UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE

FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Tesi di Laurea in Matematica

presentata da

Angela Pesce

Sintesi

Applicazioni della Teoria dei Codici alle Superfici Algebriche

Relatore

Prof. Angelo Felice Lopez

ANNO ACCADEMICO 2002 - 2003

Luglio 2003

Classificazione AMS: 14J17, 14J28, 94B05, 94B27.

Parole chiave: Codici binari, superfici nodali, superfici di Enriques.

APPLICAZIONI DELLA TEORIA DEI CODICI ALLE SUPERFICI ALGEBRICHE

SINTESI

Le interazioni tra le diverse aree della matematica sono piuttosto comuni e spesso estremamente fruttuose. Usualmente gli scambi avvengono all'interno di quella che viene chiamata "matematica teorica" oppure è la "matematica applicata", attenta ai problemi di ordine pratico, che si avvale dei risultati ottenuti da pesanti macchinari teorici.
In questo lavoro presenteremo un insolito caso in cui avviene il contrario. Descriveremo infatti alcune applicazioni della teoria dei codici, una materia "giovane" e con evidenti fini applicativi, ad una delle aree più astratte della matematica, la geometria algebrica.

L'accostamento di queste due discipline non è del tutto nuovo. Risale infatti agli anni ottanta l'introduzione della teoria delle curve algebriche nella costruzione di una classe di codici, detti codici di Goppa geometrici, sui quali si concentrano tutt'ora numerose ricerche.
Sarà invece, in questo caso, lo studio delle superfici algebriche, in particolare di una classe di esse, le superfici nodali, a poter beneficiare del contributo della teoria dei codici.

Una *superficie nodale* Σ è una superficie proiettiva normale i cui punti singolari sono *nodi*, cioè punti analiticamente isomorfi alla singolarità dell'ipersuperficie $x^2+y^2+z^2=0$. Denotiamo con $P_1,\dots,P_k$ i nodi di Σ e sia $\eta : Y \to \Sigma$ la risoluzione minimale. Per ogni $i = 1\dots k$, la curva $\eta^{-1}(P_i)$ risulta essere una curva C_i razionale non singolare tale che $C_i^2 = -2$ e $K_Y \cdot C_i = 0$. Le C_i sono dette *curve nodali.*

Viceversa, data una superficie Y e un insieme di curve nodali disgiunte di Y, esiste una superficie nodale Σ e un morfismo birazionale $\eta : Y \to \Sigma$ che contrae $C_1,\dots,C_k$ a nodi $P_1,\dots,P_k$ ed è un isomorfismo sul complementare di $\cup_i C_i$.

È quindi equivalente considerare una superficie nodale Σ o la superficie liscia Y con il suo insieme di curve nodali disgiunte C_i.

Una prima parte di questo lavoro (tratta principalmente da *Rational Surfaces with many nodes* ([DMP])), consisterà nella descrizione di una "tecnica" per lo studio della geometria delle superfici nodali che utilizza un *codice binario* ad esse associato.

Cosa sia un codice verrà detto nel primo capitolo dell'elaborato, assieme ad una veloce introduzione alla teoria dei codici, senza nessuna pretesa di esaurirne gli argomenti. Verranno inoltre descritti cenni di alcune problematiche che vengono affrontate nel suo studio, come la *correzione degli errori.* Si tratteranno infine nel dettaglio alcuni risultati che saranno poi utilizzati nei capitoli successivi.

I codici considerati nel seguito saranno in particolare *codici binari lineari,* dove un codice binario lineare di lunghezza k non sarà altro che un sottospazio lineare V di $\mathbb{F}_2^k$. Sia $\mathbf{v}$ un elemento (*parola*) di V, il numero delle coordinate di $\mathbf{v}$ diverse da 0 è detto *peso* di $\mathbf{v}$ ed è denotato con $w(\mathbf{v})$.

Il secondo capitolo è una parte a sé stante dell'elaborato e consiste di una breve descrizione dei sopra citati codici di Goppa generalizzati. È stato inserito per sottolineare l'esistenza di un'altra importante interazione tra la geometria algebrica e la teoria dei codici.

Il terzo capitolo contiene le tecniche principali dell'intero lavoro.

Una prima parte, tratta da [Pa], consisterà nella descrizione dei *rivestimenti abeliani* di una varietà algebrica Y non singolare e completa. In particolare, dato un gruppo abeliano G e il suo gruppo dei caratteri G^*, verranno introdotti dei *dati per la costruzione* di un rivestimento ad essi associato e si studieranno le relazioni di compatibilità alle quali tali dati devono essere soggetti.

