UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica
presentata da

Laura Pinzi

GRUPPI CRISTALLOGRAFICI E AUTOMORFISMI DI CURVE ELLITTICHE

Relatore
Prof. Andrea Bruno

Il Candidato | Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2003 - 2004
Luglio 2004

Classificazione AMS :51H20
Parole Chiave : geometrie localmente euclidee, gruppi di trasformazioni, gruppi cristallografici, automorfismi di curve ellittiche.

Indice

Lo studio sistematico del gruppo dei movimenti rigidi del piano ha una lunga storia e molti illustri contributori, consapevoli o no, come ad esempio gli antichi Egizi o Leonardo da Vinci.

Esso è infatti connesso al concetto di simmetria delle figure e di tassellazione del piano.
Di particolare evidenza, a questo proposito sono i gruppi cristallografici, qui ampiamente studiati: essi sono sottogruppi del gruppo delle simmetrie del piano, che corrispondono ai 17 modi possibili di ornamentare il piano con motivi a simmetria traslatoria bidimensionale.
In questa tesi si è fatto lo sforzo di cogliere e organizzare tali gruppi da un punto di vista ″superiore″, rilevandone il carattere più puramente matematico.

Infatti i gruppi cristallografici sono in realtà delle estensioni di gruppi uniformi discontinui mediante gruppi discreti finiti: allora, per questo motivo, possono essere considerati come gruppi di automorfismi di geometrie localmente euclidee ottenute a partire da tali gruppi uniformemente discontinui.
Poiché si dimostra che le sole geometrie localmente euclidee ottenute a partire da tali gruppi uniformemente discontinui di tipo 3_a sono quelle sul toro con la metrica indotta dal piano su di esso, allora i gruppi cristallografici appaiono come gruppi di automorfismi di superficie di Riemann di genere 1, i tori complessi.
Il teorema di restrizione cristallografica ha come conseguenza ad esempio l'impossibilità di tassellare il piano con motivi che si ripetano per traslazioni in due direzioni distinte e a simmetria pentagonale.
Gli ornamentisti arabi in particolare hanno lungamente cercato di creare un motivo ornamentale regolare basato sul numero 5 e, non riuscendovi, sono ricorsi a delle leggere deviazioni su di esso.

Probabilmente gli arabi del XII secolo non conoscevano gli automorfismi delle curve ellittiche. Faremo infatti vedere come le classi di classificazione di tutti e soli i modo di tassellare il piano, cioè la classificazione dei gruppi cristallografici, è legata alla geometria sul toro e in particolare alle strutture di superfici di Riemann sul toro che ammettono automorfismi (con un punto fisso): si vede dalla loro classificazione che non esiste una tale superficie di

Riemann con automorfismi di ordine 5.

In dettaglio la tesi è organizzata come segue.

Nel capitolo dei preliminari, abbiamo accettato la definizione di geometria data dal Nikulin Shafaverich

Definizione 0.0.1. Una *geometria* è uno spazio metrico (X, d) con X insieme non vuoto e d distanza, i cui elementi sono chiamati *punti* ed è tale che, se $a, b \in X$ e $|ab|$ denota la loro distanza, allora valga

- $\forall a, b$ coppia di punti della geometria $\exists \alpha, \beta$ numeri positivi tali che la lunghezza della catena differisce dalla distanza tra a e b meno di α e la lunghezza di ogni traccia è più piccola di β, in altre parole: esisterebbero dei punti $p_1, p_2, \cdots, p_n$ tali che $p_1 = a, p_n = b$ e

$$0 \leq |p_1 p_2| + \cdots + |p_{n-1} p_n| < \alpha \quad \text{e} \quad |p_i p_{i+1}| < \beta \quad \text{per } i = 1, \cdots, n-1$$

Una volta data la definizione di isometria

Definizione 0.0.2. (**Isometria**) Una isometria, o movimento euclideo, di $\mathbb{R}^2$, è una mappa

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

che preserva la distanza, cioè tale che

$$\forall \left(\underline{x}, \underline{y}\right) \in \mathbb{R}^2$$

$$d\left(f\left(\underline{x}\right), f\left(\underline{y}\right)\right) = d\left(\underline{x}, \underline{y}\right)$$

Le isometrie del piano, formano un gruppo sotto la composizione di funzioni, che viene chiamato *Gruppo Euclideo* E_2.

