UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica

presentata da Eleonora Tocci

IL GRUPPO DELLE CLASSI DEI DIVISORI DI UN DOMINIO DI KRULL

Relatore
Prof.ssa Stefania Gabelli

ANNO ACCADEMICO 2002 - 2003
Ottobre 2003

Classificazione AMS: 13G05, 13A15, 13C20
Parole Chiave: domini di Krull, ideali divisoriali, Gruppo delle Classi dei Divisori

Wolfgang Krull nacque a Baden-Baden, il 26 agosto del 1899 e morì il 12 aprile del 1971 a Bonn. Egli condusse una vita ordinaria e piuttosto tranquilla, eccetto per ciò che concerneva la sua carriera, brillante e intensamente creativa.
Entrò nell'università nel 1919 prima a Freiburg e Rostock, poi a Gottingen nel 1920 e 1921. Qui incontrò Felix Klein, già ritiratosi, ma soprattutto Emmy Noether, che lo influenzò fortemente.
Il periodo più produttivo per i suoi studi fu quello relativo agli anni 1928-1938 circa, quando insegnò nell'Università di Erlangen. Subito dopo si trasferì a Bonn dove vi rimase fino al suo ritiro avvenuto nel 1969.
L'importanza matematica di Krull fu formalmente riconosciuta da un *Laurea ad honorem* rilasciatagli nel '62 dall' Università di Erlangen.
Come già precedentemente detto, all'inizio della sua carriera Krull subì il fascino di Emmy Noether. La necessità, infatti, di un'accurata revisione dei teoremi di Noether, portò Krull, poco a poco, alla costruzione della *Teoria degli Ideali*, campo nel quale divenne un maestro incontrastato; alcuni suoi risultati furono di importanza davvero fondamentale per lo sviluppo dell'Algebra Commutativa e i suoi studi crearono presupposti per nuove ricerche.
Tra i suoi risultati ricordiamo, ad esempio, il celebre *Teorema dell'ideale principale di Krull* del 1928.
Krull sollevò, poi, questioni relative agli anelli locali regolari e le cosiddette *valutazioni di Krull* divennero fondamentali nello studio dei domini integralmente chiusi. Egli, infatti, riuscì a caratterizzare i domini noetheriani integralmente chiusi come intersezione di anelli di valutazione discreta, punto di partenza per lo studio dei cosiddetti *domini di Krull*.
Questa classe di domini oltre a comprendere i domini noetheriani integralmente chiusi, comprende anche i domini a fattorizzazione unica, non necessariamente noetheriani. Questi ultimi sono precisamente i domini di Krull il cui *Gruppo delle Classi dei Divisori* ha come unico elemento l'elemento neutro.

In questa tesi, dunque, siamo partiti dalla definizione di dominio di Krull e siamo arrivati a parlare del Gruppo delle Classi dei Divisori di un tale dominio. Il nostro obiettivo principale è stato quello di mostrare l'utilità del famoso *Teorema di Nagata* per costruire esempi importanti di domini a fattorizzazione unica e per calcolare il gruppo delle classi dei divisori di certi domini di Krull.

Nel primo capitolo abbiamo introdotto e sviluppato la nozione di dominio di Krull.

- *Un dominio A è detto un dominio di Krull se esiste una famiglia $\{V_i\}_{i\in I}$ di anelli di valutazione discreta del campo K tale che:*
  - *(a)* $A = \bigcap_{i\in I} V_i$;
  - *(b) dato $x \in A$, $x \neq 0$, esiste al più un numero finito di indici $i \in I$ tali che x è non invertibile in V_i.*

Se I è l'insieme vuoto, poniamo $A = K$.
La proprietà (a) è detta proprietà dell'*intersezione* e la (b) proprietà del *carattere finito*.

E'chiaro che un dominio di Krull è un dominio integralmente chiuso.

Una famiglia, $\{V_i\}_{i\in I}$, di anelli di valutazione del campo dei quozienti di un dominio A, verificante la proprietà del carattere finito e tale che $A = \bigcap_{i\in I} V_i$, è chiamata una *famiglia di definizione* per A.

