Università degli Studi di Roma Tre

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA

Corso di Laurea in Matematica

Teorema del Limite Centrale per passeggiate aleatorie in un mezzo fluttuante nello spazio e nel tempo

Tesi di Laurea Specialistica in Matematica

Sintesi

Relatore:
Prof. Alessandro Pellegrinotti

Candidato:
Maria Cristina Signorino

Prima Sessione
Anno Accademico 2013- 2014

Parole chiave: Random Walk,Teorema del Limite Centrale

Capitolo 1

Caso ad una particella

Sia X_t la posizione di una particella al tempo $t \geq 0$ su $\mathbb{Z}^\nu$, con $\nu \geq 1$. La particella si muove in un ambiente che varia nello spazio e nel tempo e che assume valori in un insieme S di cardinalità finita. Lo spazio delle configurazioni dell'ambiente è dato da

$$\xi = \{\xi_t(x) |\ x \in \mathbb{Z}^\nu, t \in \mathbb{Z}^+\} \in \Omega := S^{\mathbb{Z}^{\nu+1}}$$

Sia π una distribuzione non degenere su S: la distribuzione di ξ è data da $\rho = \pi^{\mathbb{Z}^{\nu+1}}$, cioè la misura prodotto nello spazio Ω.

Il Random Walk ha probabilità di salto dipendente dal campo ξ, cioè:

$$Pr(X_{t+1} = x | X_t = y, \xi) = p(x - y; \xi_t(y))$$

dove t è un intero positivo.
La funzione $p(u; s), u \in \mathbb{Z}^\nu$ definisce una distribuzione di probabilità su $\mathbb{Z}^\nu$ per $s \in S$ fissato.

Questa probabilità, senza perdere di generalità, può essere riscritta come:

$$p(x - y; \xi_t(y)) = P_0(x - y) + c(x - y; \xi_t(y)) \tag{1.1}$$

con le seguenti assunzioni:

1. $P_0(u) + c(u; s) \in [0; 1]\ \forall s \in S$;

2. P_0 è una distribuzione di probabilità; da questo segue che:

$$\sum_{u \in \mathbb{Z}^\nu} c(u; s) = 0 \ \ \forall s \in S \tag{1.2}$$

3. c ha media nulla rispetto alla distribuzione di ξ, cioè:

$$< c(u;\cdot) > = \sum_{s\in S} c(u;s)\pi(s) = 0 \;\; \forall\, u \in \mathbb{Z}^\nu \tag{1.3}$$

4. Esiste una costante $C > 0$ tale che $P_0(u) = c(u;s) = 0$ per $|u| > C$ e $\forall\, s \in S$, ove $|u| = \sum_{i=1}^{\nu} |u_i|$;

5. sia $\tilde{p}_0(\lambda)$ la funzione caratteristica di P_0, cioè:

$$\tilde{p}_0(\lambda) = \sum_{u\in\mathbb{Z}^\nu} P_0(u)e^{i(\lambda,u)} \;\; \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\nu) \in \mathbb{T}^\nu$$

   dove $\mathbb{T}^\nu = [-\pi;\pi]^\nu$ è il Toro ν-dimensionale.

   Su $\tilde{p}_0(\lambda)$ facciamo le seguenti ipotesi:

$$|\tilde{p}_0(\lambda)| < 1 \quad \text{per} \quad \lambda \neq 0 \tag{1.4}$$

$$\ln \tilde{p}_0(\lambda) = i\sum_{j=1}^{\nu} b_j\lambda_j - \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{\nu} c_{kl}\lambda_k\lambda_l + ... \tag{1.5}$$

   vicino a $\lambda = 0$, dove la matrice $C = \{c_{kl}\}$ è definita positiva e $b = \sum_{u\in\mathbb{Z}^\nu} uP_0(u)$ in $\mathbb{R}^\nu$ é la media del Random Walk.

6. La funzione caratteristica di $p(u;s)$

$$\tilde{p}(\lambda;s) = \sum_{u\mathbb{Z}^\nu} p(u;s)e^{i(\lambda,u)} \;\; \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\nu) \in \mathbb{T}^\nu$$

   soddisfa:

$$|\tilde{p}(\lambda;s)| < 1 \;\forall\; \lambda \in \mathbb{T}^\nu \tag{1.6}$$

   La condizione (1.6) può essere riscritta nella forma:

$$\int_{\mathbb{T}^\nu} < |\tilde{p}(\lambda;\cdot)|^2 >_\xi dm(\lambda) = \int_{\mathbb{T}^\nu} (\sum_{s\in S} |\tilde{p}(\lambda;s)|^2\pi(s))dm(\lambda) < 1$$

   dove $dm(\lambda) = \frac{d^\nu\lambda}{(2\pi)^\nu}$ è la misura normalizzata di Haar su $\mathbb{T}^\nu$.

Dalla condizione (1.3) P_0 è la distribuzione di probabilità del Random Walk mediato rispetto al campo:

$$P_0(u) = < p(u; \xi_t(y)) >_\xi = \sum_{s \in S} p(u; s)\pi(s).$$

Per ξ si possono avere varie scelte:

la configurazione del mezzo ξ è costituita da una famiglia di variabili aleatorie indipendenti nello spazio e nel tempo;

le ξ sono indipendenti nello spazio e markoviane nel tempo, cioè per ogni $x \in \mathbb{Z}^\nu$ abbiamo una copia indipendente di una catena di Markov nel tempo, con un insieme finito di stati;

ξ ha una dipendenza spaziale ed è Markoviana nel tempo.

