UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Tesi di Laurea Magistrale

Anno Accademico 2013/2014

Strategie open-loop per problemi di controllo ottimo

Candidato

Giulia Rosi

Relatore

Prof. Roberto Ferretti

La matematica

può essere definita

come la scienza in cui

non sappiamo mai

di che cosa stiamo parlando,

né se ciò che diciamo è vero.

Bertrand Russell

1

Sintesi della Tesi

Indice

LE radici di questo lavoro, da cui si sviluppa e articola la mia tesi, sono i problemi di ottimizzazione, e, più precisamente, i problemi di controllo ottimo. In un problema di ottimizzazione si vuole determinare il massimo (o minimo) valore di una funzione, ed eventualmente delle variabili per cui tale massimo viene raggiunto. Il *controllo ottimo*, invece, determina il controllo che fa evolvere il sistema, ottimizzando un certo funzionale.

L'oggetto delle prossime pagine riguarderà la minimizzazione di funzionali soggetti a vincoli, considereremo cioè il problema:

$$\min_{u \in U} J(u)$$

con $U \subseteq V$ insieme definito dai vincoli, e V spazio di Hilbert (o di Banach riflessivo).

Per introdurre e capire fino in fondo i problemi di controllo, si richiedono alcune nozioni di Teoria dei sistemi, grazie alle quali possiamo introdurre il concetto di sistema

dinamico come un modello matematico che descrive l'evoluzione nel tempo di sistemi tramite leggi che legano lo stato presente allo stato iniziale e al controllo. Esso è caratterizzato da un insieme di funzioni di ingresso, le quali costituiscono le cause perturbanti che agiscono sul sistema, e da un insieme di funzioni di uscita, che costituiscono l'effetto: caratteristica fondamentale è che il legame tra questi due gruppi di funzioni non è statico ma legato al tempo.
Lo stato del sistema è descritto dalle variabili di stato $x(t)$, le quali definiscono la situazione in cui si trova il sistema ad un certo istante temporale. I valori assunti dalle variabili di stato, in un generico istante di tempo, contengono tutta l'informazione sulla storia passata del sistema, necessaria per valutare l'andamento futuro sia delle stesse variabili di stato, che di quelle di uscita.
Gli ingressi, che sono in generale delle funzioni, agiscono sul sistema e ne modificano le caratteristiche: vengono introdotti per avere l'uscita che desideriamo, per non avere errori o per averli limitati; le uscite, invece, dipendono dalle variabili di stato e dagli ingressi.

1.1 Problemi di controllo ottimo

Il controllo *ottimo* si occupa di determinare il controllo che fa evolvere il sistema ottimizzando un certo funzionale: si vuole far funzionare nel modo migliore possibile un sistema dato, cioè si vogliono determinare una sequenza di variabili di controllo da applicare al sistema in modo che minimizzino un funzionale di costo, rispettando un insieme di vincoli sullo stato del sistema e sulle variabili di controllo (lo scopo è trovare il controllo $u(t)$ che porti il sistema da uno stato iniziale ad uno finale, con alcuni vincoli su $u(t)$ e sullo stato $y(t)$, e che allo stesso tempo estremizzi l'indice di costo scelto J).
Problemi di questo tipo sono solitamente composti da:

- equazioni che descrivono il comportamento del sistema dinamico da controllare e che definiscono, quindi, il modello matematico;

- vincoli imposti alle variabili di stato e di controllo e condizioni al contorno;
- funzionale di costo da ottimizzare.

Quindi tali problemi consistono nella ricerca di una successione di comandi $\{u^*(t_0),\ldots,u^*(T-1)\}$ e di una funzione $u^*(s)$, con $t_0 \leq s \leq T$, in modo da ottimizzare il criterio $J(u)$ nell'insieme dei comandi ammissibili, che trasferiscano il sistema dallo stato iniziale a quello finale con traiettorie ammissibili.
La ricerca operativa, o Teoria delle decisioni, è l'insieme delle metodologie con cui vengono prese decisioni ottime fra più decisioni possibili. In particolare possiamo distinguere tra:

- l'Ottimizzazione Statica, o Programmazione Matematica, che si occupa dei problemi a singoli stati decisionali, dove le scelte vengono fatte in un singolo istante, in assenza del tempo: ciò si ha quando il processo funziona prevalentemente a regime (cioè tutti i parametri che caratterizzano il sistema rimangono costanti nel tempo, o variano in maniera periodica);
- l'Ottimizzazione Dinamica, o Teoria delle Decisioni Sequenziali, che si ha quando il processo non funziona a regime, si occupa dei problemi a stati decisionali consecutivi, dove la variabile tempo compare esplicitamente.