Nel caso dei domini di Krull abbiamo dimostrato che tale famiglia è unica.
Indicando, infatti, con $X^{(1)}(A)$ l'insieme di tutti gli ideali primi di altezza uno di A abbiamo verificato che:

- *se $\{V_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di definizione per il dominio A, allora per ogni $P \in X^{(1)}(A)$, esiste $i \in I$ tale che $A_P = V_i$.*

Segue, dunque, che $\{A_{P_i}\}_{i\in I}$, con $P_i \in X^{(1)}(A)$ per ogni $i \in I$, è l'unica famiglia di definizione per A. Ogni A_{P_i}, inoltre, è un sovranello di valutazione discreta *essenziale* per A.

Abbiamo osservato, però, che un dominio di Krull può ammettere sovranelli di valutazione discreta non essenziali. A tal fine abbiamo riportato un esempio.

Esempio
Consideriamo il domino di Krull $A = K\left[\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\right]$, dove $\{X_\lambda\}$ sono indeterminate sul campo K e $|\Lambda| > 1$.
Osserviamo che l'ideale M di A generato da $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ è un ideale M-adico. Dunque, M induce una valutazione M-adica il cui anello di valutazione discreta V è un sovranello di valutazione di A che non è essenziale; infatti il centro di V su A è M ma $M \notin X^{(1)}(A)$, così che $V \subset A_M$.

Infine, dato un dominio di Krull A, una sua *sottointersezione*, $B = \bigcap_{P\in T} A_P$ con $T \subseteq X^{(1)}(A)$, è ancora un domino di Krull.

Abbiamo concluso il primo capitolo verificando l'esistenza di due classi di domini di Krull: la prima è costituita dai domini a fattorizzazione unica, in breve UFD.

- *Sia A un dominio a fattorizzazione unica, e* $(p_i)_{i\in I}$ *un insieme completo di elementi primi non associati di A. Allora A è un dominio di Krull e* $\{A_{(p_i)}\}_{i\in I}$ *è la famiglia di definizione di A.*

La seconda classe è formata dai domini noetheriani integralmente chiusi.

- *Sia A un dominio noetheriano, integralmente chiuso, e sia* $(P_i)_{i\in I}$ *l'insieme dei primi di altezza uno di A. Allora A è un dominio di Krull e* $\{A_{P_i}\}_{i\in I}$ *è la famiglia di definizione di A.*

Considerando la chiusura integrale di un dominio noetheriano, ci si chiese se questa fosse ancora un dominio noetheriano. Le risposte date furono relative a casi particolari; ovvero, dato A un dominio noetheriano di dimensione uno con campo dei quozienti K tale che $K \subseteq F$ sia un'estensione finita, allora ogni anello B con $A \subseteq B \subseteq F$ è noetheriano di dimensione uno.
In particolare la chiusura integrale, $\bar{A}$, di A è noetheriana (*Teorema di Krull-Akizuki*). Nel 1962 Nagata dimostrò che, se A è un dominio noetheriano di dimensione due, allora $\bar{A}$ è noetheriana ma possono esistere anelli non noetheriani tra A e $\bar{A}$. Infine se A è un dominio noetheriano di dimensione tre, allora $\bar{A}$ può non essere noetheriana.
Krull congetturò giustamente che in ogni caso la chiusura integrale di un

dominio noetheriano A con campo dei quozienti K fosse un dominio di Krull; sussiste infatti il seguente *Teorema di Mori-Nagata*.

- *Sia A un dominio noetheriano. Allora la sua chiusura integrale $\bar{A}$ è un dominio di Krull.*

Un interessante esempio di domini di Krull noetheriani è dato dai domini di *Dedekind*. Tali domini, infatti, sono definiti come domini noetheriani, integralmente chiusi e uno-dimensionali.
Vale allora il seguente risultato.

- *A è un dominio di Dedekind se e soltanto se A è un dominio di Krull uno-dimensionale.*

Nel Capitolo 2 abbiamo trattato il concetto di *ideale divisoriale* con lo scopo di caratterizzare i domini di Krull in termini di teoria moltiplicativa degli ideali. Per prima cosa abbiamo introdotto gli *ideali frazionari*.

