



FACOLTA' DI SCIENZE MM.FF.NN.

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

di

Rosanna Pellillo

## Quasicristalli sulla retta

### Sintesi

IL RELATORE

Prof. Andrea Bruno

ANNO ACCADEMICO 2007 - 2008

MAGGIO 2009

AMS Classification: 11R06, 52C23

Key words: Quasicrystals, aperiodic tilings, Pisot numbers

# Indice

Sintesi	3
Bibliografia	20

# Sintesi

Nel XIX secolo lo studio dei cristalli ha condotto all' enumerazione di tutti i possibili gruppi discreti di simmetria dello spazio euclideo. La loro classificazione è resa possibile dal teorema di restrizione cristallografica che stabilisce che nello spazio tridimensionale i gruppi discreti di simmetria possono contenere soltanto rotazioni di ordine 2,3,4 e 6. Il motivo per cui i cristallografi si sono interessati alle simmetrie discrete di  $\mathbb{R}^n$  è che nei metalli gli atomi si dispongono su reticoli simmetrici, con una tale precisione che, per riconoscere la natura fisica di un metallo, fin dall'800 era uso studiarne le simmetrie tramite fenomeni fisici indotti, quali quello della diffrazione. Per tale motivo, quando nel 1984 Dany Shechtman scoprì una lega di alluminio e manganese che presentava le simmetrie del gruppo icosaedrico, dunque con rotazioni di ordine 5, la comunità scientifica rimase sorpresa. Venne coniato così il termine *quasicristallo* per indicare questi materiali che mostravano una struttura interna necessariamente non periodica, ma che 'somigliava tanto' alla struttura interna dei cristalli. Infatti, dal punto di vista fisico, anche i quasicristalli vengono studiati con il fenomeno della diffrazione e, dal punto di vista matematico, vengono caratterizzati dalla condizione di diffrazione. Vediamo in dettaglio come si procede: la diffrazione a raggi X è fenomeno fisico che studia come un'onda si diffrange dopo che ha incontrato un ostacolo. Si calcola la funzione densità, che descrive la natura della diffrazione dell'onda, associata al quasicristallo in esame, e se ne calcola la trasformata di Fourier. In seguito si calcola la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione della densità, che essendo una misura positiva, può essere decomposta nella somma di

due componenti, una discreta e una continua. L'obiettivo è capire quando la parte discreta è infinita. Questa condizione, detta di diffrazione, è quella che caratterizza un quasicristallo. Un metodo molto potente attraverso cui si possono costruire quasicristalli è il metodo 'sega e proietta': l'idea è di tagliare lo spazio di dimensione  $n$  attraverso un cilindro così da ottenere un insieme compatto con interno non vuoto, e proiettare in uno spazio di dimensione  $k < n$  solo quei punti che cadono in questo cilindro. Gli insiemi che si ottengono attraverso questo metodo sono tutti insiemi di Delone e vengono chiamati insiemi modello. Questi ultimi appartengono ad una speciale classe di insiemi, detti di Meyer, introdotti dal matematico Yves Meyer all'interno dell'analisi armonica. Gli insiemi di Meyer, pertanto, sono i candidati ideali ad essere dei quasicristalli: infatti in una dimensione si dimostra proprio che tutti gli insiemi di Delone sono dei quasicristalli e poiché gli insiemi di Meyer per definizione sono insiemi di Delone, nel caso unidimensionale si ha che essi sono dei quasicristalli. Molti studiosi hanno quindi lavorato in questa direzione e si sono trovate importanti relazioni tra gli insiemi di Meyer e una classe di particolari numeri algebrici, detti di Pisot, che stabiliscono condizioni sufficienti affinché un insieme di punti, sia contenuto in uno schema sega e proietta. Un importante esempio di quasicristallo unidimensionale è il quasicristallo di Fibonacci, costruito attraverso il numero aureo  $\tau$  che è un numero di Pisot: ecco quindi l'importante relazione che c'è tra i numeri di Pisot e i quasicristalli.