Osservazione. Ogni isometria che fissi un punto è una trasformazione lineare ortogonale; per questo motivo, ogni $f \in E_2$ si scrive in modo unico come prodotto di una traslazione e di una trasformazione ortogonale.
Possiamo così pensare $E_2 \cong \mathbb{R}^2 \times \mathcal{O}_2$ (prodotto semidiretto) e quindi ogni isometria del piano come una coppia ordinata

$$(\underline{v}, M)$$

con $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$, $M \in \mathcal{O}_2$
con prodotto definito come segue

$$(\underline{v}, M)\left(\underline{v_1}, M_1\right) = \left(\underline{v} + f_M\left(\underline{v_1}\right), MM_1\right)$$

Considerando la definizione di geometrie localmente euclidee, daremo alcuni esempi di geometrie euclidee, localmente euclidee ma non euclidee o neanche localmente euclidee, rispettivamente: il piano euclideo, il cilindro e la sfera.

Definizione 0.0.3.

- Se a è un punto della nostra geometria e r è un qualsiasi numero positivo, allora l'insieme di tutti i punti b della geometria tali che $|ab| \leq r$ sono chiamati $intorno\ sferico\ di\ raggio\ r\ del\ punto\ a$ ($o\ disco\ di\ centro\ a\ e\ raggio\ r$) e sono denotati con $D\,(a, r)$

- Supponiamo sia data una geometria (X, d).
  Diremo che la geometria è $localmente\ euclidea$ o che è $identica\ al\ piano\ in\ regioni\ sufficientemente\ piccole$ se
  $\exists r > 0$ tale che per ogni punto a della nostra geometria l'intorno sferico di centro a e raggio r, $D\,(a, r)$, può essere sovrapposto interamente nel disco di raggio r del piano cioè

  $$\text{se } \exists r > 0 \ \ \text{tale che } \forall x \in X$$

  per cui

  $$D\,(a, r)$$

  è sovrapponibile ad un disco di raggio r del piano.

Avendo definito i movimenti rigidi del piano e analizzato nel dettaglio la traslazione, la riflessione, la rotazione e la glissoriflessione, arriveremo al teorema di Chasles:

Teorema 0.0.4 (di Chasles). *Ogni movimento rigido del piano è:*

- *una traslazione*
- *una rotazione*
- *o una glissoriflessione*

E al teorema di Leonardo

Teorema 0.0.5 (di Leonardo). *Dato un gruppo G di isometrie del piano,*

$$\text{se } G \text{ è finito} \quad \text{allora } \; G \text{ ha un punto fisso}$$

Nel primo capitolo cercheremo di analizzare le geometrie localmente euclidee che vedremo essere quelle del toro e della bottiglia di Klein.
Dopo aver identificato una geometria sul toro e una geometria sulla bottiglia di Klein, classificheremo i gruppi uniformemente discontinui e studieremo nel dettaglio quello di tipo 3_a.

Teorema 0.0.6. *Un gruppo uniformemente discontinuo di tipo 3_a è determinato da due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ non collineari e consiste di tutte le traslazioni di vettori della forma $m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$, con a e b interi.*

Analogamente determineremo un gruppo 3 b

Teorema 0.0.7. *Un gruppo Γ di tipo $3b$ è determinato da una linea l, un vettore $\mathbf{a}$ parallelo a l e un vettore $\mathbf{b}$ perpendicolare a l. Il gruppo è costituito dalle traslazioni $\tau_{\mathbf{x}}$ dove $\mathbf{x}$ è un vettore della forma $m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$, con $n, m \in \mathbb{Z}$ e dalle glissoriflessioni $\tau_{\mathbf{x}} S_l^{\frac{\mathbf{a}}{2}}$, dove $\mathbf{x}$ è un vettore della stessa forma.*

Partendo dalla definizione di geometrie simili vorremmo arrivare a capire quando, date due geometrie sul toro, esse sono simili

Definizione 0.0.8. Sia $F : \Sigma \longrightarrow \Sigma'$ una mappa e $\lambda > 0$ una costante tale che

$$|F(A) F(B)| = \lambda |AB|, \quad \forall A, B \in \Sigma$$

allora le geometrie Σ e Σ' sono dette **simili** e F è la similitudine e il coefficiente λ è detto **rapporto di similitudine di F**.
Se F ha rapporto $\lambda \Longrightarrow F^{-1}$ ha rapporto $\lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda}$.