Il nostro scopo è che l'elaboratore preposto al controllo faccia evolvere nel tempo il processo, entro certi vincoli imposti, nel modo più conveniente possibile, cioè ad esempio in modo che il costo di esercizio risulti minimo.
Il problema dell'ottimizzazione dinamica è un tipico problema di calcolo delle variazioni, consistente nella ricerca della traiettoria corrispondente ad un minimo di un dato funzionale. Un apporto relativamente recente (1959) al calcolo delle variazioni è stato dato dal matematico russo Lev Semenovich Pontryagin, che ha enunciato un sistema di condizioni necessarie per l'ottimo in una forma particolarmente adatta per la soluzione di problemi connessi al controllo dei processi.

Con il termine di ottimizzazione viene pertanto indicato l'utilizzo di un modello matematico per l'individuazione della migliore alternativa tra le varie opportunità: si cerca di massimizzare o minimizzare il funzionale di costo, che a ogni possibilità associa un numero, il quale misura la "desiderabilità" della scelta corrispondente.

Una funzione u^* che realizza tale minimo (o massimo) è detta *controllo ottimale*, e la corrispondente traiettoria x^* è una *traiettoria ottimale*.
Più precisamente, indichiamo col nome di *problema di controllo ottimo* il seguente: dato il sistema differenziale (detto *equazione di stato*)

$$\begin{cases} \dot{y}(u,t) = f(y(u,t), u(t), t) \\ y(u,a) = x \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.1}$$

con $t \in [a,b]$, $u \in L^2([a,b],W)$ e $W \subseteq \mathbb{R}^m$ convesso e chiuso, vogliamo minimizzare su U il seguente funzionale (detto *funzionale di Bolza*):

$$J(u) = \int_a^b L\big(y(u,t), u(t), t\big) dt + F\big(y(u,b)\big)$$

formato da un costo che dipende dallo stato e dal controllo sull'intero intervallo $[a,b]$ e da un costo legato allo stato finale del sistema (1.1) .

1.2 Il Principio del Massimo di Pontryagin

I principali percorsi di ricerca sull'argomento sono due:

1. Il primo è relativo ai risultati basati sulla Teoria di Hamilton-Jacobi;
2. il secondo è relativo ai risultati basati sul principio del massimo, dovuto al matematico russo Pontryagin.

ed entrambe le metodologie sono state sviluppate a partire dagli anni 50/60.

La prima teoria fornisce una condizione sufficiente di ottimalità per una classe di problemi di controllo ottimo: si basa sul teorema fondamentale di Hamilton-Jacobi, relativo alla soluzione dell'omonima equazione differenziale. Tuttavia ha due principali controindicazioni: non è possibile concludere nulla nel caso in cui non si riesca a trovare una soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi che soddisfi tutte le condizioni del teorema, ed inoltre esso è poco operativo, nel senso che la sua applicazione non consente di determinare dal punto di vista pratico il controllo ottimo.