Ad oggi ancora non si è riusciti a classificare tutti i quasicristalli sulla retta: l'obiettivo quindi dei matematici è proprio riuscire a fare ciò. Al festival della matematica del 2008 lo studioso Freeman Dyson ha avanzato l'ipotesi che forse, riuscendo a classificare i quasicristalli unidimensionali, si potrebbe risolvere l'ipotesi di Riemann. Infatti esiste un'analogia di comportamento tra i quasicristalli unidimensionali e gli zeri della funzione zeta di Riemann, che si trovano tutti su una retta e non se ne capisce il perché. Supponiamo, quindi, di aver classificato tutti i quasicristalli sulla retta e di trovarne uno che corrisponda alla funzione zeta di Riemann. Supponiamo, poi, che

tale quasicristallo abbia delle proprietà che lo identificano con gli zeri della funzione zeta di Riemann. A questo punto avremmo dimostrato l'ipotesi di Riemann!

Dopo questo quadro storico, vediamo in dettaglio come è strutturata la nostra tesi:

Nel Primo Capitolo abbiamo richiamato definizioni e teoremi che ci sono serviti per lo sviluppo del nostro lavoro. Siamo partiti dalla definizione formale di tassellazione.

*Sia  $E^2$  il piano euclideo. Una **tassellazione piana**  $\mathcal{T}$  è una famiglia numerabile di insiemi chiusi*

$$\mathcal{T} = T_1, T_2, \dots$$

*tale che:*

1.  $\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i = E^2$
2.  $\overset{\circ}{T}_i \cap \overset{\circ}{T}_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
3. Ogni  $T_i$  è un disco topologico ed è detto **tassello** di  $\mathcal{T}$

Abbiamo poi proseguito con la definizione di insieme di Delone:

*Un insieme di punti  $\Lambda \subset E^n$  è **un insieme di Delone** (o anche insieme  $(r, R)$ ) se è discreto e relativamente denso.*

e dimostrato il teorema di restrizione cristallografica:

*Sia  $G$  un sottogruppo discreto delle  $\text{Isom}(E^2)$  con sottogruppo delle traslazioni  $T \cong Z^2$  e sia  $\phi \in G$  una simmetria lineare, allora  $\text{ord}(\phi)$  è 1, 2, 3, 4 o 6.*

Abbiamo, poi, dimostrato i Teoremi di Perron-Frobenius

1. Primo Teorema di Perron-Frobenius:

Sia  $A$  una matrice nonnegativa indecomponibile di ordine 2. Per quanto detto prima sarà del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

con  $b, c \neq 0$ .

Allora si ha:

- (a) Esiste almeno un autovalore reale positivo  $\lambda^*$  che è radice semplice del polinomio caratteristico e coincide con il raggio spettrale di  $A$
- (b) Indicando con  $R_1$  e  $R_2$  la somma degli elementi della prima e della seconda riga, risulta:

$$\min \{R_1, R_2\} \leq \lambda_* \leq \max \{R_1, R_2\}.$$

- (c) Indicando con  $C_1$  e  $C_2$  la somma degli elementi della prima e della seconda colonna, risulta:

$$\min \{C_1, C_2\} \leq \lambda_* \leq \max \{C_1, C_2\}.$$

- (d) Il raggio spettrale  $\lambda^*$  è maggiore di ogni elemento sulla diagonale principale, ovvero  $\lambda^* > \max \{a, d\}$
- (e) All' autovalore  $\lambda^*$  possiamo associare un autovettore  $x^*$  a componenti strettamente positive
- (f) Sia  $\mu$  un numero reale, allora la matrice  $(\mu I - A)^{-1}$  è positiva se e solo se  $\mu > \lambda^*$

2. Secondo Teorema di Perron-Frobenius

Sia  $A$  una matrice nonnegativa decomponibile di ordine 2. Sarà del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Allora si ha:

- (a) Esiste almeno un autovalore reale positivo  $\lambda^*$  che è radice semplice o doppia del polinomio caratteristico e coincide con il raggio spettrale di  $A$
- (b) Indicando con  $R_1$  e  $R_2$  la somma degli elementi della prima e della seconda riga, risulta:

$$\min \{R_1, R_2\} \leq \lambda_* \leq \max \{R_1, R_2\}.$$

- (c) Indicando con  $C_1$  e  $C_2$  la somma degli elementi della prima e della seconda colonna, risulta:

$$\min \{C_1, C_2\} \leq \lambda_* \leq \max \{C_1, C_2\}.$$

- (d) Il raggio spettrale  $\lambda^*$  è maggiore di ogni elemento sulla diagonale principale, ovvero  $\lambda^* > \max \{a, d\}$
- (e) All' autovalore  $\lambda^*$  possiamo associare un autovettore  $x^*$  a componenti strettamente positive o nonnegative
- (f) Sia  $\mu$  un numero reale, allora la matrice  $(\mu I - A)^{-1}$  è semipositiva se e solo se  $\mu > \lambda^*$