Più precisamente si considererà, per ogni $\chi \in G^*$, l'autofascio di $\pi_*\mathcal{O}_X$ sul quale il gruppo agisce tramite il carattere χ, che risulta essere un fibrato lineare e che denoteremo con L_χ^{-1}. D'altra parte, ad ogni componente del luogo di diramazione D del rivestimento corrisponderanno in modo naturale il suo *gruppo d'inerzia*, che è un sottogruppo ciclico di G, ed un carattere del gruppo d'inerzia. Denoteremo con $D_{H,\psi}$ l'unione di tutte le componenti del luogo di diramazione con stesso gruppo d'inerzia H e stesso carattere ψ.
I dati per la costruzione saranno proprio i fibrati lineari L_χ e i divisori $D_{H,\psi}$.

Inoltre, dalla struttura di algebra di $\pi_*\mathcal{O}_X$ e dall'azione di G su di esso, sarà possibile trovare un'insieme di relazioni di equivalenza lineare che devono valere per ogni rivestimento abeliano non singolare. Si avrà cioè il seguente:

Teorema 0.1. *Sia G un gruppo abeliano e Y una varietà non singolare. Consideriamo un insieme di dati L_χ, $D_{H,\psi}$ che soddisfino*

$$L_\chi + L_{\chi'} \sim L_{\chi\chi'} + \sum_{H\in\mathcal{C}} \sum_{\psi\in S_H} \epsilon^{H,\psi}_{\chi,\chi'} D_{H,\psi}. \tag{1}$$

Allora possiamo costruire in modo naturale un rivestimento abeliano $\pi : X \to Y$ con gruppo G. Se il rivestimento così costruito è normale, L_χ, $D_{H,\psi}$ sono i suoi dati per la costruzione.
Inoltre, se Y è completo, allora i dati per la costruzione determinano il rivestimento $\pi : X \to Y$ a meno di isomorfismi di rivestimenti di Galois.

Particolare attenzione verrà poi riservata al caso $G = \mathbb{F}_2^k$, in cui le relazioni di compatibilità risulteranno essere particolarmente semplici.

La seconda parte del capitolo, tratta da [DMP], sarà dedicata allo studio di una superficie nodale per mezzo di codici binari ad essa associati.

Il codice V associato all'insieme di curve nodali disgiunte $C_1, \ldots, C_k \subset Y$ verrà definito come il nucleo dell'omomorfismo

$$\psi : \mathbb{F}_2^k \to Pic(Y)/2Pic(Y)$$

tale che $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto \sum x_i[C_i]$, dove $[D]$ denota la classe di un divisore $[D]$. In altre parole, $\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_k)$ sarà in V se e solo se $\sum_i x_i C_i$ è divisibile per 2 in $Pic(Y)$, cioè se e solo se esiste un fibrato lineare L su Y tale che

$2L \sim \sum_i x_i C_i$.

Inoltre sia I un sottoinsieme non vuoto di $\{1 \ldots k\}$, se l'elemento $\sum\limits_{i \in I} C_i$ è divisibile per 2 in $Pic(Y)$, diremo che $\{P_i \ : \ i \in I\}$ è un insieme *pari* di nodi.
Esiste quindi la seguente corrispondenza:

$$\{\text{Elementi non nulli di V}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{Insiemi pari di nodi}\}$$

Sia $\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_k) \in V$, si avrà quindi $\sum_i x_i C_i \sim 2L$ per un opportuno fibrato lineare L di Y e, grazie a questo, si mostrerà che il peso di $\mathbf{v}$ è divisibile per 4.
Diremo che una curva C_i *appare* in un sottospazio W di V se W non è contenuto nel sottospazio $\{x_i = 0\}$ di $\mathbb{F}_2^k$.

Il risultato principale del capitolo (enunciato per $\mathbf{k} = \mathbb{C}$) sarà infine il seguente Teorema, che mostra come si possono ottenere informazioni sulla geometria di una superficie nodale dal codice associato all'insieme dei nodi.

Teorema 0.2. *Sia Σ una superficie nodale e V il corrispondente codice. Sia $W \subset V$ un sottocodice di dimensione r e sia m il numero di nodi di Σ che appaiono in W. Allora esiste un rivestimento di Galois totalmente ramificato $\bar{\pi} : \bar{Z} \to \Sigma$ tale che:*
(i) Il gruppo di Galois di $\bar{\pi}$ è $G := Hom(W, \mathbb{C}^*)$;
(ii) $\bar{\pi}$ ha come luogo di diramazione precisamente i nodi di Σ che appaiono in W;
(iii) $\bar{Z}$ è una superficie nodale e l'insieme delle singolarità di $\bar{Z}$ è l'immagine inversa dei nodi di Σ che non appaiono in W.