Esistono vari risultati in tutti e 3 i casi. Si rimanda ai lavori [2],[3],[6], [7] per una serie di risultati noti e al lavoro [1] come rassegna.

Nel nostro lavoro considereremo solo il caso in cui il campo ξ è costituito da variabili indipendenti nello spazio e nel tempo.

Nel modello considerato vale il seguente:

Teorema 1.1 (Teorema del Limite Centrale (TLC))**.** *Nelle ipotesi 1.-6. esiste un vettore $b \in \mathbb{R}^\nu$ e una matrice definita positiva $A = \{a_{ij}\}$ tale che $\forall\, G \subset \mathbb{R}^\nu$ limitato con frontiera liscia*

$$P(X_T - X_0 \in \sqrt{T}G + bT | X_0 = x_0; \xi) \to \int_G g(u) du \text{ per } T \to \infty \tag{1.7}$$

quasi ovunque (q.o.) in $\xi \in \Omega$, o in $L^p(\Omega, \rho)$, $p \geq 1$ dove ρ è la distribuzione di probabilità di ξ.

$g(u) = \sqrt{\frac{B}{(2\pi)^\nu}} e^{-\frac{1}{2}\mathcal{A}(u)}$ *è la densità gaussiana, $u \in \mathbb{R}^\nu$*

$\mathcal{A}(u) = \sum_{1,j=1}^{\nu} a_{ij} u_i u_j$ *è la forma quadratica di $A = \{a_{ij}\}$, $A = C^{-1}$, con $C = \{c_{jk}\}$, $B = detA$, il vettore $b = i \nabla \ln \tilde{p}_0(\lambda)|_{\lambda=0}$, $c_{jk} = -\frac{\partial^2 \ln \tilde{p}_0(\lambda)}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k}|_{\lambda=0}$.*

Per dimostrare il Teorema 1.1 procederemo nel seguente modo: faremo prima la dimostrazione in $L^2(\Omega, \rho)$ e poi estenderemo il risultato a q.o. in ξ.

Senza perdere generalità possiamo assumere che il Random Walk parta dall'origine, cioè:

$$P(X_T = x | X_0 = 0; \xi) = P(X_T = x | \xi)$$

Da qui in avanti indicheremo con $< \cdot >$ la media rispetto al campo ξ.
Usiamo inoltre la seguente notazione $P_0^t(u) = (P_0 * P_0 * \cdots * P_0)(u)$ per indicare la convoluzione t-volte per $t > 0$, $P_0^0(u) = \delta_{u,0}$.

Sia $\chi_T = \{(t, X_t) | t = 0, 1, ..., T\}$. Sia $B = \{(t_1, y_1), ..., (t_n, y_n)\}$ un sottoinsieme della traiettoria χ_T con
$0 \leq t_1 < ... < t_n < T$ tale che $|B| = n > 0$. B è l'insieme in cui compare il campo ξ. Riscrivendo la probabilità:

$$P(\chi_T | \xi) = \prod_{t=0}^{T-1} P_0(X_{t+1} - X_t) + \sum_{B \subset \chi_T} \prod_{(t,y) \in B} c(X_{t+1} - y; \xi_t(y)) \prod_{(\tau, X_\tau) \notin B} P_0(X_{\tau+1} - X_\tau)$$

$$\begin{aligned} P(X_T = x | \xi) &= \sum_{\chi_T} P(\chi_T | \xi)) = \\ &= P_0^T(x) + \sum_{\chi_T} \sum_{B \subset \chi_T} \prod_{(t,y) \in B} c(X_{t+1} - y; \xi_t(y)) \prod_{(\tau, X_\tau) \notin B} P_0(X_{\tau+1} - X_\tau) \end{aligned}$$

Per calcolare $P(X_T = x | \xi)$ devo sviluppare le somme su tutte le traiettorie da 0 a x. L'idea di come fare lo sviluppo è la seguente:

fissiamo una traiettoria χ_T e quindi fissiamo i punti nello spazio-tempo in cui compare il campo ξ. Nei punti restanti comparirà solo $P_0(\cdot)$. Quindi si può sommare su questi punti ottenendo le convoluzioni di $P_0(\cdot)$ con se stesso. Fatto questo si convolve con le convoluzioni di $P_0(\cdot)$.
Definendo $h^k(u, s) = (c(\cdot; s) * P_0^{k-1})(u)$, possiamo effettuare i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} &P(X_T = x | \xi) = \\ &= P_0^T(x) + \sum_{\substack{B = \{(t_1, y_1), ..., (t_n, y_n)\} \\ 0 \leq t_1 < ... < t_n < T}} P_0^{t_1}(y_1) \prod_{i=1}^{n-1} h^{t_{i+1} - t_i}(y_{i+1} - y_i; \xi_{t_i}(y_i)) h^{T - t_n - 1}(x - y_n; \xi_{t_n}(y_n)) \end{aligned}$$