La seconda teoria, invece, si basa sul cosiddetto "principio del massimo":essa è stata sviluppata in relazione ai problemi di massimizzazione di funzionali di costo, ed è molto importante perché conduce alla formulazione di condizioni necessarie, a differenza

della teoria precedente, la quale fornisce condizioni sufficienti. Inoltre le condizioni necessarie espresse nell'ambito del principio del massimo comportano, di regola, difficoltà di natura computazionale alquanto minori di quelle insite nella risoluzione dell'equazione differenziale alle derivate parziali che costituisce il nucleo della teoria di Hamilton-Jacobi.
Il fatto di fornire condizioni necessarie può essere visto come un aspetto positivo, ma anche come un aspetto negativo. Infatti l'imposizione delle condizioni necessarie (che in quanto tali devono essere rispettate) consente di determinare abbastanza semplicemente una soluzione, la quale, soddisfacendole, è candidata ad essere ottima. Ma una soluzione che soddisfa le condizioni necessarie non è detto che sia ottima (altrimenti sarebbero anche sufficienti, co sa che invece, in generale, non è). Pertanto, per poter affermare che una soluzione trovata imponendo le condizioni necessarie fornite dal teorema di Pontryagin è effettivamente una soluzione ottima, serve un'analisi supplementare (alcuni risultati sfruttano le proprietà delle funzioni coinvolte, come concavità o convessità e linearità, oppure si verifica se la soluzione trovata è l'unica che soddisfa le condizioni necessarie, ed è quindi inevitabilmente ottima).

Proprio come la metodologia di Hamilton-Jacobi, anche il risultato fornito dalla teoria di Pontryagin si basa sulla funzione Hamiltoniana, definita come:

$$\mathcal{H}(y,u,t,p) = L(y,u,t) + p^T f(y,u,t) \tag{1.2}$$

ove $p(t) \in \mathbb{R}^n$ è detta *funzione di costato*.
A partire dalla funzione Hamiltoniana e dalla funzione $p(t)$, è possibile definire un sistema di n equazioni differenziali, il quale viene usualmente indicato con il nome di sistema ausiliario del problema di controllo ottimo. Infatti, con riferimento alla (1.2) e ad una coppia di funzioni $\{y(t), u(t)\}$ che risolvano il sistema (1.1), il sistema di equazioni differenziali:

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(y,u,t,p)}{\partial y} = -\nabla_y \mathcal{H}(y,u,t,p) \tag{1.3}$$

costituisce il sistema ausiliario del problema di controllo ottimo relativo al sistema dinamico e al funzionale di costo considerati.

Osservazione: è possibile riscrivere anche l'equazione di stato del sistema (1.1) in maniera analoga a quanto fatto per il sistema ausiliario, ottenendo:

$$\dot{y} = \frac{\partial \mathcal{H}(y,u,t,p)}{\partial p} = -\nabla_p \mathcal{H}(y,u,t,p)$$

Sia dunque dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{y}(u,t) = f(y(u,t),u(t),t) \\ y(u,t_0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

che descrive la dinamica, ed il seguente funzionale:

$$J(u) = \int_{t_0}^{T} L(y(u,t),u(t),t)dt + F(y(u,T))$$

da minimizzare. A questo punto possiamo enunciare il seguente:

Teorema 1 (Principio del massimo di Pontryagin)**.** *Condizione necessaria affinché la coppia* $\{(u^*(t),y^*(t)),t \in [t_0,T]\}$ *sia ottima per il problema di controllo ottimo considerato è che esista una soluzione* $p^*(t)$ *dell'equazione di stato sistema ausiliario (1.3) tale che:*

1. $\mathcal{H}(y^*(t),u^*(t),p^*(t)) \geq \mathcal{H}(y^*(t),u(t),p^*(t))$, $\forall t \in [t_0,T]$;
2. $y^*(t_0) = y_0$;
3. $p*(t) \neq 0$, *e* $p^*(T) = \nabla F(y^*(T))$.

Il principio del massimo afferma, quindi, che se $u^*(\cdot)$ è il controllo ottimo nell'intervallo $t \in [t_0,T]$, allora la funzione hamiltoniana assume il valore più grande tra quelli ottenibili da tutti gli ingressi u.

Il teorema precedente è formulato in modo da consentire una verifica circa la possibile ottimalità di una certa coppia $\{u^*(t),y^*(t)\}$. Esso può essere utilizzato anche in maniera costruttiva al fine di individuare una coppia che, soddisfacendo le condizioni necessarie esposte nel teorema, si pone come candidata ad essere una coppia ottima (questo è un indubbio vantaggio dei risultati della teoria di Pontryagin rispetto a quelli della teoria di Hamilton-Jacobi).