- *Sia A un dominio d'integrità e K il suo campo dei quozienti. Un sotto-A-modulo I di K si dice un ideale frazionario di A se esiste $a \in A^*$ tale che $aI \subseteq A$.*

Gli ideali di A sono ideali frazionari, basta, infatti, prendere a=1.

Indicando con $\mathcal{F}(A)$ l'insieme degli ideali frazionari non nulli di A si ha che $\mathcal{F}(A)$ è un semigruppo rispetto alla moltiplicazione, con unità A ed è parzialmente ordinato rispetto all'inclusione; ovvero la moltiplicazione è un'operazione compatibile con la relazione d'inclusione.

Di particolare interesse sono gli ideali frazionari *invertibili*.

- *Sia $I \in \mathcal{F}(A)$. I si dice un ideale frazionario invertibile se esiste $J \in \mathcal{F}(A)$ tale che $IJ = A$.*

Abbiamo verificato che J è unico, si denota con I^{-1} e $I^{-1} = (A : I)$.

Gli ideali frazionari invertibili di A formano un gruppo rispetto alla moltiplicazione, con unità data da A. Essi costituiscono il più grande sottogruppo di $\mathcal{F}(A)$, che indicheremo con $\mathcal{I}nv(A)$.

A questo punto abbiamo definito l'applicazione:

$$\begin{aligned} v : \mathcal{F}(A) &\longrightarrow \mathcal{F}(A) \\ I \quad &\longmapsto \quad I_v := (A : (A : I)) \end{aligned}$$

tale che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $A_v = A$;
2. $(xI)_v = xI_v$ per ogni $x \in K$;
3. $I \subseteq I_v$ per ogni $I \in \mathcal{F}(A)$;
4. Se $I \subseteq J$, allora $I_v \subseteq J_v$ per ogni $I,\ J \in \mathcal{F}(A)$.
5. $(I_v)_v = I_v$ per ogni $I \in \mathcal{F}(A)$.

Un ideale $I \in \mathcal{F}(A)$ è detto un *v-ideale* o un ideale *divisoriale* se $I = I_v$.

Gli ideali frazionari invertibili sono divisoriali. Inoltre:

- *sia $I \in \mathcal{F}(A)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

  (i) I è divisoriale.

  (ii) I è intersezione di ideali principali.

  (iii) I è intersezione di ideali invertibili.

  (iv) I è intersezione di ideali divisoriali.

Abbiamo indicato con $\mathcal{D}(A)$ l'insieme degli ideali frazionari divisoriali, non nulli di A e in tale insieme abbiamo definiamo l'operazione di *v-moltiplicazione* nel seguente modo: se $I_v,\ J_v \in \mathcal{D}(A)$, allora $I_v * J_v := (I_v J_v)_v$.
Così la coppia $(\mathcal{D}(A), *)$ è un semigruppo unitario con unità A e per esso valgono le seguenti proprietà:

1) $(\mathcal{D}(A), *)$ non è un sottogruppo di $(\mathcal{F}(A), \cdot)$ essendo le due operazioni diverse;

2) $(I_v J_v)_v = (I_v J)_v = (IJ)_v$;

3) $(I_v + J_v)_v = (I + J_v)_v = (I + J)_v$;

4) $\mathcal{D}(A)$ è un semigruppo ordinato rispetto all'inclusione, ovvero la *v-moltiplicazione* è compatibile con la relazione d'inclusione;

5) $\mathcal{D}(A)$ è un reticolo.