Ponendo

$$\overline{M}_B(\xi) = P_0^{t_1}(y_1)\prod_{i=1}^{n-1} h^{t_{i+1}-t_i}(y_{i+1}-y_i;\xi_{t_i}(y_i)) \tag{1.8}$$

$$M(y,t;\xi) = \sum_{B\, t.c.\; y_f(B)=y, t_f(B)=t} \overline{M}_B(\xi) \tag{1.9}$$

dove $(t_f, y_f) = (t_n, y_n)$ è l'ultimo punto di B, l'espressione diventa:

$$P(X_T = x|\xi) = P_0^T(x) + \sum_{t=0}^{T-1}\sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu} M(y,t;\xi)h^{T-t-1}(x-y;\xi_t(y)) \tag{1.10}$$

Sia $C_0^2(\mathbb{R}^\nu)$ lo spazio delle funzioni limitate e 2 volte differenziabili in $\mathbb{R}^\nu$ dotate della norma $||\cdot||_2$, dove $||f||_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}^\nu} \max \left\{ |f(x)|; \left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right|; \left|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \right\}$ per $f \in C_0^2(\mathbb{R}^\nu)$. Consideriamo il funzionale

$$\mu_T^\xi(f) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^\nu} P(X_T = x|\xi) f(\frac{x-bT}{\sqrt{T}}) \tag{1.11}$$

e vogliamo dimostrare che

$$\mu_T^\xi(f) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \int f(u)g(u)du \tag{1.12}$$

in $L^2(\Omega,\rho)$.

$$\mu_T^\xi(f) = \mu_T^0(f) + \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu} M(y,t;\xi)F_T^f(y,t|\xi_t(y)) \tag{1.13}$$

dove abbiamo posto

$$F_T^f(y,t|\xi_t(y)) = \sum_{u,v\in\mathbb{Z}^\nu} c(u;\xi_t(y))P_0^{T-t-1}(v)\sqrt{T}f(\frac{y+u+v-bT}{\sqrt{T}}) \tag{1.14}$$

$$\mu_T^0(f) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^\nu} P_0^T(x)f(\frac{x-bT}{\sqrt{T}}) \tag{1.15}$$

$\mu_T^0(f)$ è la media di $\mu_T^\xi(f)$ su tutte le configurazioni di ξ, infatti:

$$< \mu_T^\xi(f) > = < \sum_{x\in\mathbb{Z}^\nu} P(X_T = x|\xi) f(\frac{x-bT}{\sqrt{T}}) > =$$

$$= \sum_{x\in\mathbb{Z}^\nu} P_0^T(x) f(\frac{x-bT}{\sqrt{T}}) + \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^\nu} M(y,t;\xi) \sum_{u\in\mathbb{Z}^\nu} < c(u;\xi_t(y)) > \cdot$$

$$\cdot P_0^{T-t-1}(x-u-y) f(\frac{x-bT}{\sqrt{T}}) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^\nu} P_0^T(x) f(\frac{x-bT}{\sqrt{T}})$$

per la (1.3). Ponendo

$$M_T(F_T^f;\xi) = \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu} M(y,t;\xi) F_T^f(y,t|\xi_t(y)) \tag{1.16}$$

allora abbiamo

$$\mu_T^\xi(f) = \mu_T^0(f) + \frac{1}{\sqrt{T}} M_T(F_T^f;\xi) \tag{1.17}$$

Poichè $P_0(\cdot)$ verifica le ipotesi del (TLC) si ha che

$\mu_T^0(f) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \int f(u)g(u)du \quad \forall\, f \in\, C_b^2(\mathbb{R}^\nu)$,

quindi basta dimostrare che $\frac{1}{\sqrt{T}} M_T(F_T^f;\xi) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$ in L^2, ovvero che

$$\frac{1}{T} < M_T^2(F_T^f;\xi) > \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{1.18}$$

Scriviamo $f(\dfrac{y+u+v-bT}{\sqrt{T}})$ in espansione di Taylor fino al secondo ordine rispetto alla variabile $\dfrac{u}{\sqrt{T}}$:

$$f(\frac{y+u+v-bT}{\sqrt{T}}) = f(\frac{y+v-bT}{\sqrt{T}}) + \frac{u}{\sqrt{T}} \nabla f(\frac{y+v-bT}{\sqrt{T}}) + \frac{1}{T}(\mathcal{H}_f u, u)$$

dove $\mathcal{H}_f$ è la matrice delle derivate seconde di f in un punto intermedio.

$$F_T^f(y,t|\xi_t(y)) =$$

$$\sum_{u,v\in\mathbb{Z}^\nu} [c(u;\xi_t(y)) P_0^{T-t-1}(v) \sqrt{T} f(\frac{y+v-bT}{\sqrt{T}}) + c(u;\xi_t(y)) P_0^{T-t-1}(v) u \nabla f(\frac{y+v-bT}{\sqrt{T}}) +$$

$$+ c(u;\xi_t(y)) P_0^{T-t-1}(v) \frac{1}{\sqrt{T}} (\mathcal{H}_f u, u)]$$

Ponendo $\xi_t(y) = s,\ d(s) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^\nu} u\ c(u;s)$

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{u,v \in \mathbb{Z}^\nu} c(u;s) P_0^{T-t-1}(v)(\mathcal{H}_f u, u) =: \frac{1}{\sqrt{T}} D_T^f(y,t;s)$$

possiamo riscrivere la (1.14)

$$F_T^f(y,t;s) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^\nu} P_0^{T-t-1}(v) \nabla f\left(\frac{y+v-bT}{\sqrt{T}}\right) d(s) + \frac{1}{\sqrt{T}} D_T^f(y,t;s) \qquad (1.19)$$

e osserviamo che

$$|D_T^f(y,t;s)| < \text{ cost } ||f||_2, \ < (F_T^f(y,t;\cdot))^2 > < \text{ cost } (||f||_2)^2 \quad \forall\, y,t,T.$$

Inoltre $< F_T^f(y,t;\cdot) > = < D_T^f(y,t;\xi) > = 0$.

