UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "ROMA TRE"
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della tesi di Laurea in Matematica
di

Michela Sacchi

Soluzioni periodiche di prima specie in "Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste" di H. Poincaré

Relatore

Prof. Corrado Falcolini

ANNO ACCADEMICO 2002 - 2003
Luglio 2003

Classificazione AMS : 70F07, 83C10, 34A12, 70H15, 70H05.
Parole Chiave : Meccanica hamiltoniana, Trasformazioni canoniche, Teoria delle perturbazioni, Problema dei tre corpi, Soluzioni periodiche, Orbite periodiche.

Introduzione

Con questa tesi abbiamo tentato un approccio principalmente divulgativo a quello che è senz'altro l'argomento più trattato di tutta la meccanica celeste: il problema dei tre corpi.

Il problema dei tre corpi, che fu descritto da Whittaker come "*il più celebrato fra tutti i problemi dinamici*"[1] e che per Hilbert "*presentava tutti i requisiti per essere un buon problema matematico*"[2], può essere così esplicitato: tre masse si muovono nello spazio influenzate dalla loro reciproca attrazione gravitazionale; note le loro condizioni iniziali, determinarne il moto. Come la maggior parte dei problemi matematici, la semplicità della sua formulazione nasconde una soluzione piuttosto complessa. Infatti, a differenza del problema dei due corpi, che può essere facilmente risolto per mezzo di funzioni elementari, il problema dei tre corpi è un problema non lineare molto complicato, la cui risolubilità è decisamente diversa. Oltre alla sua natura, per certi aspetti misteriosa, il problema dei tre corpi affascina e cattura l'attenzione di alcuni fra i più grandi scienziati del mondo, e non solo, anche per un altra ragione: esso è profondamnete collegato alla questione della stabilità del sistema solare.

> "*Vi sono molte ipotesi sulle origini del cosmo, ma altrettante sulla sua fine. Quale sarà il futuro dell'universo*?"

La domanda, che tutti almeno una volta ci siamo posti, non ha ancora una risposta. Dal 1750 all'inizio del secolo scorso sono stati pubblicati più di 800 scritti riguardanti l'argomento, e la necessità di trovare una risposta plausibile al problema ha attirato l'attenzione non solo degli astronomi, ma anche, e soprattutto, dei matematici.

[1] Tratta da [3].

[2] Hilbert pronunciò queste parole in un famoso discorso sui problemi matematici al *Congresso di Parigi* del 1900.

Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste

Abbiamo scelto di riportare il pensiero del grande fisico matematico francese Henrì Poincaré seguendo la sua opera più famosa intitolata "Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste". Quando abbiamo cominciato a documentarci circa le eventuali edizioni tradotte di questo testo, abbiamo notato che non esiste alcuna versione in italiano; a parte l'originale, scritto in francese, sono disponibili unicamente le due traduzioni in lingua inglese [25] e [23], curate dalla NASA e dall' americano D. L. Goroff, dell'Università di Harvard. In questa sede abbiamo adottato come testo di riferimento l'edizione tradotta [25]. Non potendo effettuare una raccolta completa di tutti gli argomenti trattati nell'intera opera, costituita di tre tomi di 300 pagine circa ciascuno, dopo un'attenta ricerca, ci è sembrato particolarmente interessante il terzo capitolo del primo tomo, dedicato allo studio delle soluzioni periodiche relativamente al problema dei tre corpi e a quello degli n corpi in generale. Siamo rimasti colpiti dall'enfasi con cui Poincaré parla di questi "strumenti" matematici definendoli "*l'unica breccia per entrare in una fortezza altrimenti inespugnabile*". Abbiamo rielaborato i paragrafi che ci sono sembrati più significativi riportando esattamente i concetti espressi da Poincaré e mantenendo le stesse notazioni dell'autore per coerenza con l'originale.

Quando Henri Poincaré iniziò a lavorare alla sua opera "Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste" era il 1885. Egli rispose ad un bando di quell'anno che annunciava un'importante competizione internazionale per matematici di tutto il mondo che veniva sponsorizzata da re Oscar II di Svezia e Norvegia in occasione del suo sessantesimo compleanno. Per Poincaré la gara rappresentò uno stimolo a raccogliere la grande quantità di idee che egli aveva sviluppato negli anni precedenti ma focalizzò la sua attenzione principalmente sul problema ristretto dei tre corpi. Il lavoro col quale Poincaré risultò vincitore era intitolato "*Sur le probléme des trois corps et les équations de la dynamique*". La *memoria* fu ampliamente rimaneggiata, corretta e approfondita in una lunga serie di note e saggi, che culminarono nella *summa* dei tre volumi de "Le méthodes nouvelles de la mécanique céleste" (1892, 1893, 1899).

Cercheremo quindi di addentrarci nello studio del problema degli n corpi, e in particolare dei tre corpi, facendo riferimento principalmente all'opera di Poincaré che con il suo stile incisivo, conciso e ricercato per i pensieri trattati rimane uno dei testi scientifici più popolari del XX secolo.

Prima di tutto vogliamo riassumere brevemente il contenuto dei tre volumi.

Volume I

Fu pubblicato nel 1892 ed è quello che, rispetto agli altri, contiene maggiori dettagli sui risultati analitici riportati nell'intera opera. In questo primo volume Poincaré sviluppa argomenti che aveva già trattato in "*Sur le problèmes des trois corps et les équations de la dynamique*", come ad esempio le soluzioni periodiche, gli esponenti caratteristici, le soluzioni asintotiche e la non esistenza degli integrali uniformi. Innovativo è invece il lungo capitolo dedicato allo sviluppo in serie delle funzioni perturbatrici.

Volume II

Comparve l'anno seguente alla pubblicazione del primo. Questo volume è interamente dedicato alle teorie di astronomi moderni come Newcomb, Gyldén, Lindstedt e Bohlin. La maggior parte del materiale riportato in questo volume viene discusso per la prima volta in assoluto, sebbene ci siano ancora riferimenti a "*Sur le problèmes des trois corps et les équations de la dynamique*" sulle serie di Lindstedt e di Bohlin.