Abbiamo, infine, concluso questo capitolo, rammentando qualche nozione sui gruppi topologici e sulla teoria di Galois ed enunciando il teorema di decomposizione di Lebesgue

*Sia  $\mu$  una misura positiva su  $X$ . Tutte le misure complesse  $\nu$  su  $X$  si scrivono in maniera unica come  $\nu = \nu' + \nu''$  dove  $\nu'$  è di base  $\mu$  e  $\nu''$  è straniera a  $\mu$ ; se  $\nu \geq 0$ ,  $\nu', \nu''$  sono positive e  $\nu' = \sup_n (\inf(\nu, n\mu))$ .*

Lo scopo principale del Secondo Capitolo è stato capire il fenomeno della diffrazione attraverso il modello di Fraunhofer che è modellato dalla teoria di Fourier. A tal proposito abbiamo ricordato la definizione di trasformata di Fourier

*La **trasformata di Fourier** di una funzione  $f$  di  $n$  variabili è la funzione  $\hat{f}$  definita da*

$$\hat{f}(\vec{s}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) \exp(-2\pi i \vec{x} \cdot \vec{s}) d\vec{x}$$

e di trasformazione di Fourier

*La **trasformazione di Fourier** è un operatore su uno spazio lineare di funzioni  $S$ , definito da  $\mathcal{F}$ , che associa alla funzione  $f$  la sua trasformata di Fourier  $\hat{f}$ . Cioè:*

$$\mathcal{F}f = \hat{f}$$

La diffrazione di Fraunhofer è un modello in cui si suppone che le distanze dalla luce sorgente all'ostacolo, detto maschera di diffrazione, e dalla maschera di diffrazione allo schermo di diffrazione siano sufficientemente grandi, in modo tale da poter fare due considerazioni:

1. Le onde luce dal punto sorgente arrivano, a tutti i punti della maschera, mediante rette parallele
2. Le rette parallele di luce diffratta, che formano lo stesso angolo con la maschera, si incontrano nello stesso punto sullo schermo di diffrazione. (Vedi figura 1)

In questo modello di diffrazione, oltre alla funzione di densità  $\rho(\vec{s})$ , associamo alle onde altre due funzioni:

- $J(\vec{s})$ ,  $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$ , che indica l'intensità dell'onda che si muove con direzione data dal vettore  $\vec{s}$ .

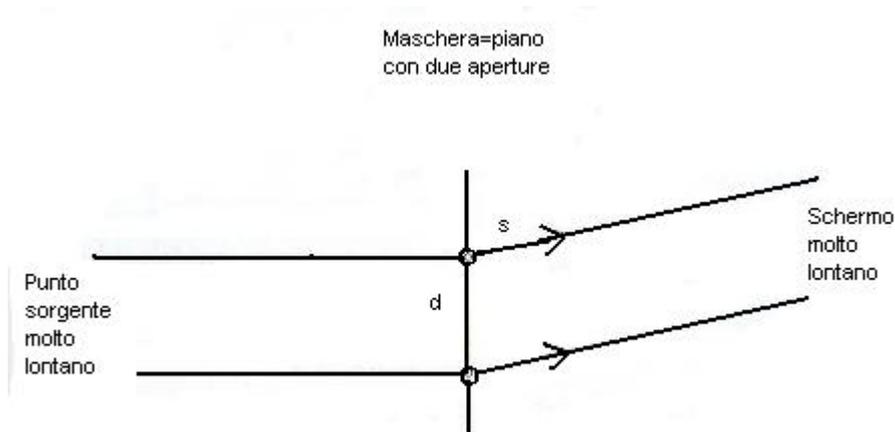


Figura 1: La diffrazione di Fraunhofer a due fenditure

- $A(\vec{s})$  che indica l'ampiezza dell'onda.