Essendo Γ di tipo 3_a, esso è il gruppo di tutte le traslazioni nei vettori della forma $me_1 + me_2$ con $n, m \in \mathbb{Z}$ quindi Γ è rappresentato da un piano reticolato.

Definizione 0.0.9. Una coppia di vettori (e_1, e_2) tale che

1. $|e_1| \geq |e_2|$
2. la lunghezza della proiezione di e_2 sulla direzione di e_1 è minore uguale della metà della lunghezza di e_1
3. l'angolo θ tra e_1 ed e_2 non è ottuso

è detta **coppia di generatori ridotti del reticolo**

Quindi lo studio si riduce a sapere quando due coppie di generatori ridotti generano lo stesso reticolo.

Teorema 0.0.10. *Siano $m, n, l, k \in \mathbb{Z}$ e sia*

$$\begin{cases} \mathbf{e_1'} = m\mathbf{e_1} + n\mathbf{e_2} \\ \mathbf{e_2'} = k\mathbf{e_1} + l\mathbf{e_2} \end{cases}$$

allora la coppia $\left(e_1', e_2'\right)$ genera lo stesso reticolo della coppia $(e_1, e_2) \iff ml - nk = \pm 1$

Il gruppo costituito dalle matrici

$$\begin{pmatrix} m & n \\ k & l \end{pmatrix}$$

con $n, m, k, l \in \mathbb{Z}$ tale che $ml - nk = \pm 1$ è detto gruppo modulare.

Nel secondo capitolo, partiremo dalla definizione di toro complesso:

Definizione 0.0.11. Siano $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$. Definiamo *reticolo* generato da ω_1 e ω_2 il sottogruppo di $\mathbb{C}$ che essi generano

$$L = \{m\omega_1 \ + \ n\omega_2 \ t.c. \ m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Consideriamo X il gruppo quoziente $\mathbb{C}/L$ con la topologia quoziente, e sia $p : \mathbb{C} \to X$ applicazione naturale, allora X è omeomorfo ad un toro $S^1 \times S^1$

Dimostreremo quindi che $X = \frac{\mathbb{C}}{L}$ ammette una struttura di superficie di Riemann. Considereremo poi la funzione ellittica $\wp$ di Weierstrass

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{l \in L}^{l \neq 0} \left[\frac{1}{(z-l)^2} - \frac{1}{l^2} \right]$$

e denoteremo con
$L = \{n\omega_1 + m\omega_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ l'insieme dei suoi periodi. Come vediamo L è un reticolo e ne enunceremo alcune proprietà

Proposizione 0.0.12. 1. *$\wp(z)$ è una funzione ellittica relativa al reticolo L.*

2. *I poli di $\wp(z)$ sono esattamente i punti di L, ed essi sono poli di ordine 2.*

3. *La funzione meromorfa su X definita da $\wp(z)$ ha grado 2.*

4. *$\wp(-z) = \wp(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.*

5. *La derivata $\wp'(z)$ è una funzione ellittica e soddisfa $\wp(-z)' = -\wp(z)'$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ inoltre i suoi poli sono i punti L, che sono poli di ordine* 3.

e arriveremo al seguente teorema:

Teorema 0.0.13. *Consideriamo il reticolo L e definiamo su esso la funzione $\wp$ di Weierstrass:*
ogni funzione ellittica è una combinazione lineare razionale di $\wp$ e $\wp^{'}$ cioè

$$\mathbb{C}(L) = \mathbb{C}\left(\wp(z), \wp^{'}(z)\right)$$

Dopo aver dato la seguente definizione

Definizione 0.0.14. Definiamo la serie di Eisenstein di peso 2k per L nel seguente modo:

$$G_{2k}(L) = \sum_{\omega \in L}^{\omega \neq 0} \omega^{-2k}$$

arriviamo al teorema che lega la funzione $\wp$ di Weierstrass, definita nel reticolo L, con le curve ellittiche:

Teorema 0.0.15. *Siano g_2 e g_3 le quantità associate al reticolo $L \in \mathbb{C}$.*

1. *Il polinomio*
$$f(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$$
ha radici distinte e il suo discriminante
$$\Delta(L) = g_2^3(L) - 27g_3^2(L)$$
è non nullo

2. *Sia $E/\mathbb{C}$ la curva*
$$E : y^2 = 4x^3 - g_2(L)x - g_3(L)$$
che è una curva ellittica. Allora la mappa
$$\phi : \mathbb{C}/L \to E \subset P^2(\mathbb{C})\, z \to \left[\wp(z), \wp'(z), 1\right]$$
è un isomorfismo di superfici di Riemann.

Introduciamo, ora, varie rappresentazioni canoniche di cubiche piane come, ad esempio, le equazioni di Weierstrass: esse verranno distinte in base alla caratteristica del campo K nel quale sono definite e, in fine classificate. Dato K, una cubica su K nella forma di Weierstrass è data proiettivamente da:

$$y^2\omega + a_1 xy\omega + a_3 y\omega^2 = x^3 + a_2 x^2\omega + a_4 x\omega^2 + a_6\omega^3$$

a coefficienti in K. Studiamo il comportamento della curva lavorando con la sua forma affine

$$y^2 + a_1 xy + a_3 y = x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6$$

Ovviamente questa forma appare più semplice di quella data e, per alleggerirla ulteriormente considereremo dei cambi di variabili, che saranno soggetti a delle restrizioni sulla caratteristica del campo.La seguente notazione è tuttavia standard e non dipende dalla caratteristica di K:

$$b_2 = a_1^2 + 4a_2$$

$$b_4 = 2a_4 + a_1 a_3$$
$$b_6 = a_3^2 + 4a_6$$
$$b_8 = a_1^2 a_6 + 4a_2 a_6 - a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3^2 - a_4^2$$

$$c_4 = b_2^2 - 24 b_4$$
$$c_6 = -b_2^3 + 36 b_2 b_4 - 216 b_6$$
$$\Delta = -b_2^2 b_8 - 8 b_4^3 - 27 b_6^2 + 9 b_2 b_4 b_6$$
$$j = \frac{c_4^3}{\Delta}$$

e le classificheremo in base alla caratteristica del campo K nel quale sono presi i coefficienti

Teorema 0.0.16. *Sia E/K una curva ellittica data dall' equazione di Weierstrass. Allora sotto le fissate assunzioni c'è una sostituzione*

$$x = u^2 x' + r y = u^3 y' + u^2 s x' + t \qquad \text{con } u \in K^* \quad r, s, t \in K$$

tale che E/K ha una equazione di Weierstrass della forma indicata

1. *se char $(K) \neq 2, 3$*

$$y^2 = x^3 + a_4 x + a_6$$

$\Delta = -16\left(4a_4^3 + 27a_6^2\right)$
$j = 1728 \frac{(4a_4)^3}{4a_4^3 + 27a_6^2}$

2. *se char $(K) = 3$ e $j(E) \neq 0$*

$$y^2 = x^3 + a_2 x^2 + a_6$$

$\Delta = a_2^3 a_6$
$j = \frac{-a_2^3}{a_6}$

se char $(K) = 3$ e $j(E) = 0$

$$y^2 = x^3 + a_4 x + a_6$$

$\Delta = -a_4^3$
$j = 0$

3. se $char\,(K) = 2$ *e* $j\,(E) \neq 0$

$$y^2 + xy = x^3 + a_2x^2 + a_6$$

$\Delta = a_6$
$j = \frac{1}{a_6}$
se $char\,(K) = 2$ *e* $j\,(E) = 0$

$$y^2 + a_3y = x^3 + a_4x + a_6$$

$\Delta = a_3^4$
$j = 0$

Arriviamo, così al seguente teorema

Teorema 0.0.17 (di classificazione). *Sia* E/K *una curva ellittica. Allora il gruppo degli automorfismi di* E*,* $Aut\,(E)$ *è un gruppo finito di ordine:*