Volume III

Fu pubblicato nel 1899. In questo volume sono sviluppate le idee, per così dire, geometriche di Poincaré. Egli ritorna a discutere gli invarianti integrali, il problema della stabilità, le soluzioni periodiche di seconda specie, quelle asintotiche. Potremmo dire che questo volume è una sorta di resoconto del lavoro precedente con qualche modifica aggiunta.

Contenuto della tesi

Occupiamoci ora dei contenuti specifici di questa tesi.

Abbiamo tentato di raccogliere più informazioni possibili e di approfondire gli argomenti, a nostro giudizio, più interessanti raccogliendo anche note bibliografiche e usando nuovi testi come ulteriore supporto per puntualizzarli. Il metodo che abbiamo adottato è stato quello di discutere i "problemi" senza penetrare troppo nei dettagli delle differenti applicazioni; abbiamo cercato di presentarli in modo semplice e chiaro riportando i paragrafi dell'opera di Poincaré che ci sono sembrati più consoni e più vicini agli argomenti trattati:

- **primo capitolo**: come i vecchi testi di meccanica celeste, anche noi abbiamo inserito in questa tesi un capitolo dedicato alla meccanica hamiltoniana, strumento indispensabile per la teoria delle perturbazioni. Semplicemente, abbiamo selezionato gli argomenti che ci sarebbero stati utili nel proseguo e li abbiamo trascritti riservando ampio spazio alla teoria di Hamilton-Jacobi e alle principali proprietà relative alle equazioni canoniche e alle trasformazioni canoniche;

- **secondo capitolo**: abbiamo introdotto il problema degli n corpi. Abbiamo suddiviso questo capitolo in due sezioni: nella prima abbiamo accennato alla teoria delle perturbazioni presentando il problema fisico degli n corpi alla luce dei risultati piú recenti. Abbiamo enunciato il teorema di esistenza e unicità di Cauchy e descritto alcune soluzioni particolari del problema. Nella seconda parte, invece, abbiamo concentrato l'attenzione sulle difficoltà che si incontrano nella risoluzione delle equazioni differenziali che descrivono il moto delle n particelle. Abbiamo sviluppato il concetto di integrabilità di un sistema dinamico proponendo due alternative per la risoluzione:

  i) l'abbassamento dei gradi di libertà per mezzo di integrali primi del moto;

  ii) l'utilizzo di opportuni cambi di variabile nella teoria di Hamilton-Jacobi.

  Un esempio di sistema completamente integrabile è il problema di Keplero o problema dei due corpi; abbiamo scelto di trascriverlo come lo presenta Poincaré nella sua opera;

- **terzo capitolo**: è dedicato al problema dei tre corpi. Prima abbiamo fornito una visione generale e moderna del problema, poi abbiamo riportato i paragrafi dell'opera di Poincaré ad esso relativi;

- **quarto capitolo**: abbiamo introdotto le soluzioni periodiche, classificandole ed esponendo il metodo di continuazione analitica per calcolarle;

- **quinto capitolo**: é interamente dedicato alla teoria lunare di Hill. Hill fu il primo a scoprire le cosiddette soluzioni periodiche di *prima specie*, come le classificò Poincaré qualche tempo dopo. In un certo senso il quinto capitolo riporta una vera e propria applicazione di queste soluzioni;

- **sesto capitolo**: in questo capitolo troviamo un paragrafo sulle possibili applicazioni delle soluzioni periodiche proposte da Poincaré e, per così dire, la conclusione di questa tesi. Quest'ultima si pone come spunto di riflessione su come sia attuale e sempre crescente, l'attenzione della comunità scientifica nei confronti del problema dei tre corpi. Ci é sembrata una buona idea fare una ricerca, non troppo elaborata ma piuttosto indicativa, sul numero di scritti pubblicati dall'inizio del secolo fino ai giorni nostri su questo argomento.

Problema dei tre corpi

Che cos'è il *problema degli n corpi*?
Immaginiamo n particelle puntiformi di masse arbitrarie, posizioni e velocità iniziali date che si muovono nello spazio soggette solo alla legge della mutua attrazione gravitazionale di Newton. La forma in cui Newton espresse la sua legge avrebbe richiesto un sistema di $3n$ equazioni differenziali del secondo ordine, una per ogni componente dell'accelerazione di ogni particella. Poincaré riduce le equazioni che governano questi e molti altri sistemi meccanici in "*forma hamiltoniana o canonica*". Nelle sue notazioni abbiamo p coppie di variabili coniugate x_i, y_i e una funzione F di queste $2p$ variabili nota come *funzione hamiltoniana* tale che ha senso il seguente sistema hamiltoniano di

$2p$ equazioni differenziali del primo ordine:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, p \tag{1}$$

dove

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \cdots$$

è l'hamiltoniana del sistema sviluppata in serie di potenze di μ. Queste equazioni, come dicevamo, sono espresse in *forma canonica* e p è il numero di *gradi di libertà* del sistema. Lo spazio di dimensione $2p$ che corrisponde a tutti i possibili valori delle variabili è detto *spazio delle fasi* del sistema. Sulla base di quanto appena detto possiamo definire il *problema generale dei tre corpi* ponendo $p = 3$ nel sistema precedente. Analiticamente esso è un sistema di nove equazioni differenziali del secondo ordine di questo tipo:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \dfrac{Gm_2m_1}{r_{21}^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \dfrac{Gm_3m_1}{r_{31}^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \dfrac{Gm_3m_2}{r_{32}^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) + \dfrac{Gm_1m_2}{r_{12}^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ m_3\ddot{\mathbf{r}}_3 = \dfrac{Gm_1m_3}{r_{13}^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + \dfrac{Gm_2m_3}{r_{23}^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3). \end{cases}$$