Abbiamo poi considerato tre casi: la diffrazione ad una, a due e a  $N$  fenditure, dove per fenditura intendiamo i punti di apertura della maschera di diffrazione, attraverso cui l'onda si diffrange. Lo studio di questi tre casi ci ha portato a comprendere come sono fatte le funzioni  $J(\vec{s})$  e  $A(\vec{s})$ , che sono della forma:

$$A(\vec{s}) = A_0(\vec{s}) \left( 1 + \sum_{j=1}^N \exp(2\pi i \vec{d}_j \cdot \vec{s}) \right)$$

e

$$J(\vec{s}) = N + 1 + 2 \sum_{j=1}^N \sum_{k < j} \cos \left( 2\pi (\vec{d}_j - \vec{d}_k) \cdot \vec{s} \right)$$

Queste funzioni sono legate alla funzione di densità  $\rho(\vec{x})$  e all'autocorrelazione  $\gamma(\vec{x})$ , che è il prodotto di convoluzione tra  $\rho(\vec{x})$  e  $\overline{\rho(-\vec{x})}$ , attraverso il seguente diagramma di Wiener:

$$\begin{array}{ccc}
 \rho(\vec{x}) & \rightarrow & \gamma(\vec{x}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A(\vec{s}) = \hat{\rho}(\vec{s}) & \rightarrow & J(\vec{s}) = \hat{\gamma}(\vec{s})
 \end{array} \tag{1}$$

Poiché però la  $J(\vec{s})$  osservata non contiene tutte le informazioni necessarie per determinare la funzione di densità, lo scopo finale del capitolo è stato, pertanto, trovare in modo esplicito tale funzione. Siamo partiti del fatto che essa è la trasformata di Fourier inversa di  $A(\vec{s})$  e siamo giunti a dimostrare che la  $\rho(\vec{s})$  è una funzione Delta di Dirac. Infine considerando un insieme di Delone  $\Lambda$  e associandogli la funzione densità  $\rho_\Lambda(\vec{x}) = \sum_{d_k \in \Lambda} \delta(\vec{x} - \vec{d}_k)$ , la cui trasformata di Fourier è  $\hat{\rho}_\Lambda(\vec{s}) = \sum_{d_k \in \Lambda} \exp(-2\pi i \vec{d}_k \cdot \vec{s})$ , ci siamo chiesti come fosse il suo modello di diffrazione. A tal scopo abbiamo considerato la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione,  $\hat{\gamma}(\vec{s})$ , detta spettro di  $\Lambda$  e definita come segue:

$$\hat{\gamma}(\vec{s}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(2T)^n} \left| \sum_{d_k \in \Lambda_T} \exp(-2\pi i \vec{d}_k \cdot \vec{s}) \right|^2.$$

Questa funzione è una misura positiva e come tale può essere suddivisa in due componenti, una discreta e una continua. Ciò ci ha permesso così di enunciare l'importante condizione di diffrazione che caratterizza i quasi-cristalli:

$\Lambda$  è un **quasicristallo** se il suo spettro ha una componente discreta infinita.

Nel Terzo Capitolo abbiamo definito il metodo 'sega e proietta', come segue:

Uno **schema 'sega e proietta'** consiste di un reticolo,  $\mathcal{L}$ , in  $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  e di due proiezioni  $\pi_1 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\pi_2 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ , tali che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1.  $\pi_1$  ristretta a  $\mathcal{L}$  è un' iniezione
2.  $\pi_2(\mathcal{L})$  è denso in  $\mathbb{R}^m$ .

Lo schema rappresentativo è il seguente:

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{L} & \\
 \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\pi_2 \circ \pi_1^{-1}} & \mathbb{R}^m
 \end{array} \tag{2}$$

Tale metodo ci è stato utile per costruire insiemi di Delone e definire gli insiemi modelli

Un sottoinsieme  $L$  di uno spazio reale  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 0$ , è un **insieme modello** se esiste uno schema ‘sega e proietta’  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L})$  e un insieme relativamente compatto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$  con interno non vuoto tale che  $L = \{\pi_1(x) | x \in \mathcal{L}, \pi_2(x) \in \Omega\}$ .

Infine abbiamo ricordato le definizioni di  $\epsilon$ -duale, insieme  $\epsilon$ -armonioso e di insieme armonioso:

Dato un insieme di Delone  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ , per ogni  $\epsilon > 0$  il suo  **$\epsilon$ -duale**  $\Lambda^\epsilon$  è dato da  $\Lambda^\epsilon := \{\vec{\mu} \in \mathbb{R}^n : |\exp(2\pi i \langle \vec{\mu}, \vec{x} \rangle) - 1| \leq \epsilon\}$ , per tutti gli  $\vec{x} \in \Lambda$ , dove  $\langle \vec{\mu}, \vec{x} \rangle := \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$ .