Analogamente data la superficie Y, a partire da un qualunque sottospazio W di V, vedremo come sarà possibile ottenere dei *dati per la costruzione* di un *rivestimento abeliano*

$$\pi : Z \to Y$$

in modo tale che il suo gruppo di Galois sia $G := Hom(W, \mathbb{C}^*)$ e che π abbia come luogo di diramazione precisamente le curve che appaiono in W.

Le C_i corrispondono a (-1)-curve in Z e contraendole si riesce ad ottenere una superficie $\bar{Z}$ e un G-rivestimento $\bar{\pi} : \bar{Z} \to \Sigma$ con luogo di diramazione precisamente nelle singolarità di Σ corrispondenti alle curve che appaiono in W.

Abbiamo allora il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & \bar{Z} \arrow[d, "\bar{\pi}"] \\ Y \arrow[r, "\eta"] & \Sigma \end{tikzcd}$$

Troveremo infine alcune relazioni tra gli invarianti di Z, $\bar{Z}$, Y e Σ che, in sviluppi recenti, hanno permesso la costruzione di nuove superfici (si veda, ad esempio, [MP2]).

Gli ultimi capitoli di questo lavoro consistono poi nella descrizione di due risultati ottenuti applicando quanto descritto in precedenza al problema classico, recentemente rivisitato da numerosi autori, della determinazione del massimo numero di nodi di una superficie.

Se si tratta di una superficie è di grado n in $\mathbb{P}^3$ il massimo numero di nodi viene indicato con $\mu(n)$. È evidente che $\mu(1) = 0$ e $\mu(2) = 1$ e si ottengono piuttosto facilmente le disuguaglianze $\mu(3) \leq 4$ e $\mu(4) \leq 16$ considerando il grado c della superficie duale. Si ha, di fatto, $\mu(3) = 4$ e $\mu(4) = 16$, risultati ottenuti grazie allo studio della cubica di Cayley $\sum_{i=0}^{3} 1/X_i = 0$ e della superficie di Kummer.

Nel 1906 A. Basset ([Ba]) riuscì ad ottenere, per $n \geq 5$, la disuguaglianza

$$\mu(n) \leq \frac{1}{2}[n(n-1)^2 - 5 - \sqrt{n(n-1)(3n-14)+25}]$$

quindi $\mu(5) \leq 34, \mu(6) \leq 66, \mu(7) \leq 114,$ ecc...

Nel 1946 anche Severi propose una maggiorazione, molto migliore di quella di Basset, la cui dimostrazione poggiava su di un postulato che considerava intuitivamente evidente. Fu Segre, un anno più tardi, a trovare controesempi alla maggiorazione di Severi.

Fu Togliatti, più tardi, a dimostrare che $\mu(5) \geq 31$, costruendo una quintica con 31 nodi.

Il primo risultato che verrà esposto in questa tesi consisterà proprio nel mostrare che il numero massimo di nodi di una superficie Σ di grado 5 in $\mathbb{P}^3$, è 31.

La dimostrazione è stata tratta da un articolo di Beauville (*Sur le nombre maximum de points double d'une surface dans* $\mathbb{P}^3$ *(*$\mu(5) = 31$*)*, ([Bea])) e qui ne daremo una rilettura originale, rivedendola alla luce di quanto sviluppato nei capitoli precedenti. Verrà quindi presentata come un'applicazione del lavoro tratto da [DMP].

Consideriamo una superficie Σ di grado 5 in $\mathbb{P}^3$ che abbia, come sole singolarità, μ punti doppi ordinari $P_1, \ldots, P_\mu$. Considerando il codice V associato a Σ, i suoi sottospazio vettoriali generati da un solo elemento e il fatto che ogni elemento di V ha peso divisibile per 4 si dimostra che

Proposizione 0.3. *Sia I un insieme pari non vuoto di nodi di Σ. Allora I ha 16 o 20 elementi.*

Il calcolo di alcuni invarianti di Σ, la disuguaglianza nota $\mu(5) \geq 31$ e l'utilizzo di una Proposizione di teoria dei codici che caratterizza alcuni codici di lunghezza n e pesi superiori a $n/2$ ci permettono così di concludere che $\mu(5) = 31$.