Facendo dei cambi di variabile appropriati possiamo ridurre il precedente sistema a uno di 18 equazioni differenziali del primo ordine del tipo (1). Nonostante esista la possibilità concreta di ridurre i gradi di libertà del sistema dinamico che lo descrive, per mezzo degli integrali primi del moto, il problema dei tre corpi rimane comunque molto difficile da integrare. L'unica cosa che possiamo fare è approssimare il problema fisico in questo modo: due corpi, chiamati *primari*, si muovono attorno al loro centro di massa, seguendo orbite circolari sotto l'influenza della forza di attrazione gravitazionale; il terzo corpo, detto *planetoide*, assunto di massa trascurabile rispetto agli altri due, si muove sul piano dei primari senza avere influenza alcuna su di loro, subendo, al contrario, la loro attrazione. Il problema *ristretto* dei tre corpi può essere *circolare* o *ellittico*, a seconda della natura delle orbite dei primari. Analogamente, il problema è detto *planare* o *non planare*, a seconda che il terzo corpo si muova o meno nel piano contenente le orbite dei primari. Quando non viene usato nessun tipo di qualificazione, il problema ristretto usualmente si riferisce al caso *circolare-planare* descritto da Poincaré. Per il problema dei tre corpi Poincaré introduce delle variabili in cui le masse dei primari sono μ e $1-\mu$. Il caso simmetrico $\mu = \frac{1}{2}$ prende il nome di *problema di Copenaghen*, il caso $\mu = 0$ si riduce al *problema di Keplero*, mentre per μ piccolo esso può essere studiato come una perturbazione del problema dei due corpi sviluppando l'hamiltoniana in serie di potenze di μ. Il caso in cui μ è vicino a zero è qualche volta chiamato *problema di Poincaré*, perché è il caso da lui ampiamente discusso nella sua opera.

Soluzioni periodiche

La non integrabilità di certi sistemi escludeva la possibilità di lavorare con soluzioni generiche del problema dei tre corpi, ma, paradossalmente, questo aspetto negativo risultava vantaggioso in quanto dava l'opportunità di spiegare lo stesso problema studiando soluzioni speciali ritenute più semplici, come ad esempio le **soluzioni periodiche**.
Poincaré "colse" questa occasione. Hadamard, matematico suo contemporaneo, racconta:

> "... *nessun argomento catturò la sua [di Poincaré] attenzione più di questo [sulle soluzioni periodiche]. Si potrebbe dire che ne fece il suo oggetto di studio per tutta la vita* ..." *[18]*

E' semplice rendersi conto dello speciale significato che Poincaré dà alle soluzioni periodiche dall'enfasi con cui egli ne parla:

> "...*all'inizio sembra che l'esistenza delle soluzioni periodiche non abbia nessuna importanza per fini pratici. Infatti la probabilità di trovare condizioni iniziali del moto che corrispondono esattamente a quelle di soluzioni periodiche è pressoché nulla. Ciò nonostante può accadere che esse vi differiscano di molto poco. Inoltre queste soluzioni periodiche sono assai importanti e utili perché rappresentano* ***l'unica breccia per tentare di penetrare in una fortezza altrimenti inespugnabile***...". *[24], § 36.*

Poincaré dedicò gran parte della sua opera allo studio delle soluzioni periodiche. La discussione della teoria ad esse relativa rappresenta una parte fondamentale del suo lavoro. La periodicità delle soluzioni rende più semplice determinarle e facilita lo studio delle loro proprietà: infatti è possibile interpretare il loro comportamento dal passato più remoto al futuro più lontano semplicemente esaminando un arco di tempo finito. Inoltre, c'è anche un certo vantaggio pratico da non sottovalutare: le soluzioni periodiche riescono ad approssimare bene la maggior parte delle soluzioni dei sistemi hamiltoniani.

Osservazione. *Oltre al fatto che le soluzioni periodiche sono più semplici da studiare, esse rappresentano il punto di partenza per la classificazione e lo studio di altre soluzioni particolari, quelle* asintotiche*: soluzioni cioè che si* muovono *attorno a quelle periodiche.*

La teoria di Poincaré porta ad una congettura, fra le tante da lui ipotizzate, circa la densità delle soluzioni periodiche:

Congettura. *"... data una particolare soluzione del problema ristretto dei tre corpi forse è possibile trovare una soluzione periodica, di periodo più o meno lungo, tale che la differenza fra queste due soluzioni sia piccola quanto vogliamo, e valga per un qualsiasi intervallo di tempo scelto a piacere, purché non abbia luogo nessuna collisione fra le masse o fuga." [24], § 36.*

Vediamo quindi cosa si intende per **soluzione periodica**.
Prima di tutto diamo due definizioni generali.

Definizione. *Si dice **sistema dinamico** un insieme di n equazioni differenziali del primo ordine nelle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tale che*

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Definizione. *Se il sistema* (2) *è soddisfatto per*

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t) \tag{3}$$

diremo che le equazioni (3) *definiscono una **soluzione** di* (2)*.*

Sia

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

un sistema di equazioni differenziali e

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t) \tag{5}$$

una particolare soluzione di tale sistema.

Definizione. *Se al tempo T le n variabili φ_k assumono di nuovo il loro valore iniziale, cioè se vale la proprietà*

$$\varphi_k(0) = \varphi_k(T),$$

*allora le funzioni φ_k si definiscono **periodiche** di periodo T. Ciò significa che al tempo T avremo le stesse condizioni che al tempo 0; coseguentemente*

$$\varphi_k(t) = \varphi_k(t + T), \ \forall t.$$

Osservazione. *Secondo la definizione usuale*

Definizione. *Sia $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ una soluzione di (2), definita in un qualsiasi intervallo $I \subset \mathbb{R}$, a valori in $D \subset \mathbb{R}^n$, se*

$$\exists\, T \geq 0 \ t.c.\ \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + T),$$

*essa si dice **periodica** di **periodo** T.*

una funzione $\mathbf{x}$ è periodica se esiste $T > 0$ tale che $\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t)$ per ogni t. La precedente è la definizione di soluzione periodica che Poincaré usa in [24]. Si direbbe che le due definizioni siano identiche. In realtà esiste una differenza di fondo, tipica del pensiero di Poincaré. Poincaré considera una soluzione del problema degli n corpi periodica, se le distanze reciproche fra le masse lo sono, indipendentemente dal fatto che lo siano o meno le funzioni che definiscono le coordinate degli n corpi. Quindi le configurazioni spaziali degli n corpi all'inizio e alla fine di un periodo non devono essere necessariamente le stesse, ma possono differire di un qualsiasi angolo.