Nelle applicazioni della Geometria Algebrica, anziché parlare di ideali divisoriali, si preferisce parlare di *Divisori* .
L'*insieme dei divisori* di A è l'insieme quoziente $\mathcal{D}iv\,(A) = \mathcal{F}(A)/\rho$, dove ρ è una relazione d'equivalenza, chiamata *equivalenza di Artin*, così definita:

$$\text{per ogni } I, J \in \mathcal{F}(A) \text{ allora } I\rho J \Leftrightarrow (A : I) = (A : J) \Leftrightarrow I_v = J_v.$$

Abbiamo denotato con $div\,(I)$ il *divisore* dell'ideale frazionario I, ovvero la classe d'equivalenza di I modulo ρ.
Abbiamo visto che con l'operazione:

$$div\,(I) + div\,(J) = div\,(IJ)$$

l'insieme $\mathcal{D}iv\,(A)$ è un semigruppo additivo reticolato con l'ordinamento parziale opposto rispetto all'ordinamento di $\mathcal{D}(A)$. Allora l'applicazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) &\longrightarrow \mathcal{D}iv\,(A) \\ I_v &\longmapsto div\,(I) \end{aligned}$$

definisce un isomorfismo di semigruppi reticolati che scambia l'ordinamento.

Nel Capitolo 3 abbiamo determinato quando il semigruppo $(\mathcal{D}(A), *)$ è un gruppo e, successivamente, abbiamo dimostrato che, quando A è un dominio di Krull, quest'ultimo è un gruppo abeliano libero.
Per raggiungere tale obiettivo abbiamo introdotto il concetto di *v-invertibilità* di un ideale frazionario divisoriale.

- *Sia I un ideale frazionario di A. I_v si dice v-invertibile se esiste $J_v \in \mathcal{D}(A)$ tale che $I_v * J_v = (I_v J_v)_v = A$.*

Successivamente abbiamo dato la definizione di elemento *quasi intero*.

- *Un elemento $x \in K$ si dice quasi intero su A se esiste $d \in A$ tale che $dx^n \in A$ per ogni $n \geq 1$.*

L'insieme $\bar{A}$ degli elementi quasi interi su A è un anello chiamato la *completa chiusura integrale* di A; inoltre abbiamo verificato che

$$\tilde{A} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}(A)} (F : F) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}(A)} (F_v : F_v).$$

Un dominio A è detto *completamente integralmente chiuso* se $A = \tilde{A}$.
A questo punto è stato possibile determinare quando il semigruppo $(\mathcal{D}(A), *)$ diventa un gruppo, infatti abbiamo dimostrato la proposizione che segue.

- *Sono equivalenti:*

  1) $A = \tilde{A}$;

  2) ogni ideale frazionario divisoriale è v-invertibile;

  3) $\mathcal{D}(A)$ è un gruppo.

I domini di Krull sono completamente integralmente chiusi.

Per dimostrare che $(\mathcal{D}(A), *)$ è un gruppo abeliano libero, nel caso in cui A sia un dominio di Krull, abbiamo introdotto la condizione della catena ascendente sugli ideali divisoriali: A soddisfa la condizione della catena ascendente (a.c.c.) sull'insieme degli ideali divisoriali se ogni catena ascendente di ideali divisoriali propri di A staziona, se e solo se ogni sottoinsieme non vuoto di ideali divisoriali propri di A ha un elemento massimale.

A questo punto abbiamo verificato che i domini di Krull soddisfano l'a.c.c. sui divisoriali e questo ci ha permesso di dimostrare che:

- *gli ideali primi divisoriali di A sono tutti e soli gli ideali primi di altezza uno di A.*

Inoltre:

- *un ideale I di A è divisoriale se e solo se*

$$I = \left(P_1^{n_1} \cdots \ P_k^{n_k}\right)_v$$

con $P_i \in X^{(1)}(A)$ e $n_i \in \mathbb{N}$, per $i = 1, \ldots, k$ e tale scrittura è unica.

Dunque abbiamo ottenuto che:

- *$\mathcal{D}(A)$ è un gruppo abeliano libero con base $X^{(1)}(A)$.*

Quest'ultima condizione caratterizza i domini di Krull, infatti abbiamo concluso il capitolo con il seguente risultato.

- *Le seguenti condizioni su un dominio A sono equivalenti:*

  (a) A è un dominio di Krull;

  (b) A è completamente integralmente chiuso e soddisfa l'a.c.c. sull'insieme degli ideali divisoriali;

  (c) il reticolo ordinato $\mathcal{D}iv(A)$ dei divisori (rispettivamente il reticolo ordinato $\mathcal{D}(A)$ degli ideali frazionari divisoriali) è un gruppo abeliano libero con base $X^{(1)}(A)$.