Le incognite del problema di controllo sono i vettori di funzioni $y^*(t)$, $u^*(t)$ e $p^*(t)$, sull'intervallo di tempo $[t_0, T]$: vi sono pertanto $2n+m$ incognite.
Il controllo $u^*(t)$ può essere determinato in funzione delle altre due funzioni incognite grazie al principio del massimo: minimizzo $\mathcal{H}$ rispetto ad u

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$$

per trovare

$$u^*(t) = h(y(t), p(t), t) \tag{1.4}$$

A questo punto si sostituisce il valore (1.4) nelle equazioni di stato del sistema e del sistema ausiliario:

$$\dot{y}(t) = f(y(t), u^*(t), t) \iff \dot{y}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial p}$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial y}$$

in cui $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}(y(t), u^*(t), t)$, ottenendo un sistema di $2n$ equazioni differenziali, detto *sistema hamiltoniano*, con n condizioni al contorno relative all'istante iniziale

$$y(t_0) = y_0$$

ed n condizioni al contorno relative all'istante finale

$$p^*(T) = \nabla F(y^*(T))$$

Si può quindi risolvere il sistema di $2n$ equazioni in $2n$ incognite, ottenendo i vettori di funzioni $x^*(t)$ e $p^*(t)$; infine, tramite questi ultimi due, si determina il vettore di funzioni $u^*(t)$.

1.3 Teoria dell'approssimazione

Questa sezione della tesi riguarderà l'approssimazione del problema

$$\min_{u \in U} J(u) \tag{1.5}$$

con $U \subset V$, ove U è l'insieme dei vincoli e V spazio di Banach, ovvero:

$$\min_{u_n \in U} J_n(u_n), \qquad U_n \subset V_n \subset V \tag{1.6}$$

I risultati tipici di convergenza per questa classe di approssimazioni sono dati dai seguenti teoremi che trattano:

- il caso generale di funzionali limitati inferiormente

  Teorema 2. *Sia $U \subset V$ e $J(\cdot)$ funzionale inferiormente limitato su U. Siano inoltre soddisfatte su (1.6) le seguenti ipotesi:*

  1. *per ogni n, $U_n \subset U$;*
  2. *esiste per ogni n una soluzione ottima u_n^* di (1.6);*
  3. *esise una successione $\{\overline{u}_n\} \in U_n$ per cui si ha:*

     $$\limsup_{n\to\infty} J_n(\overline{u}_n) \leq \inf_{u \in U} J(u);$$

  4. $$\limsup_{n\to\infty} [J(u_n^* - J_n(u_n^*))] \leq 0$$

  Allora si ha:

  $$\lim_{n\to\infty} J(u_n^*) = \inf_{u \in U} J(u)$$

- il caso di esistenza del minimo

  Teorema 3. *Sia U sottoinsieme debolmente compatto di uno spazio di Banach riflessivo V e sia $J(\cdot)$ funzionale debolmente semicontinuo inferiormente su U. Siano inoltre soddisfatte su (1.6) le ipotesi* 1, 2, 3 *e* 4 *del teorema 2. Allora si ha che*

  $$\lim_{n\to\infty} J(u_n^*) = J(u^*) = \min_{u \in U} J(u)$$

  e tutte le successioni debolmente convergenti di $\{u_n^*\}$ convergono a minimi di J. In particolare, se il minimo u^* è unico, $u_n^* \to u^*$ debolmente.

- il caso di funzionali convessi coercitivi

  Teorema 4. *Siano U un sottoinsieme fortemente chiuso e convesso di uno spazio di Hilbert V e $J(\cdot)$ un funzionale fortemente continuo, G-differenziabile e α-convesso su U. Siano inoltre soddisfatte su (1.6) le ipotesi* 1*,* 2*,* 3 *e* 4 *del teorema 2. Allora si ha che*

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n^*) = J(u^*) = \min_{u\in U} J(u),$$

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n^* - u^*|| = 0$$

  ove u^* è l'unico minimo di J su U.