Egli provò che, nel caso speciale del problema dei tre corpi in cui due delle tre masse sono molto piccole rispetto alla terza, è sempre possibile scegliere le condizioni iniziali per le equazioni differenziali che descrivono il moto, in modo tale che le distanze relative dei tre corpi siano funzioni periodiche del tempo. Dimostrò quindi l'esistenza di tali soluzioni, dando ampio spazio anche ai risultati ottenuti da Hill. Poincaré classifica le soluzioni periodiche in tre categorie:

- **prima specie**: con inclinazioni nulle e eccentricità molto piccole;
- **seconda specie**: con inclinazioni nulle e eccentricità finite;
- **terza specie**: con inclinazioni finite e eccentricità molto piccole.

Addirittura egli ipotizzò l'esistenza di una *quarta specie* di soluzioni periodiche per cui le inclinazioni e le eccentricità sono finite, ma non fu in grado di dimostrarne l'esistenza, cosicchè questa rimane solo una delle tante *congetture* di Poincaré. Tutte le soluzioni periodiche studiate da Poincaré sono la continuazione analitica delle soluzioni del problema dei due corpi e quindi esistono solo per valori del parametro μ sufficientemente piccoli. La dimostrazione dell'esistenza delle soluzioni periodiche per il problema dei tre corpi avviene quindi attraverso il metodo, detto appunto, di "*continuazione analitica*". Essendo esso un metodo perturbativo, richiede l'utilizzo di un parametro μ che è una quantità fisica e rappresenta una delle masse dei primari nel problema circolare-planare-ristretto. La dimostrazione dell'esistenza di tali soluzioni dipende principalmente dall'annullarsi o meno di una particolare matrice Jacobiana. In realtà questo risultato era già comparso in un testo antecedente "Les méthodes nouvelles"[3], ma l'idea che queste soluzioni periodiche possano essere utili per il calcolo di altre soluzioni rappresenta una novità. Tra le soluzioni di *prima specie*, che includono le soluzioni studiate da Hill nella sua Teoria Lunare, troviamo, ad esempio, quelle relative ai satelliti di Giove, studiati da Lagrange, e il moto di Hiperione, satellite di Saturno[4], analizzato da Tysserand.

[3]"*Sur le problèmes des trois corps et les équations de la dynamique*".

[4]Sebbene Poincaré non diede nessuna illustrazione pratica delle soluzioni di seconda e terza specie, le possiamo comunque trovare in natura, ad esempio nel moto delle comete.

Cenni sulla Teoria lunare di Hill

Verso il 1870, comparvero due scritti che ebbero un'importanza fondamentale nello sviluppo della meccanica celeste e in particolare del problema dei tre corpi. Nel 1877, George William Hill, astronomo del "N. S. Naval Almanac Office", pubblicò uno scritto sul moto del perigeo[5] lunare e fu qui che apparve per la prima volta un approccio diverso allo studio del problema dei tre corpi dai tempi di Lagrange (cfr.[19], [21]). L'anno seguente, egli pubblicò, sull' "*American Journal of Mathematics* ", un altro saggio sulla teoria lunare in cui discuteva in modo più completo metodi per il calcolo di soluzioni periodiche e mostrava un'importante applicazione dell'integrale di Jacobi. Questi due famosi scritti ebbero un grande successo non solo per l'importanza che riscontrarono a livello scientifico, ma anche per la loro originalità e per l'eleganza della forma. Le idee di Hill influenzarono Poincaré, specialmente in relazione alla sua teoria sulle soluzioni periodiche.
Gli studi di Hill cominciarono quando egli notò una certa discrepanza fra i valori ottenuti sperimentalmente circa il moto del perigeo lunare e quelli calcolati. Subito pensò che queste nascevano dal fatto che forse, nei calcoli, era stata tralasciata l'azione di alcune forze esercitate sulla Luna non ancora scoperte. Fu così che iniziò a studiare il moto del perigeo lunare in modo più che approfondito. Egli apportò delle novità assai rilevanti rispetto ai metodi di studio precedenti:

- suppose che l'orbita descritta dalla Luna fosse circolare;
- studiò i moti tenendo presenti le perturbazioni solari;
- sviluppò le soluzioni in termini di potenze del rapporto fra il moto

[5]Punto di un'orbita attorno alla Terra in cui è minima la distanza dal nostro pianeta.

medio[6] del Sole e della Luna;

- escluse nei calcoli l'eccentricità solare e la parallasse;
- scrisse le equazioni del moto usando coordinate ortogonali invece che polari.

Usando queste semplificazioni, le espressioni delle coordinate della Luna in un sistema di riferimento mobile, risultavano semplificate e periodiche. Egli ideò un altro espediente: utilizzò nei suoi calcoli delle variabili complesse. Sostituendole nelle equazioni differenziali, si originava un sistema infinito di equazioni algebriche, i cui coefficienti erano funzioni della sola variabile m pari al rapporto fra i due moti medi suddetti. Immaginando che le soluzioni periodiche da lui scoperte avrebbero avuto importanza rilevante non solo nella teoria lunare ma anche altrove, egli fece variare il valore di m, prendendo lune di diverse lunazioni[7], e ottenne una famiglia di differenti soluzioni periodiche che studiò in dettaglio. L'ultima soluzione periodica dava origine ad una curva con due cuspidi, allungata sull'asse delle ordinate, che egli chiamò

---

[6] Diamo la seguente

Definizione. *Il* ***moto medio*** *è uguale alla frequenza angolare media $\overline{\omega}$ di un corpo nell'orbita ellittica ed è definito come*

$$n = \frac{2\pi}{T}$$

dove T è il periodo dell'orbita.

Esso appare, ad esempio, nella terza legge di Keplero

$$n^2 a^3 = GM$$

dove G è la costante gravitazionale, M è la massa del corpo centrale e a è il semiasse maggiore dell'ellisse tracciata dalla massa M. Dalla terza legge di Keplero quindi segue che

$$n = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} = \frac{h}{a^2\sqrt{1-e^2}}$$

dove h è il momento angolare ed e è l'eccentricità dell'orbita.