Osserviamo ora che $M(y,t;\xi)$ dipende dal campo calcolato per tempi $t' < t$, mentre $F_T^f(y,t;\cdot)$ dipende dal campo al tempo t. Ne segue che F_T^f e $M(y,t;\xi)$ sono indipendenti. Quindi

$$< M_T^2(F_T^f;\xi) > = \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{y \in \mathbb{Z}^\nu} < M^2(y,t;\xi) > < (F_T^f(y,t|\xi_t(y)))^2 >$$

Usiamo ora il seguente:

Lemma 1.1.
$$\sum_{y \in \mathbb{Z}^\nu} < M^2(y,t;\xi) > = \bar{C}_0 t^{-\frac{\nu}{2}} (1 + o(1)) \qquad (1.20)$$

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}^\nu} (y_j - b_j t)(y_k - b_k t) < M^2(y,t;\xi) > = \bar{C}_{jk} t^{-\frac{\nu}{2}+1} (1 + o(1)) \qquad (1.21)$$

$\forall \nu \geq 1, 1 \leq j,k \leq \nu$, per $t \to \infty$, con $\bar{C}_0, \bar{C}_{jk} > 0$ costanti.

Quindi: $\displaystyle \frac{1}{T} < M_T^2(F_T^f;\xi) > < C||f||_2^2 \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} & \text{se } \nu = 1 \\ \frac{\ln T}{T} & \text{se } \nu = 2 \\ \frac{1}{T} & \text{se } \nu \geq 3 \end{cases} \to 0 \text{ per } T \to \infty$

Abbiamo dimostrato quindi la convergenza in L^2 per funzioni $C^2(\mathbb{R}^\nu)$ a supporto compatto.

Resta da dimostrare che il risultato vale anche q.o. in ξ, ovvero

$$\frac{1}{\sqrt{T}} M_T(F_T^f;\xi) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ q.o. in } \xi.$$

$$M_T(F_T^f;\xi) = \sum_{t=0}^{T-1}\sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu} M(y,t;\xi) F_T^f(y,t|\xi_t(y)) =$$
$$= \sum_{t=0}^{T-1}\sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu} M(y,t;\xi)\Big[\sum_{v\in\mathbb{Z}^\nu} P_0^{T-t-1}(v)\nabla f(\frac{y+v-bT}{\sqrt{T}})d(s) + \frac{1}{\sqrt{T}} D_T^f(y,t;s)\Big]$$

Ponendo

$\sum_{v\in\mathbb{Z}^\nu} P_0^{T-t-1}(v)\nabla f(\frac{y+v-bT}{\sqrt{T}})d(s) = \hat{F}_T^f(y,t;\xi)$ allora segue che

$$\frac{1}{\sqrt{T}} M_T(F_T^f;\xi) = \frac{1}{\sqrt{T}} M_T(\hat{F}_T^f;\xi) + \frac{1}{T} M_T(D_T^f;\xi) \tag{1.22}$$

Ora consideriamo il secondo termine della somma: utilizzando la disuguaglianza di Chebychev e il Lemma di Borel-Cantelli otteniamo la convergenza q.o. in ξ a 0 di $\frac{1}{T} M_T(D_T^f;\xi)$

Resta da dimostrare che $\frac{1}{\sqrt{T}} M_T(\hat{F}_T^f;\xi) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$ q.o. in ξ.

Ponendo $N_T(\xi) := \frac{1}{\sqrt{T}} M_T(\hat{F}_T^f;\xi)$ utilizzo nella dimostrazione la seguente:

Proposizione 1.1. $\forall \nu \geq 1$ *esiste una costante* $k > 0$ *tale che* $\forall\, T' > T > 0$

$$< [N_{T'}(\xi) - N_T(\xi)]^2 > \leq k\ ||f||_2^2\ (\frac{1}{\sqrt{T}} - \frac{1}{\sqrt{T'}}) \tag{1.23}$$

Applicando il Teorema di Lagrange alla funzione $\frac{1}{\sqrt{x}}$ nell'intervallo $(T;T')$

$\exists\ \tilde{T} \in (T;T')$ tale che $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{T'}} - \frac{1}{\sqrt{T}}}{T'-T} = -\dfrac{1}{2\tilde{T}^{\frac{3}{2}}} \ \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{T}} - \dfrac{1}{\sqrt{T'}} = \dfrac{T'-T}{2\tilde{T}^{\frac{3}{2}}}$

Possiamo quindi applicare il seguente:

Teorema 1.2. *Sia* $\{X_t\}_{t\geq 1}$ *una sequenza di variabili casuali nello spazio di probabilità* (Ω, Σ, μ) *tale che per qualche costante positiva* K, β *e per tutti i tempi* $t_2 > t_1 \geq 1$, *la disuguaglianza*

$$< |X_{t_2} - X_{t_1}|^p > \leq K \, \frac{t_2 - t_1}{t_1^{1+\beta}} \tag{1.24}$$

è verificata per qualche $p \geq 1$.
Allora X_t *converge quando* $t \to \infty$ *in* $L^p(\Omega, \mu)$ *e* μ*-quasi ovunque.*

Nel nostro caso $X_t = N_t(\xi), p = 2, k = 1/2, \beta = 1/2$ e quindi $N_T(\xi)$ converge in L^2 e q.o. in ξ. Il Teorema 1.1 è dimostrato per funzioni $f \in \mathcal{C}^2$. Sia ora $f \in \mathcal{C}^0$: $\mathcal{C}^2$ é denso in $\mathcal{C}^0$, quindi dalla convergenza L^2 per funzioni $\mathcal{C}^2$ si ottiene quella L^2 in $\mathcal{C}^0$.
Poiché $|\mu_T^\xi(f)| \leq \mu_T^\xi(\mathbb{I})||f||_\infty = ||f||_\infty$ allora $\{\mu_T^\xi(\cdot) : \mathcal{C}^0 \to L^2\}$ sono uniformemente continue e quindi si ottiene la convergenza in L^2.
Consideriamo un insieme numerabile di funzioni $\{f_j\}_{j\geq 1} \in \mathcal{C}^2$: tale insieme è denso in $\hat{\mathcal{C}}^0 = \{f \in \mathcal{C}^0 | \exists \lim_{x\to\pm\infty} f\}$ (l'insieme delle funzioni $\mathcal{C}^0$ non è separabile).
Per ogni f_j considero un insieme Ω_j in cui la successione converge: poichè ogni Ω_j ha misura 1, anche $\hat{\Omega} = \bigcap_{j\geq 1} \Omega_j$ ha misura 1. Abbiamo quindi la convergenza di funzioni $f \in \hat{\mathcal{C}}^0$ per $\xi \in \hat{\Omega}$. Avendo $\hat{\Omega}$ non ho più dipendenza dalle funzioni f. Da questo deriva che le misure sono *tight* e convergono al limite gaussiano per funzioni indicatrici in insiemi aperti e limitati.
Da questo deriva che per $\xi \in \hat{\Omega}$ il funzionale $\mu_T^\xi(\cdot)$ converge debolmente al limite gaussiano (vedi [4]).

Capitolo 2

Il caso a 2 particelle

2.1 Modello generale

Siano $X_t^{(1)}$ e $X_t^{(2)}$ le posizioni al tempo $t \geq 0$ di 2 Random Walk in $\mathbb{Z}^\nu$.Il mezzo ξ in generale è descritto da una collezione di variabili aleatorie indipendenti nello spazio e markoviane nel tempo. Si assume che i 2 Random Walk siano tra loro condizionalmente indipendenti, cioè la probabilità di transizione congiunta è data da:

$$\begin{aligned} &Pr(X_{t+1}^{(1)} = x^{(1)}, X_{t+1}^{(2)} = x^{(2)} | X_t^{(1)} = z^{(1)}, X_t^{(2)} = z^{(2)}; \xi) = \\ &= \prod_{i=1}^{2} P(X_{t+1}^{(i)} = x^{(i)} | X_t^{(1)} = z^{(1)}, X_t^{(2)} = z^{(2)}; \xi) \end{aligned} \tag{2.1}$$

La probabilità di salto di ciascuna particella si può scrivere come:

$$\begin{aligned} &P(X_{t+1}^{(i)} = x^{(i)} | X_t^{(1)} = z^{(1)}, X_t^{(2)} = z^{(2)}; \xi) = \\ &= P_0(x^{(i)} - z^{(i)}) + \hat{c}(x^{(i)} - z^{(i)}, z^{(1)} - z^{(2)}; \xi_t(z^{(i)})) \end{aligned} \tag{2.2}$$

dove

$$\hat{c}(x, z, s) = c(x; s) + c_1(x, z; s), \quad x,\, z \in \mathbb{Z}^\nu,\ s \in S \tag{2.3}$$

è una funzione a supporto compatto in x e z e pari in z, cioé $c_1(x, z; s) = c_1(x, -z; s)$. Per P_0 e c valgono le assunzioni fatte nel Capitolo 1, con l'aggiunta della condizone di simmetria:

$$P_0(u) = P_0(-u),\ c(u; s) = c(-u; s), \quad u \in \mathbb{Z}^\nu,\ s \in S.$$

Come già detto l'evoluzione del mezzo ξ è data da copie indipendenti di una catena di Markov con probabilità di transizione:

$$
\begin{aligned}
&P(\xi_{t+1}(x) = s|X_t^{(1)} = z^{(1)}, X_t^{(2)} = z^{(2)}; \xi_t = \eta) = \\
&= \begin{cases} q_0(\eta(x), s) & \text{se } x \neq z^{(1)},\ x \neq z^{(2)} \\ \hat{q}_1(\eta(x), s) & \text{se } x = z^{(i)}, i = 1 \text{ o } i = 2,\ z^{(1)} \neq z^{(2)} \\ \hat{q}_2(\eta(x), s) & \text{se } x = z^{(1)} = z^{(2)}, \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

dove $q_0, \hat{q}_1, \hat{q}_2$ sono matrici stocastiche.
Definiamo:

$$
\Delta(s_1, s_2, x_1, x_2) = q_0(s_1, s_2) - \hat{q}_i(s_1, s_2) \quad i = 1, 2 \tag{2.5a}
$$

e assumiamo

$$
\max_{s_1,s_2,x_1,x_2} |\Delta(s_1, s_2, x_1, x_2)| = \varepsilon << 1 \tag{2.5b}
$$