2 *se* $j\,(E) \neq 0, 1728$
4 *se* $j\,(E) = 1728$ *e* $char\,(K) \neq 2, 3$
6 *se* $j\,(E) = 0$ *e* $char\,(K) \neq 2, 3$
12 *se* $j\,(E) = 0 = 1728$ *e* $char\,(K) = 3$
24 *se* $j\,(E) = 0 = 1728$ *e* $char\,(K) = 2$

Ben più utile per noi è, però, la sua immediata conseguenza

Corollario 0.0.18. *Sia* $E/\mathbb{C}$ *una curva ellittica allora* $Aut\,(E)$ *è un gruppo finito di ordine:*
2 *se* $j\,(E) \neq 0, 1728$
4 *se* $j\,(E) = 1728$
6 *se* $j\,(E) = 0$

Proposizione 0.0.19. *Sia* E/L *una curva ellittica definita sul reticolo* $L \subseteq \mathbb{C}$*,* $L = \{\omega = n\omega_{\mathbf{1}} + m\omega_{\mathbf{2}} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ *allora*

$$j = 1728 \Longleftrightarrow L = \{n + m\mathbf{i} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

in questo caso il nostro reticolo è un quadrato.

$$j = 0 \Longleftrightarrow L = \left\{ n + m \left(\frac{\sqrt{\mathbf{3}} + \mathbf{i}}{\mathbf{2}} \right) \mid n, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

in questo caso il nostro reticolo è un parallelogramma con gli angoli di $\frac{\pi}{3}$ *e* $\frac{2}{3}\pi$

Quel che ci proporremo di affrontare nel capitolo 3 è cercare una classe di insiemi che contenga tutti i gruppi uniformemente discontinui; arriveremo così ai gruppi discreti

Definizione 0.0.20. Un *Gruppo Discreto* è un gruppo di movimenti del piano tale che $\forall A \in \mathbb{R}^2 \quad \exists d(A) > 0$ che dipende da A tale che, $\forall F \in \Gamma F(A) \neq A$ si ha:

$$|AF(A)| \geq d(A)$$

Grazie alla loro definizione, descriveremo i gruppi discreti come gruppi propriamente discontinui la cui azione è non libera.

Vedremo poi le geometrie dei gruppi discreti. C_n e D_n e dimostreremo l'inverso del teorema di Leonardo; infine arriveremo alla seguente definizione

Definizione 0.0.21. Se denotiamo con $\mathcal{S}$ il gruppo delle simmetrie del cristallo, possiamo riformulare le due proprietà come segue:

1. $\forall A$ nello spazio $\exists d(A) > 0$, un numero che dipende da A tale che, $\forall F \in \mathcal{S}$ movimento con $F(A) \neq A$ si ha:

$$|AF(A)| \geq d(A)$$

2. $\exists B$ sfera nello spazio tale che, $\forall X$ nello spazio $\exists$ un movimento $F \in \mathcal{S}$ per cui

$$F(X) \in B$$

Gruppi di movimenti che soddisfano queste due proprietà sono chiamati *Gruppi Cristallografici*.

Arriveremo così al teorema di restrizione cristallografica del quale daremo 2 diverse dimostrazioni.

Teorema 0.0.22 (di restrizione cristallografica). *L' ordine di una rotazione in un gruppo cristallografico può essere solo 2, 3, 4 o 6.*

Nel capitolo 4 analizzeremo nel dettaglio, dunque classificheremo i 17 gruppi cristallografici come diretta conseguenza del teorema di restrizione cristallografica.

Il teorema di restrizione cristallografica può essere messo in relazione con il teorema di classificazione di curve ellittiche considerando il valore di j: abbiamo infatti visto nella 0.0.19 che in base al valore di j possiamo fare delle assunzioni sul reticolo.
Possiamo così mettere in relazione, in base al loro ordine, ogni gruppo cristallografico trovato con i gruppi di automorfismi di curve ellittiche definite sul reticolo $L = \{n + m\mathbf{i} \, | m, n \in \mathbb{Z}\}$ i cui valori dello j-invariante sono 0, 1728 o nessuno dei due.