Il Capitolo 4 è stato dedicato allo studio del *Gruppo delle Classi dei Divisori* di un dominio di Krull, che misura quanto un dominio di Krull è distante dall'essere un dominio a fattorizzazione unica.
Questo è il gruppo $\mathcal{C}l(A) = \mathcal{D}(A)/\mathcal{P}(A)$, dove $\mathcal{D}(A)$ è il gruppo degli ideali frazionari divisoriali di A e $\mathcal{P}(A)$ è il sottogruppo di $\mathcal{D}(A)$ costituito dagli ideali frazionari principali.
Inizialmente abbiamo dimostrato che i domini a fattorizzazione unica sono precisamente i domini di Krull il cui gruppo delle classi dei divisori è uguale a zero, ovvero il cui unico elemento è l'elemento neutro.

- *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

   (a) A *è un* UFD*;*

   (b) A *è un dominio di Krull ed un* MCD *dominio;*

   (c) A *è un dominio di Krull e* $\mathcal{D}(A) = \mathcal{P}(A)$*;*

   (d) A *è un dominio di Krull e* $\mathcal{C}l(A) = 0$.

Abbiamo, poi, cercato relazioni tra i gruppi delle classi dei divisori di due domini A e B tali che l'estensione $A \subseteq B$ soddisfi particolari condizioni; ad esempio la cosiddetta *condizione PDE*, grazie alla quale è possibile definire un omomorfismo tra il gruppo delle classi di A e quello di B.

Sia $A \subseteq B$ un'estensione di domini. Tale estensione soddisfa la condizione PDE (*pas d'eclatement*) se:

$$\text{per ogni } Q \in X^{(1)}(B), \text{ allora } ht(Q \cap A) \leq 1.$$

Nel caso dei domini di Krull, visto che gli ideali di altezza uno sono tutti e soli gli ideali primi divisoriali, abbiamo riformulato la condizione nel modo seguente:

$$\text{se } Q \text{ è un primo divisoriale di } B \text{ tale che } Q \cap A \neq (0), \text{ allora } (Q \cap A)_v \neq A.$$

Abbiamo visto che la condizione PDE è soddisfatta ogni volta che l'estensione $A \subseteq B$ è intera, piatta opppure quando B è una sottointersezione di A.
La proposizione seguente dimostra l'equivalenza della condizione PDE con alcune proprietà che, a loro volta, permettono di definire gli omomorfismi $\Theta : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(B)$ e $\bar{\Theta} : \mathcal{C}l(A) \to \mathcal{C}l(B)$.

- *Siano* $A \subseteq B$ *domini di Krull. Sono equivalenti:*

   1) vale la condizione PDE.

   2) Se Q *è un primo divisoriale di* B *tale che* $Q \cap A \neq (0)$*, allora* $(Q \cap A)_v \neq A$.

   3) Per ogni ideale I *di* A *tale che* $I_v = A$*, allora* $(IB)_v = B$.

4) Per ogni coppia di ideali I, J di A tali che $I_v = J_v$ si ha che $(IB)_v = (JB)_v$.

5) Per ogni ideale I di A si ha che $(IB)_v = (I_v B)_v$.

Segue il teorema.

- *Sia $A \subseteq B$ un'estensione di domini di Krull che soddisfa la condizione PDE. Allora l'applicazione $\Theta : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(B)$ data da $\Theta(I_v) = (IB)_v$ è ben definita ed è un omomorfismo. Inoltre se xA è un ideale frazionario principale di A, allora $\Theta(xA) = xB$; così Θ induce un omomorfismo $\bar{\Theta} : \mathcal{C}l(A) \longrightarrow \mathcal{C}l(B)$, dove $\bar{\Theta}([I_v]) = [(IB)_v]$.*

Abbiamo visto, però, che esistono casi in cui l'applicazione Θ è un omomorfismo e l'estensione non soddisfa la condizione PDE. Basta considerare un UFD, A, e un suo sovranello, B. Abbiamo riportato al riguardo un esempio specifico.