La probabilità (2.4) si può riscrivere come

$$
\begin{aligned}
&P(\xi_{t+1}(x) = s|X_t^{(1)} = z^{(1)}, X_t^{(2)} = z^{(2)}; \xi_t = \eta) \\
&\quad = q_0(\eta(x), s) + \Delta(\eta(x), s, x - z^{(1)}, x - z^{(2)})
\end{aligned}
$$

Nel caso di 2 Random Walk si dimostra il seguente risultato:

Teorema 2.1 (Teorema del Limite Centrale (TLC))**.** *Nelle ipotesi scritte sopra esiste una matrice definita positiva $A = \{a_{ij}\}$ tale che $\forall\, G \subset \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu$ limitato con frontiera liscia*

$$
\begin{aligned}
&P(X_T^{(1)} - X_0^{(1)},\, X_T^{(2)} - X_0^{(2)} \in \sqrt{T}G | X_0^{(1)} = x_0^{(1)}, X_0^{(2)} = x_0^{(2)}) = \\
&\iint_G g(u, v) du\, dv + o(1) \ \ \textit{per } T \to \infty
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

$$
g(u, v) = \frac{B}{(2\pi)^\nu} e^{-\frac{1}{2}\mathcal{A}(u)}\, e^{-\frac{1}{2}\mathcal{A}(v)} \ \textit{é la densitá gaussiana, } u, v \in \mathbb{R}^\nu
$$

$$
\mathcal{A}(u) = \sum_{1,j=1}^{\nu} a_{ij} u_i u_j \ \textit{é la forma quadratica di } A = \{a_{ij}\},\ B = \sqrt{detA}.
$$

Il Teorema mostra che nel modello mediato rispetto a ξ i due Random Walk si comportanto a tempi lunghi in modo indipendente l'uno dall'altro, ovvero non risentono dell'interazione reciproca. Per la dimostrazione si rimanda al lavoro [6].

2.2 Problema del q.o. rispetto a ξ

Dopo l'introduzione del modello generale e la dimostrazione del Teorema 2.1 ci si pone il problema del quasi ovunque rispetto alla storia del mezzo. IL problema risulta complicato da trattare con le tecniche del Capitolo 1 in quanto la funzione $\hat{c}$ definita nella (2.3) crea un legame tra le due particelle al tempo precedente. Per questo motivo iniziamo considerando un caso semplificato in cui una particella evolve in modo libero mentre l'altra dipende dal campo e dalla posizione della prima. Il mezzo è costituito da una collezione di variabili aleatorie indipendenti nello spazio e nel tempo tali che:

$$\xi_t(\cdot) = \pm 1 \text{ e } <\xi_t(\cdot)>= 0$$

Le probabilità di transizione sono date da:

$$P(X^{(1)}_{t+1} = x | X^{(1)}_t = y, \xi) = P_0(x-y) \tag{2.7}$$

$$P(X^{(2)}_{t+1} = z | X^{(2)}_t = w, \xi) = P_0(z-w) + \tilde{c}_1(z-w, w-y; \xi_t(w)) \tag{2.8}$$

La funzione $\tilde{c}_1$ è tale che:

$$\tilde{c}_1(u, v; \xi_t(\cdot)) = c_1(u)c_2(v)\xi_t(\cdot) \tag{2.9a}$$

con $c_1(u)$ e $c_2(v)$ tali che

$$\sum_{u\in\mathbb{Z}^\nu} c_1(u) = 0, \qquad \sum_{v\in\mathbb{Z}^\nu} c_2(v) = 0 \tag{2.9b}$$

$$c_1(u) = c_2(u) = 0 \text{ se } |u| > D. \tag{2.9c}$$

Su $P_0(\cdot)$ valgono le ipotesi fatte nel Capitolo 1. Inoltre per semplificare alcune stime assumiamo che $\nu \geq 3$.

Scriviamo la probabilità della generica traiettoria χ_T delle 2 particelle. Indicando con χ^i_T la traiettoria della i-esima particella da 0 a x_i, $i = 1, 2$, $\chi_T = \chi^1_T \cup \chi^2_T$:

$$\begin{aligned}
P(\chi_T|\xi) = \\
= \prod_{t=0}^{T-1} P_0(X^{(1)}_{t+1} - X^{(1)}_t) P_0(X^{(2)}_{t+1} - X^{(2)}_t) + \sum_{B\subset\chi_T} \prod_{(t,y,z)\in B} P_0(X^{(1)}_{t+1} - z) c_1(X^{(2)}_{t+1} - y) \\
c_2(y-z)\xi_t(y) \prod_{(\tau, X^{(1)}_\tau, X^{(2)}_\tau)\notin B} P_0(X^{(1)}_{\tau+1} - X^{(1)}_\tau) P_0(X^{(2)}_{\tau+1} - X^{(2)}_\tau)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

dove $B = \{(t_1, y_1, z_1), ..., (t_n, y_n, z_n)\}$ con $0 \le t_1 < ... < t_n < T$, $y_1, ..., y_n$ e $z_1, ..., z_n$ sono rispettivamente le posizioni della seconda e della prima particella quando compare il campo.