[7] *Lunazione*: intervallo di tempo fra due *lune nuove*. *Luna nuova*: fase della Luna in cui il lato rivolto verso la Terra è buio. Le *lune nuove* hanno luogo quando la Luna si trova fra la Terra e il Sole.

luna di massima lunazione. In realtà questo appellativo risultò errato, infatti lo stesso Poincaré dimostrò che la curva era diversa e affermò che esistevano lune che andavano oltre la *luna di massima lunazione.*

Applicazione di Poincaré

Hill ricavò le equazioni del moto della Luna in un sistema di riferimento mobile di coordinate ξ, η. Esse sono le seguenti

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} - 2n\dfrac{d\eta}{dt} + \left(\dfrac{\mu}{r^3} - 3n^2\right)\xi = 0 \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} + 2n\dfrac{d\xi}{dt} + \dfrac{\mu}{r^3}\eta = 0 \end{cases} \tag{6}$$

dove n è la velocità angolare della Luna[8]; in questo caso le soluzioni sono periodiche di *prima specie.* Le equazioni (6) ammettono l'integrale

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 - \frac{\mu}{2} - \frac{3}{2}n^2\xi^2 = C, \tag{8}$$

noto come **integrale di Jacobi** con C costante di integrazione.
Hill ha studiato come le soluzioni di *prima specie* variano al variare di C: la traiettoria relativa è una curva simmetrica chiusa, simile ad un'ellisse il cui asse maggiore si trova sull'asse η. Quando C è molto piccola l'ellisse che otteniamo è molto simile ad una circonferenza e la sua eccentricità aumenta rapidamente con C. Per grandi valori di C la curva comincia ad assumere forme diverse da un'ellisse e la relazione fra asse maggiore e minore continua ad aumentare con C. Infine per un certo valore di C, che chiameremo C_0, la curva presenta due *punti di regresso* situati sull'asse η: Hill la chiama "*luna*

[8] Questa è la forma particolare dell'espressione generale in [27] § 10.4.2.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} - 2n'\dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \xi} \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} + 2n'\dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \eta} \end{cases} \tag{7}$$

con $F = \frac{\mathcal{K}}{r} + n'^2\frac{3}{2}\xi^2$ e $\mathcal{K} = k^2(m_T + m_L)$ dove k^2 rappresenta la costante di gravitazione universale e m_T, m_L la massa della Terra e della Luna rispettivamente.

di massima lunazione"[9]. I suoi calcoli, basati a volte sull'uso delle serie, sono troppo lunghi per trovare posto in questa sede, per cui rimandiamo direttamente all'opera di Hill "*Researches in the Lunar Theory*" (cfr. [20]).[10] Ecco come egli arriva alla "*luna di massima lunazione*". Hill si esprime in questo modo:

> "*La Luna corrispondente all'ultima curva*[11] *(Luna di Massima Lunazione) è, di tutta la classe dei satelliti considerati, quella che ha una lunazione più lunga. Se questa classe di satelliti possa essere prolungata o meno oltre questa Luna, può essere deciso solo con ulteriori sviluppi delle quadrature meccaniche. E' comunque certo che le orbite, se esistono, non intersecano le linee di quadratura (cioè non sono in quadratura) e che le Lune che le descrivono oscillano avanti e indietro senza allontanarsi più di 90 gradi dai punti di congiunzione*[12] *o di opposizione*[13]"

Nonostante quest'ultima frase, che evidenzia una sorta di intuizione da parte di Hill circa la possibilità di prolungare la "*luna di massima lunazione*" oltre il valore C_0, egli non proseguì con gli studi.

Osservazione. *Poincaré, nella sua opera, ribadisce che: "c'è solo una semplice intuizione da parte dell'autore [Hill] ma non ci sono calcoli o ragiona-*

[9] La curva assume la forma di un limone (simile ad un'ellisse con asse maggiore sull'asse η) con due cuspidi. Vedi 1.

[10] Quest'opera apparve nel 1878 nel nuovo "*American Journal of Mathematics*". Questa pubblicazione contiene nuove importanti idee circa il problema dei tre corpi. Brown scrisse nel 1915 che l'opera di Hill "*era diventata una pietra miliare per lo sviluppo della Meccanica Celeste.*" e inoltre "... *secondo Poincaré* [all'epoca era senza dubbio uno dei più stimati scienziati] *la sua pubblicazione reppresenta il seme dello sviluppo portato avanti in tutta la Meccanica Celeste* ...".

[11] Molto probabilmente, qui, con il termine Luna, Hill intende un satellite il cui moto è rappresentato da una curva corrispondente a dei valori specifici di C e non la Luna come satellite della Terra.

[12] *Congiunzione*: posizione che un pianeta raggiunge quando la sua elongazione é di 0 gradi. Un oggetto in congiunzione non é normalmente visibile in quanto é presente in cielo contemporaneamente al Sole.

[13] *Opposizione*: posizione che un pianeta raggiunge quando la sua elongazione é di 180 gradi. All'opposizione ci si aspetta che un oggetto sia nelle migliori condizioni di visibilità.

menti che lo confermino. Inoltre semplici considerazioni di prolungamento analitico mi permettono di affermare che egli è in errore quando afferma che questo tipo di satelliti non si trova mai in quadratura".

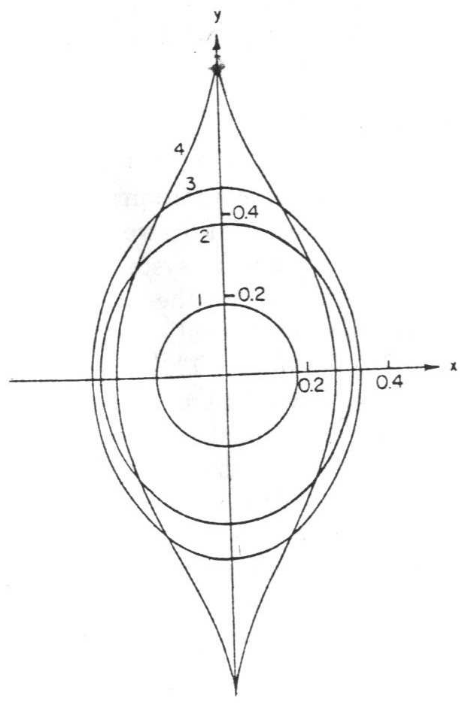

Figura 1: Orbite di Hill

Ci chiediamo quindi se esistono davvero soluzioni di *prima specie* per valori di $C > C_0$, o, in altre parole, se la classe di satelliti studiati da Hill possa essere prolungata oltre la "*luna di massima lunazione*".
Poincaré nel rispondere alla domanda fatta precedentemente, descrive in modo dettagliato la procedura da lui adottata nella risoluzione del problema. Riprendiamo la seguente TABELLA da [27].