La seconda applicazione, tratta da *Enriques Surfaces with eight nodes*, [MP], consiste di una classificazione delle superfici di Enriques con otto nodi. Grazie ad una disuguaglianza trovata da Miyaoka,[Miy], sappiamo che 8 è il massimo numero di nodi distinti che tali superfici possono contenere. Verrà mostrato, per la precisione, che una tale superficie può essere solo di due tipi: un quoziente di curve ellittiche tramite un gruppo isomorfo a $\mathbb{Z}_2^2$ o a $\mathbb{Z}_2^3$.

Assumendo che una superficie di Enriques Σ nodale ammette al più otto nodi ([Miy]) caratterizzeremo completamente le superfici di Enriques con otto nodi.

Vengono costruiti esplicitamente due esempi di superfici di Enriques con otto nodi come quoziente di un prodotto di curve ellittiche tramite un gruppo isomorfo a $\mathbb{Z}_2^2$ o a $\mathbb{Z}_2^3$ che agisce libero in codimensione 1. Si fa poi vedere che l'insieme dei nodi di Σ formano un insieme pari, questo e l'applicazione del Teorema 0.2 permettono di ricondursi (grazie alla classificazione delle superfici biellittiche di Bagnera-De Franchis) ad una delle due costruzioni sopra citate.

Riferimenti bibliografici

[Ar] Artin, *Algebra*, Prentice Hall, 1991.

[Ba] A. B. Basset, *The maximum number of double poits on a surface*, Nature, 73 (1906) 246.

[Be] A. Beauville, *Complex algebraic surfaces*, 2nd ed., Cambridge University Press (1996).

[Bea] A. Beauville, *Sur le nombre maximum de points double d'une surface dans* $\mathbb{P}^3$ *(*$\mu(5) = 31$*)*, in Journées de Géométrie Algébrique d'Angers, Juillet 1979 / Algebraic Geometry (Angers 1979), Sijthoff & Noordhoff, Alpen aan den Rijn (1980), pp. 207-215.

[Beau] A. Beauville, *L'application canonique pour les surfaces de type général*, Inventiones math. 55 (1979) 121-140.

[Ber] T. G. Berry, *Infinitesimal deformation of cyclic covers*, preprint. Compositio Math. **132** (2002), no. 3, 349-363.

[BW] D. Burns, J. Wahl, *Local contribution to global deformations of surfaces*, Inventiones math. 26 (1974) 67-88.

[DMP] I. Dolgacev, M. Mendes Lopes, R.Pardini, *Rational surfaces with many nodes*, Compositio Math. **132** (2002), no. 3, 349-363.

[GL] G. van der Geer, J.H van Lint, *Introduction to Coding Theory and Algebraic Geometry*, Basel: Birkhäuser, 1988.

[Har] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag 1999.

[Li] J. H. van Lint, *Introduction to coding theory*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag 1977.

[Mi] Y. Miyaoka, *On the Chern numbers of surfaces of general type*, Inventiones Math. 42 (1977) 225-237.

[Miy] Y. Miyaoka, *The maximal number of quotient singularities on surfaces with given numerical invariants*, Math. Ann., **268** (1973), 159-171.

[MP] M. Mendes Lopes, Pardini, *Enriques Surfaces with eight nodes*, arXiv:math.AG/0110122v1, 11 Oct 2001.

[MP2] M. Mendes Lopes, Pardini, *A new family of surfaces with* $p_g = 0$ *and* $K^2 = 3$, arXiv:math.AG/0304181 v1, 14 Apr 2003.

[Ni] V. V. Nikulin, *On Kummer surfaces*, Math. USSR Izvestija, Vol. **9** (1975), no. 2, 261-275.

[Pa] R. Pardini, *Abelian covers of algebraic varieties*, J. Reine Angew. Math. **417** (1991), 191-213.

[Se] F. Severi, *Sul massimo numero di nodi di una superficie di un dato ordine dello spazio ordinario di una forma di un iperspazio*, Annali di Mat. 25 (1946) 1-41.

[Seg] B. segre, *Sul massimo numero di nodi di una superficie di un dato ordine*, Bull. U.M.I. 2 (1947) 204-212.

[To1] E. Togliatti *Sulle forme cubiche dello spazio a cinque dimensioni aventi il massimo numero finito di punti doppi*, Scritti offerti a L.Berzolari p.577-593, Pavia (1936).

[To2] E. Togliatti *Una notevole superficie di quinto ordine con soli punti doppi isolati*, Festchrift R. Fueter Zürich (1940), 127-132.