Esempio
Sia $A = K[X, Y]$, dove K è un campo e X, Y sono indeterminate su K; sia inoltre M l'ideale di A generato da X ed Y.
Sappiamo che M è un ideale M-adico che induce una valutazione v_M, detta valutazione M-adica, il cui anello di valutazione discreta V è un sovranello di valutazione di A centrato su M.
Prendiamo dunque $B = V$ e consideriamo l'estensione $A \subseteq B$.
Essendo A un UFD, allora $\mathcal{C}l(A) = 0$ e dunque Θ è un omomorfismo.
L'estensione $A \subseteq B$ non soddisfa però la condizione PDE. Infatti, preso $N \in X^{(1)}(B)$, si ha che $N \cap A = (X, Y)$ ha altezza due in A.

Infine abbiamo dimostrato l'esistenza di almeno tre scelte per la definizione dell'omomorfismo Θ: Θ_1, Θ_2 e Θ_3. Subito dopo, abbiamo verificato la loro equivalenza.

Il Capitolo 5 rappresenta il fine ultimo di questo lavoro. Infatti, le informazioni introdotte in precedenza e nella parte iniziale del capitolo stesso sono state finalizzate alla dimostrazione di un importante risultato, il *Teorema di*

Nagata, che mette in relazione $\mathcal{C}l\,(A)$ e $\mathcal{C}l\,(B)$ quando A è un dominio di Krull e B è una sua sottointersezione.

Nella parte iniziale del capitolo abbiamo introdotto il concetto di *anello generalizzato di frazioni*, studiandone, subito dopo, il legame con altre strutture algebriche quali i sovranelli piatti, le sottointersezioni, le localizzazioni e gli anelli di frazioni; in particolare nel caso dei domini di Krull.

Sia A un dominio e sia $\mathscr{F}$ un sistema moltiplicativo di ideali di A, ovvero un insieme di ideali tali che per ogni I, $J \in \mathscr{F}$ allora $IJ \in \mathscr{F}$.

- *L'insieme* $A_{\mathscr{F}} := \bigcup_{I \in \mathscr{F}} (A : I)$ *è un sovranello di* A *ed è chiamato anello generalizzato delle frazioni di* A *rispetto a* $\mathscr{F}$.

Se $I \in \mathcal{F}\,(A)$, allora $I_{\mathscr{F}} = \bigcup_{J \in \mathscr{F}} (I : J)$ è un ideale frazionario di $A_{\mathscr{F}}$.

Gli anelli di frazioni sono anelli generalizzati di frazioni. Inoltre, se S è un sottoinsieme di $Spec\,(A)$, il sovranello B di A, definito da $B = \bigcap_{P \in S} A_P$, è un anello generalizzato di frazioni di A come segue.

- *Sia* A *un dominio e* $S \subseteq Spec\,(A)$. *Posto* $\mathscr{F} := \mathscr{F}\,(S)$ *con* $\mathscr{F}\,(S) = \{I \subseteq A : I$ *è un ideale di* A *tale che* $I \nsubseteq P$, *per ogni* $P \in S\}$, *allora:*

  a) $\mathscr{F}$ *è un sistema moltiplicativo;*

  b) se I *è un ideale frazionario di* A, *allora* $I_{\mathscr{F}} = \bigcap_{P \in S} IA_P$.
  In particolare, per $I = A$, $A_{\mathscr{F}} = \bigcap_{P \in S} A_P$.

Introducendo, poi, il concetto di *saturazione* abbiamo supposto di lavorare con sistemi moltiplicativi di ideali saturati.