No.	$\xi(0)$	$\eta(T/4)$	m	C
1	0.17610	0.17864	0.0808489	6.50888
2	0.31232	0.36897	0.25	4.13277
3	0.33235	0.45973	0.3333333	3.72018
4	0.27180	0.78190	0.5609626	2.55787

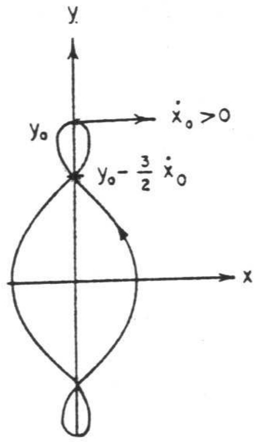

Figura 2: Orbita con cappi per il problema di Hill

La prima colonna si riferisce al numero di curve studiate da Hill. La prima orbita rappresenta quella della Luna[14], mentre l'ultima è l'orbita della "*luna di massima lunazione*". La famiglia di orbite può essere prolungata per valori di m ancora più grandi. Queste nuove orbite, che sviluppano dei cappi da entrambi i lati, furono ignorate da Hill, ma furono individuate da Poincaré. Discutiamo la loro esistenza nelle righe seguenti.
Se consideriamo le lune di massima lunazione, avremo una cuspide sull'asse delle η, che indichiamo con η_0. Per questa curva il valore della costante C è pari a $\frac{2}{\eta\left(\frac{T}{4}\right)}$, dove T rappresenta il periodo. Costruiamo uno sviluppo di Taylor centrato nel punto $\left(0, \frac{2}{C}\right)$. In generale abbiamo

$$\xi = \xi_0 + \xi_0' t + \xi_0'' \frac{t^2}{2} + \xi_0''' \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

e analogamente per le η. Le condizioni iniziali in $t = 0$ sono

$$\xi_0 = 0, \quad \eta_0 = \frac{2}{C}, \quad \xi_0' = \eta_0' = 0^{15}.$$

[14] Se la rappresentassimo su un sistema di coordinate vedremmo una circonferenza centrata nell'origine.

[15] Le derivate nel punto sono nulle perchè abbiamo una cuspide.

Ricordiamo che, dalle equazioni del moto (7) notiamo che

$$\xi_0'' = 2\eta_0' + F_\xi^0 \Rightarrow \xi_0'' = F_\xi^0,$$
$$\eta_0'' = -2\xi_0'' + F_\eta^0 \Rightarrow \eta_0'' = F_\eta^0.$$

Sull'asse η si ha che $F_\xi^0 = 0, F_\eta^0 = -\frac{1}{\eta_0^2}$; di conseguenza

$$\xi_0'' = 0, \quad \eta_0'' = -\frac{1}{\eta_0^2}.$$

Analogamente calcoliamo le derivate di ordine tre

$$\xi_0''' = -2\frac{1}{\eta_0^2}, \quad \eta_0''' = 0.$$

Lo sviluppo quindi sarà il seguente

$$\begin{cases} \xi = -\dfrac{t^3}{3\eta_0^2} + \cdots \\ \eta = \eta_0 - \dfrac{t^2}{2\eta_0^2} + \cdots . \end{cases}$$

Ignoriamo ora di conoscere la cuspide; allora le condizioni iniziali in $t = 0$ diventano

$$\xi_0 = 0, \quad \eta_0 \neq \frac{2}{C}, \quad \xi_0' \neq 0, \quad \eta_0' = 0^{16}.$$

Avremo che ξ ammetterà nel suo sviluppo solo potenze dispari del tempo, mentre η solo potenze pari. Analogamente al caso precedente avremo che

$$\xi_0'' = 0, \quad \xi_0''' = -\xi_0'(1 + \frac{1}{\eta_0^3}) - \frac{2}{\eta_0^2},$$
$$\eta_0' = -2\xi_0'' - \frac{1}{\eta_0^2}, \quad \eta_0''' = 0.$$

Siccome abbiamo costruito un nuovo sviluppo in un intorno di una cuspide, possiamo supporre $\xi_0' = 0$ per cui

$$\xi_0'' \approx -\frac{2}{\eta_0^2}.$$

[16] Siccome suppongo di non avere una cuspide impongo che una delle due derivate sia diversa da zero, ad esempio ξ_0'.

Quindi

$$\xi \approx \xi_0' t - \frac{t^3}{3\eta_0^2};$$

se $\xi_0' < 0$[17] allora l'equazione $\xi(t) = 0$ ha un'unica radice reale in $t = 0$. Se invece $\xi_0' > 0$[18] allora le radici saranno tre:

$$t_1 = 0, \quad t_{2,3} = \pm\eta_0(3\xi_0')^{\frac{1}{2}}$$

per cui i corrispondenti valori di η saranno

$$\eta = \eta_0, \quad \eta = \eta_0 - \frac{3}{2}\xi_0'^{\,19}.$$

Queste orbite intersecano l'asse η sei volte, tre volte sul semiasse positivo e tre su quello negativo.

Conclusioni

Il XX secolo è stato sicuramente il piú fecondo, non solo per l'astronomia, che ha raggiunto livelli stupefacenti, ma per tutta la scienza, che ha trovato in questo secolo il giusto trampolino per potersi sempre piú elevare ad un ritmo vertiginoso. Abbiamo ormai superato la fine del secondo millennio che nonostante il suo brutto inizio con l'oscuro Medioevo, si è rivelato per l'uomo indubbiamente il piú proficuo, grazie allo sviluppo scientifico e tecnologico che ci hanno portato a compiere imprese addirittura impensabili per gli antichi.

Accanto a questa "evoluzione tecnologica", vale la pena evidenziarne un'altra, per cosí dire "letteraria". Ci riferiamo al numero sempre piú crescente di scritti, articoli, libri, giornali, riviste ..., che *spuntano come stelle nell'immenso firmamento della ricerca scientifica.* Abbiamo scelto questa metafora, piuttosto calzante anche in relazione all'argomento trattato, per sottolineare come, specialmente negli ultimi decenni, l'interesse per le discipline legate

[17] Questo è il caso della "*luna di massima lunazione*" di Hill. In questo caso la curva, dopo aver attraversato la cuspide è decrescente per cui $\xi_0' < 0$.