Un insieme discreto  $\Lambda$  è  **$\epsilon$ -armonioso** se il suo  $\epsilon$ -duale  $\Lambda^\epsilon$  è relativamente denso.

Un insieme discreto  $\Lambda$  è **armonioso** se  $\Lambda$  è  $\epsilon$ -armonioso per tutti gli  $\epsilon > 0$ .

ed abbiamo concluso con la definizione di numero di Pisot

Sia  $\mu_1$  un intero algebrico reale di grado  $k$  e siano  $\mu_2, \dots, \mu_k$  i suoi coniugati algebrici.

Diciamo che  $\mu_1$  è un **numero di Pisot-Vijayaraghavan (PV)** se  $\mu_1 >$

1 e  $|\mu_j| < 1, j = 2, \dots, k,$

discutendo di alcune sue proprietà ed osservando che il numero aureo è un numero di Pisot.

Nel Quarto Capitolo abbiamo definito gli insiemi di Meyer

*Un sottoinsieme  $L \subset \mathbb{R}^n$  è un **insieme di Meyer** se è armonioso e di Delone.*

e riportato le loro proprietà, in particolare, abbiamo dimostrato il teorema di caratterizzazione di tali insiemi

*Sia  $L$  un sottoinsieme relativamente denso di  $\mathbb{R}^n$ . Allora  $L$  è un insieme di Meyer se e soltanto se una (e quindi tutte) le seguenti condizioni sono soddisfatte:*

- [(i)]  $L$  è un sottoinsieme di un insieme modello.
- [(ii)]  $L$  è armonioso.
- [(iii)]  $L^\epsilon$  è relativamente denso per tutti gli  $\epsilon > 0$ .
- (iv)  $L^\epsilon$  è relativamente denso per qualche  $\epsilon \in (0, 1/2)$ .
- (v)  $L$  è quasi reticolo.
- (vi)  $L - L$  è uniformemente discreto.
- (vii)  $[L]$  è finitamente generato e  $L$  ha la proprietà di approssimazione lineare.

e dimostrato il teorema che stabilisce una relazione tra gli insiemi di Meyer e i numeri di Pisot

Sia  $X$  un insieme di Delone in  $\mathbb{R}^n$  tale che  $\eta X \subseteq X$  per un numero reale  $\eta > 1$ .

- (i) Se  $X$  è finitamente generato, allora  $\eta$  è un intero algebrico. Inoltre se  $X$  ha rango  $s$ , allora il grado di  $\eta$  divide  $s$ .
- (ii) Se  $X$  è un insieme di Delone di tipo finito, allora  $\eta$  un numero di Perron o di Lind.
- (iii) Se  $X$  è un insieme di Meyer allora  $\eta$  è un numero di Pisot o di Salem.

Infine, nel Quinto Capitolo abbiamo prima parlato delle regole di sostituzione definendole come segue:

Una matrice  $n \times n$   $\mathcal{A}$  è **primitiva** se le sue entrate sono interi non negativi e se esiste un intero positivo  $k$  tale che tutte le entrate di  $\mathcal{A}^k$  sono positive.

Possiamo pensare quindi ad  $\mathcal{A}$  come alla matrice di una regola che ci dice come sostituire gli  $n$  simboli  $\{A_1, \dots, A_n\}$  con stringhe finite degli stessi simboli; richiedere che la matrice sia primitiva ci assicura che ogni simbolo apparirà dopo  $k + 1$  generazioni. Pertanto:

Una **regola di sostituzione** è una mappa lineare che può essere rappresentata da una matrice primitiva.

