e^{\theta i},\ \lambda_5 = -4\cos\theta$$

per ogni θ reale, il gruppo ciclico delle collineazioni $\mathcal{C}_4$ è definito solo come sottogruppo del gruppo diedrale $\mathcal{D}_4$, generato dalla collineazione (13) e dalla collineazione antiproiettiva (14)(23).

Nel caso di configurazioni degeneri abbiamo i seguenti gruppi: se abbiamo una sola incidenza extra, il gruppo degli automorfismi è $\mathcal{C}_5 \times \mathcal{D}_3 \cong \mathcal{D}_3$, di ordine 12. Nel caso abbiamo due incidenze, abbiamo come gruppo di simmetria abbiamo $\mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2 \cong \mathcal{D}_2$, di ordine 4.

Se le incidenze sono tre, il gruppo $\mathcal{D}_3$ di ordine 6 (ottenuto permutando 1, 2, 3).

Analizzando la configurazione tramite i gruppi ciclici ricaviamo che: se i λ non soddisfano l'equazione 2, i venti birapporti sono tutti distinti, e il gruppo collineazione della configurazione è $\mathcal{C}_1$.

Imponendo come unica condizione $\lambda_1 = \lambda_2$, i venti rapporti trasversali restano protetti dalla trasposizione (12) e questo implica $\rho_{12} = -1$. La collineazione genera un gruppo di collineazione $\mathcal{C}_2$, allo stesso modo, la sola condizione $\lambda_3 = \lambda_4$ determina il gruppo $\mathcal{C}_2$, generato dalla collineazione (34).

Bibliografia

[1] P. Dembowski, *Finite Geometries*, Ergeb. Math., Springer-Verlag, Berlino, 1968.

[2] H. S. M. Coxeter, Harold Scott Macdonald, *Projective Geometry*, Toronto, 1973.

[3] H. S. M. Coxeter, *Desargues configuration and their collineation groups*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 78 (1975), 227-246.

[4] David Hilbert, Stefan Cohn-Vossen, *Geometria Intuitiva*, Bollati Boringhieri, 1991.

[5] J. W. P. Hirschfeld, *Projective Geometries over Finite Fields*, Oxford Science Publ., Clarendon Press, Oxford, 1998.

[6] Oswald Veblen, John Wesley Young, *Projective Geometry*, Blaisdell Publishing Company, 1938.

[7] B. I. Argunov, L. A. Skornyakov *Configuration Theorems*, The University of Chicago, 1963.

[8] R. J. Mihalek, *Projective geometry and algebraic structures.*

[9] Robin Hartshorne, *Foundations of projective geometry.*

[10] Edoardo Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, Torino, 1989.

[11] J. A. Todd, *Projective and Analytical Geometry*, London, 1947.

[12] H. Lange, D. Avritzer, *Curves of genus 2 and Desargues configurations.*