- φ è un movimento rigido del piano di ordine n
  se e soltanto se
  φ è un automorfismo di ordine n per $E = \frac{\mathbb{C}}{L}$

Allora possiamo dire che se $\varphi \in \Gamma$ è un movimento rigido del piano, allora:

1.
$$\varphi \in \mathbf{p4}$$
$$\Updownarrow$$
$$\varphi^4 = 1 \text{ e } ord\,(\varphi) = 4$$
$$\Updownarrow$$

$$\varphi : \frac{\mathbb{C}^2}{L} \longrightarrow \frac{\mathbb{C}^2}{L} \text{ è un automorfismo di ordine 4}$$

$$\Updownarrow$$

$$j(E) = 1728$$

Ricordiamo che hanno ordine 4 anche **p4mm**, **p4mg**.

2.

$$\varphi \in \mathbf{p6}$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi^6 = 1 \text{ e } ord(\varphi) = 6$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi : \frac{\mathbb{C}^2}{L} \longrightarrow \frac{\mathbb{C}^2}{L} \text{ è un automorfismo di ordine 6}$$

$$\Updownarrow$$

$$j(E) = 0$$

Ricordiamo che hanno ordine 6 anche **p3m1**, **p31m**, **p6mm**.

3.

$$\varphi \in \mathbf{p3}$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi^3 = 1 \text{ e } ord(\varphi) = 3$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi : \frac{\mathbb{C}^2}{L} \longrightarrow \frac{\mathbb{C}^2}{L} \text{ è un automorfismo di ordine 3}$$

$$\Updownarrow$$

$$j(E) = 0$$

Questo può essere visto come sottogruppo di **p6**, e quindi ci riconduciamo al caso già visto.

Bibliografia

[Arm88] M. A. Armstrong. *Groups and symmetry.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1988.

[BG87] Marcel Berger and Bernard Gostiaux. *Géométrie différentielle: variétés, courbes et surfaces.* Mathématiques. [Mathematics]. Presses Universitaires de France, Paris, 1987.

[CM80] H. S. M. Coxeter and W. O. J. Moser. *Generators and relations for discrete groups*, volume 14 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas].* Springer-Verlag, Berlin, fourth edition, 1980.

[DNF85] B. Doubrovine, S. Novikov, and A. Fomenko. *Géométrie contemporaine. Méthodes et application.* 1^re^ *partie.* "Mir", Moscow, 1985. Géométrie des surfaces, des groupes de transformation et des champs. [Geometry of surfaces, transformation groups and fields], Translated from tha russian by Vladmir Kotliar, Reprintof the 1982 translation.

[htt] www.missioncollege.org.

[Kna92] Anthony W. Knapp. *Elliptic curves*, volume 40 of *Mathematical Notes.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.

[Kob93] Neal Koblitz. *Introduction to elliptic curves and modular forms*, volume 97 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1993.

[LR65] Lucio Lombardo-Radice. *Istituzioni di algebra astratta.* Con "Esercizi e complementi" a cura di V. Corbas e G. Panella.

Collana di Algebra, No. 3. Giangiacomo Feltrinelli Editore, Milan, 1965.

[Mar82] George Edward Martin. *Transformation geometry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1982. An introduction to symmetry.

[NS87] V. V. Nikulin and I. R. Shafarevich. *Geometries and groups*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1987. Translated from the Russian by M. Reid, Springer Series in Soviet Mathematics.

[Rig89] Germano Rigoult. *Simmetrie e cristalli*. Quaderni scientifici Loescher. Loescher editore, 1989.

[Rya86] Patrick J. Ryan. *Euclidean and non-Euclidean geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. An analytical approach.

[Ser00] Edoardo Sernesi. Istituzioni di geometria superiore. Appunti del corso, I modulo GE5, 2000.

[Sil92] Joseph H. Silverman. *The arithmetic of elliptic curves*, volume 106 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1992. Corrected reprint of the 1986 original.