Abbiamo discusso quali di queste regole producono quasicristalli unidimensionali e quali no, concludendo il primo paragrafo con lo stabilire una condizione sufficiente affinché gli atomi di un quasicristallo siano contenuti in un insieme sega e proietta. A tale scopo abbiamo fornito un esempio:

Assumiamo che l'equazione caratteristica di una certa regola di sostituzione abbia una radice di valore assoluto più grande di 1 e che i suoi

coniugati abbiano valore assoluto minore di 1. Consideriamo sempre il caso in cui tale equazione abbia grado 3. Abbiamo

$$x_k = \alpha u(k) + \beta v(k) + \gamma w(k).$$

Se questi punti sono contenuti nella proiezione sulla retta  $E$  di  $\mathbb{Z}^3 \cap S$ , con  $S = I \times E$  dove  $I$  è un quadrato avente il lato che misura  $2k$ , allora si deve avere che:

1.  $-k \leq \alpha' u(k) + \beta' v(k) + \gamma' w(k) < k$
2.  $-k \leq \alpha'' u(k) + \beta'' v(k) + \gamma'' w(k) < k$

dove

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}$$

è la matrice della trasformazione lineare di  $\mathbb{R}^3$  che porta  $E$  sull'asse della prima coordinata e  $I$  sullo spazio ortogonale all'asse della prima coordinata. Questo impone sei condizioni sulle nove entrate della matrice.

Poiché  $u(k), v(k), w(k)$  soddisfano la stessa relazione di ricorrenza lineare, come le radici dell'equazione  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , abbiamo:

$$\begin{pmatrix} u(c_n) = \rho_1 \theta_1^n + \rho_2 \theta_2^n + \rho_3 \theta_3^n \\ v(c_n) = \sigma_1 \theta_1^n + \sigma_2 \theta_2^n + \sigma_3 \theta_3^n \\ w(c_n) = \tau_1 \theta_1^n + \tau_2 \theta_2^n + \tau_3 \theta_3^n \end{pmatrix}.$$

Possiamo calcolare esplicitamente i  $\rho_i, \sigma_i, \tau_i$  dalla relazione di ricorrenza e dalle condizioni iniziali. Poiché  $|\theta_1| > 1$  e le altre due radici sono in valore assoluto minori di 1, le disuguaglianze sopra esposte richiedono

$$(3) \quad \alpha' \rho_1 + \beta' \sigma_1 + \gamma' \tau_1 = 0$$

$$(4) \quad \alpha'' \rho_1 + \beta'' \sigma_1 + \gamma'' \tau_1 = 0.$$

Abbiamo quindi due condizioni in più sulla matrice della trasformazione. Le condizioni (3) e (4) vengono imposte considerando il caso in cui  $k = c_n$ .

Per il caso generale, sia  $L(k)$  la lunghezza di  $\alpha' u(k) + \beta' v(k) + \gamma' w(k)$ , allora la (3) implica che  $L(c_n)$  sia limitata da  $\delta |\theta_2|^n$  per una qualche costante  $\delta$ . La relazione di ricorrenza per  $u(k)$ , con  $c_n < k \leq c_{n+1}$ , implica che

$$L(k) \leq (2 + |\theta_2|^{-2}) \delta |\theta_2^n| + L(k')$$

per un qualche  $k' \leq c_n$ . (La quantità in parentesi è specifica per il caso dell'equazione  $x^3 = 2x^2 + x - 1$ . Per le altre cubiche si trovano espressioni simili.)

La serie geometrica risultante che limita  $L(k)$  converge poiché  $|\theta_2| < 1$ . Un simile argomento si fa per la lunghezza dell'espressione in (2). Quindi se si verificano (3) e (4) allora si verificheranno anche (1) e (2) per un  $k$  che limita la somma della serie geometrica.

In quest'ultimo risultato abbiamo osservato che la condizione riguarda l'autovalore dominante della matrice  $\mathcal{A}$ , stabilendo che deve essere un numero di Pisot.

Abbiamo concluso il capitolo, e quindi la nostra tesi, col dimostrare attraverso vari metodi che utilizzando il numero  $\tau$  possiamo definire un insieme di punti sulla retta che è un quasicristallo unidimensionale, detto quasicristallo di Fibonacci. Mostriamo di seguito uno di questi metodi, premettendo due definizioni:

*Un **Pettine di Dirac** è una somma del tipo*

$$\sum_{d_k \in \Gamma} c(k) \delta(\vec{x} - \vec{d}_k),$$

*dove  $\Gamma$  è l'insieme in cui sono localizzate le funzioni Delta,  $c(k)$  sono numeri complessi e la somma converge.*

Diciamo che  $\rho$  e  $\hat{\rho}$  sono **pettini di Poisson** se entrambe sono pettini di Dirac. Infatti in tale caso si ha che  $\hat{\gamma}(s) \equiv 0$  e  $\mathcal{F}\left(\sum_{d_k \in \Lambda} \delta(\vec{x} - \vec{d}_k)\right) = \sum_{\vec{s}^* \in S} c(\vec{s}^*) \delta(\vec{s} - \vec{s}^*)$ .