[18] Questo è il caso dei satelliti che vanno oltre la "*luna di massima lunazione*" di Hill. La curva, dopo aver attraversato la cuspide, prolungandosi, cresce, per cui $\xi_0' > 0$.

[19] Abbiamo ignorato i termini in ξ di grado superiore al primo.

alla meccanica celeste abbia catturato, e continui a farlo, l'attenzione di alcuni fra i piú grandi scienziati della storia e, in qualche modo, anche quella di semplici appassionati che hanno trasformato una loro piccola curiositá in studio e oggetto di ricerca. Ci é sembrata una buona idea fare una ricerca, non troppo elaborata ma piuttosto indicativa, sul numero di scritti pubblicati dall'inizio del secolo fino ai giorni nostri su questo argomento. Digitando le parole chiave "*periodic solutions*" AND "*body problem*" abbiamo steso la seguente tabella:

BODY PROBLEM AND PERIODIC SOLUTIONS

PERIODI	1900-1910	1910-1920	1920-1930	1930-1940	1940-1950
TESTI	1	0	0	0	3
PERIODI	1950-1960	1960-1970	1970-1980	1980-1990	1990-2003
TESTI	20	39	66	105	184

Nota.
I testi che abbiamo ritrovato tra il 1950 e il 1960 appartengono ad autori come Kolmogorov, Siegel e Moser. Tra questi possiamo ritrovarne alcuni nella bibliografia di questa tesi. Come rappresentante dei testi relativi all'ultimo decennio abbiamo scelto un saggio di A. Chenciner e C. Simò intitolato "*Mécanique céleste. Cent ans aprés la publication des "Méthodes nouvelles" de Henri Poincaré*" che i due grandi matematici hanno steso per celebrare il centenario della pubblicazione dell'opera di Poincaré. Inoltre citiamo "*A systematic study of the stability of symmetric periodic orbits in the planar, circular, restricted three-body problem*" di A. Celletti, "*Singularities of periodic orbits near invariant curves*" di C. Falcolini e A. Celletti e "*On the stability of realistic three-body problems*" di A. Celletti e L. Chierchia.

Guardando questa tabella non riceviamo altro che una conferma di ciò che immaginavamo, con l'uomo nasce e continua a crescere, la volontá di comprendere e di capire; si vuole rendere partecipi tutti delle nuove scoperte o delle nuove intuizioni scientifiche attraverso una più che corposa bibliografia.

Osservazioni

"*Non è semplice tentare di riassumere un lavoro cosi grande*", scrive H. Villart in un saggio del 1954, parlando del capolavoro di Poincaré, "*se la grandezza di un'opera si vede dalla sua risonanza, cosa possiamo dire della solennità del pensiero di Poincaré, il cui valore continua a crescere nel corso dei secoli?*". Non possiamo fare altro che concordare con l'osservazione di Villart. Leggendo l'introduzione della versione in lingua inglese [25], a cura di D. L. Goroff, ci ha colpito subito una frase, che, alla fine di questo lavoro, ha incontrato la nostra approvazione: "*Ma perchè "Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste" ha la reputazione di essere un testo così difficile?* " Abbiamo tentato di dare una risposta. Alcune ragioni risiedono nel fatto che le tecniche e i mezzi matematici utilizzati nelle dimostrazioni dei risultati più importanti appartengono ad un contesto storico del tutto diverso da quello odierno. E' vero che siamo portati a pensare a quelle matematiche come a delle verità senza tempo e senza spazio, ma sicuramente il modo di esprimere queste verità varia, e non solo a causa delle diverse notazioni che si possono utilizzare. In "Les méthodes nouvelles", Poincaré usa uno stile molto particolare: egli ha l'abitudine di enunciare subito un risultato, senza esplicitare i passi matematici che gli hanno permesso di raggiungerlo. La difficoltà più grande però, è stata quella di aver dovuto reinterpretare i paragrafi in chiave moderna ricavando i *teoremi*, le *definizioni*, i *lemmi* e le *proposizioni*, classificazione questa del tutto assente in "Les méthodes nouvelles". Inoltre, come abbiamo accennato precedentemente, essendo un testo del diciannovesimo secolo, le notazioni dell'epoca sono completamente diverse da quelle attuali; abbiamo evidenziato questo aspetto più di una volta nella tesi quasi a voler sottolineare la difficoltà che si incontra quando si cerca di fare una ripresentazione in chiave moderna di un'opera antica.
Quello che ci ha colpito di più, è stato il fatto che, le due edizioni disponibili di quest'opera contengono diversi errori di stampa.

Errata Corrige

Presentiamo qui una breve *errata corrige* relativa alla parte da noi rielaborata: i primi tre capitoli di [25].

- in tutti i capitoli Poincaré usa al posto del simbolo di derivata parziale ∂ il simbolo d;
- Cap.1 § 2: $\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\frac{d\eta}{dt} = \frac{dN}{d\xi} + n^2\xi \to \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\frac{d\eta}{dt} = \frac{dV}{d\xi} + n^2\xi$;
- Cap.1 § 8:
$$F = \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{2} - \frac{2M}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \to$$
$$F = \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{2} - \frac{M}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}};$$
- Cap.1 § 8:
$$\frac{dS}{d\phi} = \Theta\sqrt{M}, \quad \left(\frac{dS}{d\omega}\right)^2 + \frac{\Theta^2}{\sin^2\omega} = G^2 M \to$$
$$\frac{dS}{d\phi} = \Theta, \quad \left(\frac{dS}{d\omega}\right)^2 + \frac{\Theta^2}{\sin^2\omega} = G^2;$$
- Cap.1 § 8: $L, G, \Theta, h', g, \theta \to L, G, \Theta, l, g, \theta$;
- Cap.1 § 8: $y_i = \frac{dS}{dx_1} \to y_i = \frac{dS}{dx_i}$;
- Cap.1 § 9: $\frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial(m_1 R)}{\partial x_i} \to \frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial(m_1 R)}{\partial x_1}$;
- Cap.1 § 11: $\Theta \to \theta$;
- Cap.1 § 12: $-\frac{dF}{d\Lambda}\frac{dh}{dt} \to -\frac{dF}{d\Lambda}, \frac{dh}{dt}$;
- Cap.1 § 12: $\beta G = \Lambda - \Pi \to \beta G = \Lambda - H$;
- Cap.2 § 25: $\frac{dy_m}{dt} = \frac{d\psi}{dx_0} + \frac{d\psi}{dy_0}Y_m + Y_m \to \frac{dy_m}{dt} = \frac{d\psi}{dx_0} + \frac{d\psi}{dy_0}y_m + Y_m$;
- Cap.2 § 28: $x_k = x_k^0 \to x_i = x_i^0$;