Siano

$$M_B(\xi) = P_0^{t_1}(z_1) P_0^{t_1}(y_1) \prod_{i=1}^{n-1} h^{t_{i+1}-t_i-1}(y_{i+1} - y_i) c_2(y_i - z_i) \xi_{t_i}(y_i) P_0^{t_{i+1}-t_i}(z_{i+1} - z_i) \tag{2.11}$$

$$M(t, y, z|\xi) = \sum_{\substack{B \subset \chi_T \ t.c. \\ y_f(B)=y, z_f(B)=z, t_f(B)=t}} M_B(\xi) \tag{2.12}$$

dove $(t_f, y_f, z_f) = (t_n, y_n, z_n)$ è il punto finale di B.

$$P(X_T^{(1)} = x_1, X_T^{(2)} = x_2|\xi) =$$
$$= P_0^T(x_1) P_0^T(x_2) + \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{y,z \in \mathbb{Z}^\nu} M(t, y, z|\xi) h^{T-t-1}(x_2 - y) c_2(y - z) \xi_t(y) P_0^{T-t}(x_1 - z) \tag{2.13}$$

Studiamo la norma L^2 del secondo termine della (2.13).
La media è diversa da 0 solo se i tempi t e le posizioni della seconda particella coincidono quando compare il campo ξ.
Dall'ipotesi di limitatezza su c_2 e utilizzando la seguente disuguaglianza:

$$\max_{s \in S} |h^{t-1}(y, s)| \le A_1 \frac{e^{-\frac{(y-bt)^2}{2t}}}{(t+1)^{\frac{\nu+1}{2}}} \tag{2.14}$$

per A_1 costante positiva, $\forall y \in \mathbb{Z}^\nu$, $t \ge 1$,
la media è maggiorata da:

$$[P_0^T(x_1)]^2 \sum_{t=0}^{T-1} \frac{1}{t^{\frac{\nu}{2}}} \frac{1}{(T-t)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(T-t)^{\frac{\nu+1}{2}}} \simeq \frac{[P_0^T(x_1)]^2}{T^{\frac{\nu}{2}}}$$

Quindi la norma L^2 del termine considerato tende a 0 per T che tende all'infinito.

Considero ora il funzionale

$$\mu_T(f_1,f_2,\xi) = \sum_{x_1,x_2\in\mathbb{Z}^\nu} P(X_T^{(1)} = x_1, X_T^{(2)} = x_2|\xi) f_1(\frac{x_1 - bT}{\sqrt{T}}) f_2(\frac{x_2 - bT}{\sqrt{T}}) \quad (2.15)$$

con $f_1,\ f_2 \in C_d^2(\mathbb{R}^\nu)$.

Dimostriamo che $\mu_T(f_1,f_2,\xi) \to \int f_1(u)f_2(v)g(u,v)dudv$ per $T\to\infty$

La (2.15) si può scrivere nella forma

$$\mu_T(f_1,f_2,\xi) = \mu_T^0(f_1,f_2) + \frac{1}{\sqrt{T}} M_T(F_T^{f_1,f_2}|\xi) \quad (2.16)$$

dove $\mu_T^0(f_1,f_2) = \sum_{x_1,x_2\in\mathbb{Z}^\nu} P_0^T(x_1)P_0^T(x_2) f_1(\frac{x_1 - bT}{\sqrt{T}}) f_2(\frac{x_2 - bT}{\sqrt{T}})$

$$F_T^{f_1,f_2}(t,y,z|\xi) =$$
$$= h^{T-t-1}(x_2 - y)c_2(y-z)\xi_t(y)P_0^{T-t}(x_1 - z) f_1(\frac{x_1 - bT}{\sqrt{T}}) f_2(\frac{x_2 - bT}{\sqrt{T}})\sqrt{T} \quad (2.17)$$

$$M_T(F_T^{f_1,f_2}|\xi) = \sum_{x_1,x_2\in\mathbb{Z}^\nu}\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{y,z\in\mathbb{Z}^\nu} M(t,y,z|\xi)F_T^{f_1,f_2}(t,y,z|\xi) \quad (2.18)$$

Poiché il (TLC) vale per la distribuzione P_0^T bisogna dimostrare che $\frac{1}{\sqrt{T}}M_T(F_T^{f_1,f_2}|\xi)$ tende a 0 quasi ovunque in ξ per $T\to\infty$.