Definiamo, adesso, una tassellazione di  $\mathbb{R}$  attraverso la successione di punti

$$x_n = n + (\tau - 1) \left[ \frac{n}{\tau} \right]$$

dove  $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$  è il numero aureo e  $[\cdot]$  denota la funzione *l'intero più grande*.

Abbiamo che:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= (n+1) + (\tau - 1) \left[ \frac{n+1}{\tau} \right] - \left( n + (\tau - 1) \left[ \frac{n}{\tau} \right] \right) = \\ &= 1 + (\tau - 1) \left( \left[ \frac{n+1}{\tau} \right] - \left[ \frac{n}{\tau} \right] \right) = 1 \text{ oppure } \tau \end{aligned}$$

poiché  $\left[ \frac{n+1}{\tau} \right] - \left[ \frac{n}{\tau} \right]$  vale 0 oppure 1.

Quindi la successione  $x_n$  definisce una tassellazione di  $\mathbb{R}$ , usando tasselli di dimensione 1 e  $\tau$ . (Figura 2)



Figura 2: Una porzione della successione di Fibonacci

Dotiamo ogni  $x_n$  di una massa uguale ad 1 ed associamo una densità del tipo:

$$\rho(z) = \sum_n \delta(z - x_n) \tag{3}$$

la cui trasformata di Fourier è:

$$\hat{\rho}(\xi) = \sum_n e^{2\pi i \xi x_n}$$

Riscriviamo  $x_n$  e  $\hat{\rho}(\xi)$  nei modi seguenti:

- $x_n = pn - (\tau - 1) \{n/\tau\}$  (con  $p = 2 \cdot 1/\tau$  e  $\{y\}$  è la parte frazionaria di  $y$ )
- $\hat{\rho}(\xi) = \sum_{x \in X} e^{2\pi i x \xi}$

Poiché la tassellazione deve essere omogenea, richiediamo, inoltre, che:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i x_k \xi} \quad (4)$$

Procediamo con il nostro calcolo andando a mostrare che la densità 3 è un quasicristallo.

Sia quindi

$$e^{2\pi i x_n \xi} = e^{2\pi i \xi pn} e^{2\pi i \xi (1-\tau) \{n/\tau\}},$$

poiché la funzione  $f_\xi(u) = e^{2\pi i (1-\tau) \xi u}$  è periodica in  $u$  di periodo 1, otteniamo che la sua espansione di Fourier è la seguente:

$$f_\xi(u) = \sum_m c_m(\xi) e^{2\pi i m u},$$

dove  $c_m(\xi)$  è l' $m$ -th coefficiente di Fourier.

Pertanto

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(\xi) &= \sum_n e^{2\pi i \xi x_n} = \sum_n e^{2\pi i \xi p n} \left( \sum_m c_m(\xi) e^{2\pi i m(n/\tau)} \right) \\ &= \sum_m c_m(\xi) \sum_n e^{2\pi i n(p\xi + m/\tau)}.\end{aligned}$$

Adesso usando la formula della somma di Poisson ( $\sum_n \delta(z-n) = \sum_n e^{2\pi i z n}$ ), otteniamo che:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(\xi) &= \sum_m c_m(\xi) \sum_n \delta(p\xi + m/\tau - n) \\ &= \sum_m \sum_n c_m((n - m/\tau)/p) \delta(p\xi + m/\tau - n),\end{aligned}$$

che ha delle funzioni delta nei punti  $((n - m/\tau)/p)$  con masse  $c_m((n - m/\tau)/p)$ .