Questi eleganti teoremi, tuttavia, si basano su ipotesi poco esplicite, tali che la loro verifica può richiedere molto lavoro. Vi sono però alcune situazioni in cui la verifica è più semplice.
Si sottolinea il fatto che i teoremi 2 e 3 affermano che $J(u_n^*) \to \inf J(u)$, ovvero che le soluzioni ottime approssimate costituiscono una successione minimizzante: questo risultato è cruciale nei problemi in cui siamo interessati non tanto ad approssimare il punto di minimo esatto u^*, quanto ad ottenere soluzioni con costo “abbastanza vicino” a quello ottimo.

1.4 Il problema Lineare Quadratico

Si parla del più noto problema di controllo ottimo, il problema LQ (*Lineare Quadratico*), quando:

- il sistema dinamico da controllare è di tipo lineare;
- le funzioni che compaiono nell'indice di comportamento sono quadratiche.

Consideriamo dunque un sistema lineare:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

L'obiettivo del problema di controllo LQ è minimizzare il funzionale di costo:

$$J = \frac{1}{2}y^T(t_f)S_f y(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left[y^T(t)Q(t)y(t) + u^T(t)R(t)u(t)\right]dt \tag{1.7}$$

ove le matrici S_f, $Q(t)$ e $R(t)$ sono tutte assunte simmetriche, le prime due semidefinite positive, mentre $R(t)$ definita positiva:

$$S_f = S_f^T \geq 0, \qquad Q(t) = Q(t)^T \geq 0, \qquad R(t) = R(t)^T > 0.$$

Solitamente le matrici S_f, $Q(t)$ e $R(t)$ sono scelte diagonali, in modo da penalizzare i quadrati delle singole componenti di $y(t_f)$, y ed u.

La soluzione di un problema di controllo ottimo LQ può essere ottenuta con la stessa procedura vista precedentemente:

1. Si definisce l'Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}y^T(t)Q(t)y(t) + \frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t) + p^T(t)\left[A(t)y(t) + B(t)u(t)\right] \tag{1.8}$$

2. Si minimizza $\mathcal{H}$ rispetto a u:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \rightarrow R(t)u(t) + B^T(t)p(t) = 0$$

per trovare:

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)p(t).$$

3. Si sostituisce il valore di $u^*(t)$ trovato in $\mathcal{H}$ per determinarne il valore ottimo:

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H}(y(t), u^*(t), p, t),$$

e si scrivono le equazioni di stato e co-stato:

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial p}^T \quad \rightarrow \quad \dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)u^*(t)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial y}^T \quad \rightarrow \quad \dot{p}(t) = -Q(t)y(t) - A^T(t)p(t)$$

4. Si risolve il sistema di $2n$ equazioni differenziali appena definito con le condizioni iniziali:

$$y(t_0) = 0$$

e

$$p(t_f) = \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)_{t_f}^T = S_f y(t_f) \tag{1.9}$$

5. Si sostituisce la soluzione delle equazioni differenziali $y^*(t)$ e $p^*(t)$, ottenute al passo precedente, nell'espressione del controllo ottimo trovata al passo 2.

Si dimostra che il funzionale di costo (1.7) è fortemente continuo e α-convesso[1]: ciò permette di concludere che J ha un unico punto stazionario che soddisfa le condizioni del Principio del Massimo. Una volta introdotta l'Hamiltoniana come in (1.8), tali condizioni possono scriversi nel seguente modo:

$$\begin{cases} \dot{y}^*(t) = \nabla_p \mathcal{H}(y^*, u^*, p^*) = Ay^*(t) + Bu^*(t) \\ \dot{p}^*(t) = -\nabla_y \mathcal{H}(y^*, u^*, p^*) = -A^T p^*(t) - Qy^*(t) \\ y^*(0) = y_0,\ p^*(t_f) = S_f y(t_f) \end{cases} \tag{1.10}$$

per ottenere:

$$\mathcal{H}(y^*(t), u^*(t), p^*(t)) = \min_v \mathcal{H}(y^*(t), v, p^*(t)) \quad \text{q.o per } t \in [0,1] \tag{1.11}$$