Considero la quantità
$h^{T-t-1}(x_2 - y) f_2(\frac{x_2 - bT}{\sqrt{T}}) = \sum_{w\in\mathbb{Z}^\nu} c_1(w-y)P_0^{T-t-1}(x_2 - w) f_2(\frac{x_2 - bT}{\sqrt{T}})$

Ponendo $w - y = \bar{x},\ x_2 - y - x = x$ e facendo l'espansione di f_2 in $\frac{\bar{x}}{\sqrt{T}}$ ottengo

$$h^{T-t-1}(x_2 - y) f_2(\tfrac{x_2 - bT}{\sqrt{T}}) = \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{x\in\mathbb{Z}^\nu} P_0^{T-t-1}(x)\nabla f_2(\frac{y + x - bT}{\sqrt{T}})\cdot a + \frac{1}{T}\sum_{\bar{x}\in\mathbb{Z}^\nu} c_1(\bar{x})(\mathcal{H}_{f_2}\bar{x},\bar{x})$$

dove $\sum_{\bar{x}\in\mathbb{Z}^\nu} c_1(\bar{x})\bar{x} = a \in \mathbb{R}^\nu$.

Quindi $F_T^{f_1,f_2}(t,y,z|\xi) = \hat{F}_T^{f_1,f_2}(t,y,z|\xi) + \frac{1}{\sqrt{T}} D_T^{f_1,f_2}(t,y,z|\xi)$, dove

$$\hat{F}_T^{f_1,f_2}(t,y,z|\xi) = c_2(y-z)\xi_t(y)P_0^{T-t}(x_1-z)f_1(\frac{x_1-bT}{\sqrt{T}})$$
$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^\nu} P_0^{T-t-1}(x)\nabla f_2(\frac{y+x-bT}{\sqrt{T}})\cdot a$$

$$D_T^{f_1,f_2}(t,y,z|\xi) = c_2(y-z)\xi_t(y)P_0^{T-t}(x_1-z)f_1(\frac{x_1-bT}{\sqrt{T}})\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{\bar{x}\in\mathbb{Z}^\nu} c_1(\bar{x})(\mathcal{H}_{f_2}\bar{x},\bar{x})$$

Dimostro la convergenza in L^2:

$$\frac{1}{T} < M_T^2(F_T^{f_1,f_2}|\xi) > = \frac{1}{T}\sum_{x_1\in\mathbb{Z}^\nu}\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{y,z\in\mathbb{Z}^\nu} < M^2(t,y,z|\xi) > < \left[F_T^{f_1,f_2}(t,y,z|\xi)\right]^2 >$$
$$\leq \frac{||f_1||_2||f_2||_2}{T}\sum_{x_1,\bar{x}_1\in\mathbb{Z}^\nu}\sum_{t=0}^{T-1} P_0^T(x_1)P_0^T(\bar{x}_1)\frac{1}{t^{\frac{\nu}{2}}} \simeq \text{ cost } \frac{1}{T}$$

che tende a 0 per $T\to\infty$.

Resta da dimostrare la convergenza quasi ovunque.

$$\frac{1}{\sqrt{T}} M_T(F_T^{f_1,f_2}|\xi) = \frac{1}{\sqrt{T}} M_T(\hat{F}_T^{f_1,f_2}|\xi) + \frac{1}{T} M_T(D_T^{f_1,f_2}|\xi)$$

$< \frac{1}{T} M_T^2(D_T^{f_1,f_2}|\xi) >$ tende a 0 come $\frac{1}{T^2}$ per $\nu = 3$ e più velocemente in dimensione maggiore. Quindi applicando la disuguaglianza di Chebychev e il Lemma di Borel-Cantelli questo termine tende a 0 quasi ovunque.

Ponendo $N_T(\xi) := \dfrac{1}{\sqrt{T}} M_T(\hat{F}_T^{f_1,f_2}|\xi)$ utilizziamo la (1.23) da cui si deduce la convergenza quasi ovunque in ξ, analogamente al caso di una particella.

Bibliografia

[1] C. Boldrighini, R.A. Milnos and A. Pellegrinotti: *Random walks in a random(fluctuating) enviroment*, Russian Math. Surveys, 62:1994, pp. 663-712.

[2] C. Boldrighini, R.A. Milnos and A. Pellegrinotti: *Almost-sure central limit theorem for a Markov model of random walk in dynamical random enviroment.* Probability Theory Rel. Fields 109, pp.245-273 (1997).

[3] C. Boldrighini, R.A. Milnos and A. Pellegrinotti: *Random Walk in a Fluctuating Random Enviroment with Markov Evolution. On Dobrushin's way. From probability theory to statistical physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 198, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp.13-35. Editors: R.A.Milnos, Senya Shlosman, Yu.M. Suhov.

[4] P. Billingsley: *Convergence of probability measures.* Second edition. Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[5] J. Milnor: *Morse Theory.* Princeton University Press, 5th ed., Princeton 1973.

[6] C. Boldrighini, R.A. Milnos and A.Pellegrinotti: *Central Limit Theorem for the Random Walk of One and Two Particles in a Random Enviroment with Mutual Interaction*, Advances of Soviet Mathematics, 20:1994, pp. 21-75.

[7] C. Boldrighini, R.A. Milnos and A.Pellegrinotti: *Random walks in quenched i.i.d, space-time random enviroment are always a.s. diffusive*, Probab. Theory Relat. Fields 129: 2004, pp. 133-156.

[8] I.I. Gihman, A.V. Skorohod: *The Theory of Stocastic Processes I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 210 Springer-Verlag (1974).

[9] Yu.V. Sidorov, M.V. Fedoryuk and M.I.Shabunin: *Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable*, Mir Publishers Moskov (1982).