A questo punto è stato possibile costruire lo schema in Figura 1.

$$
\begin{tikzcd}
B \text{ anello di frazioni di } A \arrow[r, Rightarrow, "\textit{sempre}"] & B \text{ sovranello piatto di } A \arrow[d, Rightarrow, "\textit{sempre}"] \\
B \text{ sottointersezione di } A \arrow[u, Rightarrow, "\textit{A di Krull e } \mathcal{C}l(A) \textit{ è di torsione}"] \arrow[r, Rightarrow, shift left, "\textit{sempre}"] & B \text{ anello generalizzato di frazioni di } A \arrow[l, Rightarrow, shift left, "\textit{A di Krull}"]
\end{tikzcd}
$$

Figura 1: schema

Abbiamo osservato però che esistono sottointersezioni di domini di Krull che non sono piatte. Ne riportiamo un esempio.

Esempio

Sia K un campo e siano X, Y, U e V indeterminate su K.
Consideriamo l'anello $A = K[X, Y, U, V] / (XV - YU)$. Indichiamo con x la classe di X in A, ovvero $x = X + (XV - YU)$ e rispettivamente con y, u, v le classi di Y, U e V in A. Risulterà, dunque, $A = K[x, y, u, v]$. Allora

i) l'ideale (x, y) di $K[x, y, u, v]$ è un ideale primo.

ii) L'anello locale $K[x, y, u, v]_{(x,y)}$ è un dominio di valutazione discreta.

iii) L'anello $K[x, y, u/x]$ è un dominio di Krull.

iv) $K[x, y, u, v] = K[x, y, u/x] \cap K[x, y, u, v]_{(x,y)}$.

v) $K[x, y, u/x]$ è una sottointersezione di A che non è piatta.

Riportiamo ora il *Teorema di Nagata*.

- *Sia A un dominio di Krull e sia $B = \bigcap_{Q \in T} A_Q$ una sottointersezione di A con $T \subseteq X^{(1)}(A)$. Allora*

  i) $\Theta : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(B)$ *definita da* $\Theta(I) = (IB)_v$ *è una suriezione;*

  ii) $Ker(\Theta)$ *è generato dagli ideali primi di altezza uno di A che non stanno in T.*

  Segue che:

iii) $\bar{\Theta} : \mathcal{C}l\,(A) \to \mathcal{C}l\,(B)$ *definita da* $\bar{\Theta}\,([I]) = [(IB)_v]$ *è una suriezione;*

iv) $Ker\left(\bar{\Theta}\right)$ *è generato dalle classi degli ideali primi di altezza uno di* A *che non stanno in* T.

Per lo schema in Figura 1, abbiamo riformulato il Teorema di Nagata come segue.

- *Sia* A *un dominio di Krull e* $\mathscr{F}$ *un sistema moltiplicativo di ideali interi di* A*. Consideriamo l'anello generalizzato di frazioni* $A_{\mathscr{F}}$*. Allora*

  i) $\Theta : \mathcal{D}\,(A) \to \mathcal{D}\,(A_{\mathscr{F}})$ *definito da* $\Theta\,(I) = I_{\mathscr{F}} = (IA_{\mathscr{F}})_v$*, è un omomorfismo suriettivo;*

  ii) $Ker\,(\Theta)$ *è generato dagli ideali primi di altezza uno di* A *che incontrano* $\mathscr{F}$.

  Segue che:

  iii) $\bar{\Theta} : \mathcal{C}l\,(A) \to \mathcal{C}l\,(A_{\mathscr{F}})$ *definita da* $\bar{\Theta}\,([I]) = [I_{\mathscr{F}}] = [(IA_{\mathscr{F}})_v]$ *è un omomorfismo suriettivo;*

  iv) $Ker\left(\bar{\Theta}\right)$ *è generato dalle classi degli ideali primi di altezza uno di* A *che incontrano* $\mathscr{F}$.

Nel caso particolare degli anelli di frazioni abbiamo ottenuto il teorema che segue.

- *Sia* A *un dominio di Krull e* S *una sua parte moltiplicativa. Consideriamo l'anello di frazioni* A_S*. Allora*

  i) $\Theta : \mathcal{D}\,(A) \to \mathcal{D}\,(A_S)$ *definita da* $\Theta\,(I) = I_S = (IA_S)_v$ *è un omomorfismo suriettivo che induce l'omomorfismo* $\bar{\Theta} : \mathcal{C}l\,(A) \to \mathcal{C}l\,(A_S)$ *definito da* $\bar{\Theta}\,([I]) = [I_S] = [(IA_S)_v]$*, anch'esso suriettivo;*

  ii) $Ker\,(\Theta)$ *è generato dagli ideali primi di altezza uno di* A *che incontrano* S*, e dunque* $Ker\left(\bar{\Theta}\right)$ *è generato dalle classi di tali ideali;*

iii) se S è generata da elementi primi, allora $\bar{\Theta}$ è un isomorfismo.