Data la particolare struttura quadratica dell'hamiltoniana, la (1.11) si può risolvere esplicitamente annullando la derivata rispetto a u, per ottenere:

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T p^*(t) \tag{1.12}$$

[1] Un funzionale si dice α-convesso se verifica la seguente disuguaglianza:

$$J\big((1-\theta)u + \theta v\big) \leq (1-\theta)J(u) + \theta J(v) - \frac{\alpha}{2}\theta(1-\theta)||u-v||^2$$

con $\alpha \in \mathbb{R}^+$, per ogni $u, v \in V$ e per ogni $\theta \in [0,1]$. Ponendo $\alpha = 0$ si ha l'usuale nozione di convessità.

che, sostituito nella (1.10), fornisce il sistema differenziale:

$$\begin{cases} \dot{y}^*(t) = Ay^*(t) + BR^{-1}B^T p^*(t) \\ \dot{p}^*(t) = -A^T p^*(t) - Qy^*(t) \\ y^*(0) = x,\, p^*(1) = y^*(1) \end{cases}$$

Quest'ultimo sistema esprime la condizione necessaria (e in tal caso sufficiente) di stazionarietà della soluzione ottima (u^*, y^*). Il controllo ottimo si costruisce poi in base alla (1.12).

1.4.1 Il Regolatore Lineare Quadratico e Matlab

Grazie all'ausilio dell'elaboratore elettronico Matlab, abbiamo potuto visualizzare importanti risultati fin qui visti solamente con una veste teorica.
Abbiamo seguito diverse strade, tentando approcci differenti, per poter visualizzare il comportamento della soluzione nel caso di interesse.
Vediamo brevemente i risultati salienti ottenuti:

1. **Built-in di Matlab: *lqr***
   Questa funzione predefinita nell'ambiente di calcolo che stiamo utilizzando, fornisce in output importanti risultati, i quali si appoggiano all'equazione differenziale di Riccati.

   Allo scopo di dedurre un'espressione del controllo ottimo che sia funzione di $y(t)$, anzichè di $p(t)$ come in:

   $$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)p(t)$$

   si parte dall'osservazione che nella (1.9) il valore finale del vettore stato aggiunto è proporzionale al valore finale di y, e si ipotizza pertanto una relazione di proporzionalità:

   $$p(t) = S(t)y(t), \tag{1.13}$$

   per cui varrà

   $$S(t_f) = S_f.$$

   A partire dalla (1.13) è possibile trovare la dipendenza di $p(t)$ da $y(t)$, cioè determinare $S(t)$. Vediamo come.
   Si differenzia la (1.13) rispetto al tempo:

   $$\dot{p}(t) = \dot{S}(t)y(t) + S(t)\dot{y}(t), \tag{1.14}$$

   e si sostituiscono in (1.14) le espressioni delle equazioni di stato e co-stato:

   $$\dot{y}(t) = A(t)y(t) - B(t)\overbrace{R^{-1}(t)B^T(t)B^T(t)S(t)y(t)}^{-u^*(t)=R^{-1}(t)B^T(t)p(t)}$$

   $$\dot{p}(t) = -Q(t)y(t) - A^T(t)\underbrace{S(t)y(t)}_{p(t)}$$

per ottenere:

$$-Q(t)y(t) - A^T(t)S(t)y(t) = \dot{S}(t)y(t) + S(t)\left[A(t)y(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)B^T(t)S(t)y(t)\right]$$

da cui, raccogliendo $y(t)$:

$$\left[\dot{S}(t) + S(t)A(t) - S(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)B^T(t)S(t) + Q(t) + A^T(t)S(t)\right]y(t) = 0$$

Ma tale relazione deve essere verificata per ogni $y(t)$, e quindi $S(t)$ deve verificare l'equazione differenziale:

$$\dot{S}(t) + S(t)A(t) - S(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)B^T(t)S(t) + Q(t) + A^T(t)S(t) = 0$$

ove $S(t_f) = S_f$, detta **equazione differenziale di Riccati**.
Una volta risolta tale equazione si trova un'espressione per $S(t)$, che può essere sostituita in quella che descrive il controllo ottimo $u^*(t)$, per poter esprimere quest'ultimo in funzione di $y(t)$:

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)S(t)y(t) = -\mathbf{K}(t)y(t) \tag{1.15}$$

dove $K(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)S(t)$ è detto **guadagno di Kalman**.