- Cap.3 § 38:

$$\begin{pmatrix} \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta_1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta_2} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

- Cap.3 § 38: $\phi_n; (t) \rightarrow \phi_i(t)$;
- Cap.3 § 40:

$$\Lambda_0 + \beta_i, \ldots, \lambda'_0 + \beta_2, \ldots, \xi'_0 - \eta'_4 \rightarrow \Lambda_0 + \beta_1, \ldots, \Lambda'_0 + \beta_2, \ldots, \xi'_0 - \eta'_0;$$

- Cap.3 § 41: $\xi_0 \rightarrow \xi'_0$;
- Cap.3 § 41: $\tau = \xi'_0 \rightarrow \tau = \xi'_0 = 0$;
- Cap.3 § 41: $\xi_0 \rightarrow \xi'_0$;

Riferimenti bibliografici

[1] V. I. Arnol′d, V. V. Kozlov, and A. I. Neĭ shtadt. *Dynamical systems. III*, volume 3 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. Translated from the Russian by A. Iacob.

[2] June Barrow-Green. *Poincaré and the three body problem*, volume 11 of *History of Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[3] June Barrow-Green. The three-body problem and the stability of the solar system. *to appear in Chapter 6 of Vol. VI-VII of La scienza dell'800*, 2001.

[4] Giancarlo Benettin, Luigi Galgani, and Antonio Giorgilli. The dynamical foundations of classical statistical mechanics and the Boltzmann-Jeans conjecture. In *Seminar on Dynamical Systems (St. Petersburg, 1991)*, volume 12 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 3–14. Birkhäuser, Basel, 1994.

[5] L. Valdinoci E. Biasco, L. Chierchia. Elliptic two-dimensional invariant tori for the planetary three body problem. *M. U. R. S. T, Variational elements and non linear differential equations*, 2002.

[6] D. Boccaletti and G. Pucacco. *Theory of orbits. Vol. 1.* Astronomy and Astrophysics Library. Springer-Verlag, Berlin, 1996. Integrable systems and non-perturbative methods.

[7] D. Boccaletti and G. Pucacco. *Theory of orbits. Vol. 2.* Astronomy and Astrophysics Library. Springer-Verlag, Berlin, 1996. Perturbative and geometrical methods.

[8] Jean-Benoît Bost. Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens (d'après Kolmogorov, Arnol′d, Moser, Rüssmann, Zehnder, Herman, Pöschel,...). *Astérisque*, (133-134):113–157, 1986. Seminar Bourbaki, Vol. 1984/85.

[9] R. Broucke and D. Boggs. Periodic orbits in the planar general three-body problem. *Celestial Mech.*, 11:13–38, 1975.

[10] Dirk Brouwer and Gerald M. Clemence. *Methods of celestial mechanics.* Academic Press, New York, 1961.

[11] Alessandra Celletti and Luigi Chierchia. On the stability of realistic three-body problems. *Comm. Math. Phys.*, 186(2):413–449, 1997.

[12] Alessandra Celletti and Corrado Falcolini. Singularities of periodic orbits near invariant curves. *Phys. D*, 170(2):87–102, 2002.

[13] A. Chenciner. Intégration du probléme de kepler par la méthode de hamilton-jacobi: coordinnées “action-angles” de Delaunay and coordonnées de Poincaré. *Notes scientifiques et tecniques du B. D. L*, 135, 1988.

[14] L. Chierchia. *Lezioni di analisi matematica 2.* Aracne, Roma, 1997.

[15] A. Fasano and S. Marmi. *Meccanica analitica.* Bollati Boringhieri, Torino, 1994.

[16] Giovanni Gallavotti. Determinismo e caos: un antico dualismo oggi. *IMA J. Numer. Anal.*, 2001.

[17] Giovanni Gallavotti. Quasi periodic motions from Hipparchus to Kolmogorov. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, 12(1):125–152 (2002), 2001.

[18] Jacques Hadamard. Le centenaire de Henri Poincaré. *Rev. Hist. Sci. Appl.*, 7:101–108, 1954.

[19] Jacques Henrard. Hill's problem in lunar theory. *Celestial Mech.*, 17(2):195–204, 1978.

[20] G. W. Hill. Researches in the lunar theory. *Astronomical Journal*, 1878.

[21] G. W. Hill. The periodic solution as a first approximation on the lunar theory. *Astronomical Journal n. 353*, 1895.

[22] Kenneth R. Meyer. *Periodic solutions of the N-body problem*, volume 1719 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[23] H. Poincaré. *New methods of celestial mechanics. Vol. I: Periodic solutions, the non-existence of integral invariants, asymptotic solutions.* Translated from the French. NASA TT F-450. National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C., 1967.

[24] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome I.* Les Grands Classiques Gauthier-Villars. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1987. Solutions périodiques. Non-existence

des intégrales uniformes. Solutions asymptotiques. Reprint of the 1892 original, With a foreword by J. Kovalevsky, Bibliothèque Scientifique Albert Blanchard.

[25] Henri Poincaré. *New methods of celestial mechanics. Vol. 1*, volume 13 of *History of Modern Physics and Astronomy.* American Institute of Physics, New York, 1993. Periodic and asymptotic solutions, Translated from the French, Revised reprint of the 1967 English translation, With endnotes by V. I. Arnol'd, Edited and with an introduction by Daniel L. Goroff.

[26] Carl Ludwig Siegel and Jürgen K. Moser. *Lectures on celestial mechanics.* Springer-Verlag, New York, 1971. Translation by Charles I. Kalme, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 187.

[27] V. Szebehely. *Theory of orbits, The restricted three body problem.* Academic Press, New York an London, 1967.

[28] Jean-Christophe Yoccoz. Recent developments in dynamics. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 246–265, Basel, 1995. Birkhäuser.