Quindi, ricordiamo che:

- *se A è un dominio a fattorizzazione unica, allora A_S è un domino a fattorizzazione unica per ogni parte moltiplicativa S di A.*

- *Se S è generata da elementi primi, allora A è un dominio a fattorizzazione unica se e soltanto se A_S è un dominio a fattorizzazione unica.*

Abbiamo concluso il capitolo mostrando con un esempio che il Teorema di Nagata può essere usato per calcolare il gruppo delle classi dei divisori.

Il Capitolo 6 conclude la tesi con una ulteriore applicazione del Teorema di Nagata.

Abbiamo considerato l'anello dei polinomi $A[X]$ su un dominio di Krull A.
Dato I un ideale di A, abbiamo indicato con $I[X]$ l'ideale esteso di I in $A[X]$, i cui elementi sono tutti e soli i polinomi a coefficienti in I.
Usando il Teorema di Nagata, abbiamo dimostrato che, se A è un dominio di Krull, allora:

1) *l'anello di polinomi $A[X]$ è un dominio di Krull.*

2) *L'omomorfismo $\bar{\Theta} : \mathcal{C}l(A) \to \mathcal{C}l(A[X])$ definito da $[I] \mapsto [I[X]]$, è un omomorfismo biettivo.*

Abbiamo osservato, infine, che i risultati sopra elencati sono ancora validi per anelli di polinomi in un qualsiasi insieme di indeterminate, $A\left[\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\right]$.

Bibliografia

[AHZ93] D. D. Anderson, E. G. Houston, and M. Zafrullah. t-linked extensions, the t-class group, and Nagata's theorem. *J. Pure Appl. Algebra*, 86(2):109–124, 1993.

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[BG85] V. Barucci and S. Gabelli. *Ideali divisoriali v-invertibili in un dominio di Mori*. Technical report, Università degli Studi di Roma La Sapienza, 1985.

[Bou77] A. Bouvier. *Quatre exposes sur les anneaux de Krull*. Quaderni dei gruppi di ricerca matematica del consiglio nazionale delle ricerche, Università degli Studi di Roma La Sapienza, 1977.

[Bou98] N. Bourbaki. *Commutative algebra. Chapters 1–7*. Elements of Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the French, Reprint of the 1989 English translation.

[Fos73] R. M. Fossum. *The divisor class group of a Krull domain*. Springer-Verlag, New York, 1973. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 74.

[FS01] L. Fuchs and L. Salce. *Modules over non-Noetherian domains*, volume 84 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[Gil72] R. Gilmer. *Multiplicative ideal theory,*. Marcel Dekker Inc., New York, 1972. Pure and Applied Mathematics, No. 12.

[HH80] J. R. Hedstrom and E. G. Houston. Some remarks on star-operations. *J. Pure Appl. Algebra*, 18(1):37–44, 1980.

[Mat89] H. Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.

[PC96] G. M. Piacentini Cattaneo. *Algebra*. Zanichelli, 1996.

[Sam61a] P. Samuel. On unique factorization domains. *Illinois J. Math.*, 5:1–17, 1961.

[Sam61b] P. Samuel. Sur les anneaux factoriels. *Bull. Soc. Math. France*, 89:155–173, 1961.

[Sam64] P. Samuel. *Lectures on unique factorization domains*. Notes by M. Pavman Murthy. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No. 30. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1964.

[Sam68] P. Samuel. Unique factorization. *Amer. Math. Monthly*, 75:945–952, 1968.

[ZS75] O. Zariski and P. Samuel. *Commutative algebra. Vol. II*. Springer-Verlag, New York, 1975. Reprint of the 1960 edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 29.