La funzione *lqr* ha la seguente sintassi:

[K,S,e]=lqr(A,B,Q,R,N)

ovvero, una volta che le passiamo le informazioni del sistema e del funzionale in input, otteniamo in output la matrice S, soluzione dell'associata equazione di Riccati, la matrice K di Kalman, data da $K = R^{-1}(B^T SN^T)$.
Sostituendo il valore trovato per u, come in (1.15), nel sistema dinamico:

$$\dot{y} = Ay + Bu = Ay - BKy = \underbrace{(A - BK)}_{U}y$$

otteniamo anche gli autovalori e della matrice $U = A - BK$.

2. **Minimizzatore *fminunc* di Matlab**
   Un'altra strada da seguire è quella di costruirci una funzione che rappresenti il nostro funzionale da minimizzare. Per far questo sfrutteremo due importanti "armi" dell'analisi numerica: risolveremo il sistema differenziale che descrive

la dinamica grazie al metodo di Eulero esplicito, ed utilizzeremo la formula del trapezio per approssimare l'integrale presente nell'espressione del funzionale.
Una volta costruita la funzione, potremo passarla allo script di Matlab contenente il minimizzatore *fminunc*, in grado di restituirci, tra le altre cose, il vettore u^* del controllo ottimo ed il valore assunto dalla funzione nel punto di minimo.
La strada seguita nella tesi, in particolare, prevede tre strade differenti:

- Un primo approccio consiste nel minimizzare la funzione $u \to J(u)$, come appena descritto;
- Un secondo approccio prevede di minimizzare la funzione $(u, y) \to J(u)$, grazie a una versione penalizzata del funzionale, la quale rende poco conveniente violare i vincoli definiti dal sistema differenziale;
- Un terzo approccio consiste nel passare al minimizzatore *fminunc*, oltre che il funzionale, anche il gradiente dello stesso, per poter ottenere risultati più precisi, grazie all'utilizzo di algoritmi più efficienti. In particolare, il gradiente può essere calcolato in due modi diversi:
  - Dato $u = (u_1, \dots, u_n)$, si ha che:
    $$\frac{\partial J}{\partial u_i} = \frac{J(u_1, \dots, u_i + \delta, \dots, u_n) - J(u)}{\delta}, \quad i = 1, \dots, n$$
    in cui assumiamo δ molto piccolo, ad esempio $\delta \simeq 10^{-6}$.
  - Seguendo le linee della teoria elaborata durante la dimostrazione del Principio del Massimo, si definisce il gradiente di J come:
    $$J'(u) = p(t)^T f_u(y(u,t), u(t), t) \nabla_u L(y(u,t), u(t), t)^T$$

Riportiamo come esempio gli andamenti della soluzione ottima trovata con Matlab, che tendono esponenzialmente a zero.