Questo mostra che la tassellazione di Fibonacci è un quasicristallo perché  $\rho$  e  $\hat{\rho}$  sono Pettini di Poisson, che, per il diagramma di Wiener, sono sempre quasicristalli

Questo risultato può essere generalizzato come segue:

Sia  $\Lambda$  l'insieme dei punti sulla retta reale definito da:

$$x_n = \alpha n + g(n), n \in Z, \quad (5)$$

con  $\alpha$  numero reale fissato e  $g(x)$  funzione periodica di periodo  $\omega$ , numero irrazionale e assumiamo che  $\alpha$  e  $g$  siano tali che  $\Lambda$  sia un insieme di Delone. Ponendo  $\rho(x) = \sum_{n \in Z} \delta(x - x_n)$ , si ha che  $\hat{\rho}(s) = \sum_{n \in Z} \exp(-2\pi i(\alpha n + g(n))s)$ . Ora poiché  $\exp(-2\pi i g(x)s)$  è anch'essa periodica in  $x$  con periodo  $\omega$ , possiamo espanderla in una serie di Fourier:  $\exp(-2\pi i g(x)s) = \sum_{m \in Z} c_m(s) \exp(2\pi i \frac{m x}{\omega})$ , dove  $c_m(s)$  è l' $m$ -esimo coefficiente di Fourier. Quindi  $\hat{\rho}(s) = \sum_{m \in Z} \sum_{n \in Z} c_m(s) \delta(\alpha s - \frac{m}{\omega} - n)$ . Poiché  $\delta(\alpha s - \frac{m}{\omega} - n) = \delta(s - (\frac{m}{\omega} + n)/\alpha)$  abbiamo che

$$\hat{\rho}(s) = \sum_{m \in Z} \sum_{n \in Z} c_m((\frac{m}{\omega} + n)/\alpha) \delta(s - (\frac{m}{\omega} + n)/\alpha). \quad (6)$$

Pertanto la 6 è una somma pesata di funzioni delta e possiamo concludere che l'insieme di Delone  $\Lambda$  definito da 5 è un Pettine di Poisson e quindi un quasicristallo. Pertanto

**Proposizione 0.0.1** *Gli insiemi di Delone unidimensionali sono sempre quasicristalli.*

E con questa importante conclusione abbiamo terminato la nostra tesi.

# Bibliografia

- [1] Bombieri E. and Taylor J., Quasicrystals, tilings and algebraic number theory:some preliminary connections, *Contemporary Mathematics*, **64**, p.241-64, 1987
- [2] Bourbaki N., *General topology*, Elements of Mathematics, Addison Wesley, New York, 1966
- [3] Cassels J.W.S., *An introduction to Diophantine approximation*, Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics, **45**, Cambridge University Press, 1957
- [4] Dieudonné J., *Elements d'analyse*, volume 2, Gauthier-Villars, 1969
- [5] Grünbaum B. and Shephard G.C., *Tiling and Patterns*, W.H. Freeman and Company, New York,
- [6] Hof A., On diffraction by aperiodic structures, *Communications in Mathematical Physics*, [**3,4**], 1993
- [7] Lagarias J.C., Meyer's concept of quasicrystals and quasiregular sets, *Communications in Mathematical Physics*, **179**, p.365-376, Springer-Verlag, 1996
- [8] Lagarias J.C., Geometric models for quasicrystals I.Delone sets of finite type, *Discrete and Computational geometry*, **21**, p.161-199, Springer-Verlag, 1999

- [9] Masàkova Z., Patera J. and Zich J., Classification of Voronoï and Delone tiles in quasicrystals: I. General method, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**, p. 1869-1894, 2003
- [10] McCarty G., *Topology: an introduction with application to topological group*, Dover Publications INC, New York, 1988
- [11] Meyer Y., Nombres de Pisot, Nombres de Salem et Analyse Harmonique, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, 1969
- [12] Moody R.V., Meyer set and their duals in *The Mathematics of Long-range aperiodic order*, NATO-ASI **Serie C 489**, Kluwer, Dordrecht, p.239-268, 1997
- [13] Moody R.V., *Long-range order and diffraction*, Proceedings of a Conference on Groups and Lie Algebras, Ed. Ken-Ichi Shinoda, Sophia Kokyuroku in Mathematics, **46**, 2006
- [14] Moody R.V., *Mathematical quasicrystals: a tale of two topologies*, XIV International Congress on Mathematical Physics, **68-77**, World. Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005
- [15] Pisot C., Repartition (mod1) des puissances successives des nombres reels, *Commentarii Mathematici Helvetici*, **19**, p.153-160, 1946
- [16] Senechal M., *Quasicrystal and Geometry*, Cambridge University Press, 1995
- [17] Schwartz L., *Theorie des distributions*, Hermann, 1966