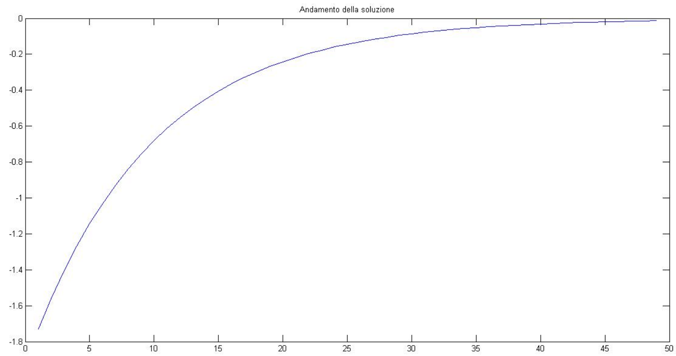
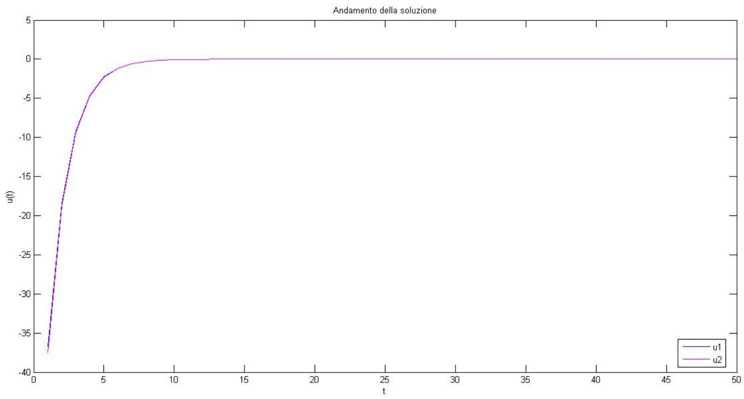
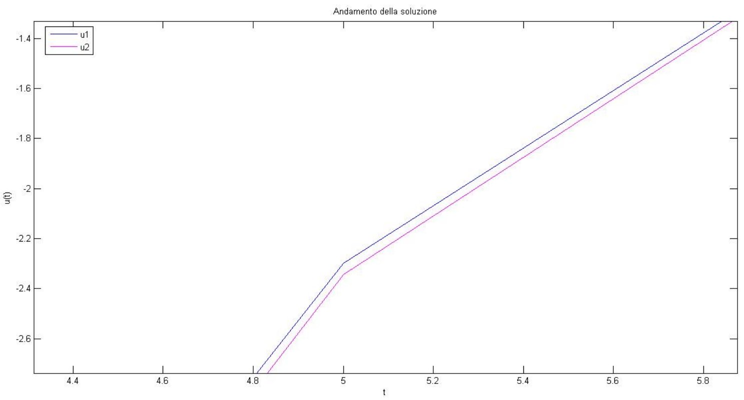


Figura 1.1: Caso unidimensionale



(a) Andamento della soluzione



(b) Zoom sulle due componenti della soluzione

Figura 1.2: Caso bidimensionale

Bibliografia

[1] Camillo Trapani, *Teoria degli operatori*, 2007-2008, URL: http://math.unipa.it/~trapani/Operatori/generale.pdf

[2] Lorenzo Pantieri, Tommaso Gordini, *L'arte di scrivere con LaTeX*, Edizione 2012, URL: http://www.lorenzopantieri.net/LaTeX_files/ArteLaTeX.pdf

[3] Lorenzo Pantieri, Tommaso Gordini, *L'arte di fare una presentazione con Beamer*, Luglio 2010 , URL:http://www.lorenzopantieri.net/LaTeX_files/Presentazioni.pdf

[4] Roberto Ferretti, *Appunti sui problemi di minimizzazione di funzionali e sulla loro approssimazione*, 1996

[5] Marcello Pignataro, *Introduzione al calcolo delle variazioni e ai principi variazionali nella meccanica delle strutture*, Esagrafica, Roma 2003

[6] Luigi Biagiotti, Roberto Zanasi, *Teoria dei sistemi e del controllo*, 2010-2011, URL: http://www.dii.unimore.it/~lbiagiotti/MaterialeTSC/DispensaControlloOttimo.pdf

[7] Giuliano Zambonin, Sandro Zampieri , *Introduzione alla tecnica di programmazione dinamica per il controllo ottimo*, 2011-2012, URL: http://tesi.cab.unipd.it/40881/1/tesi_Zambonin_Giuliano.pdf

[8] Marco Trubian, *Dispensa del Corso di Complementi di Ricerca Operativa*, 2008, URL:http://homes.di.unimi.it/~trubian/OttNonLineare.pdf

[9] Andrea Calogero, *Appunti di Calcolo delle Variazioni e Controllo Ottimo*, 2013, URL: http://www.matapp.unimib.it/~calogero/pdf/dispensaCV_CO.pdf

[10] Davide Giglio, *Modelli e metodi per l'ottimizzazione e il controllo*, 2012-2013, URL: http://www.dist.unige.it/giglio/didattica/mmocfiles/files/02_ControlloOttimo.pdf