UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI S.M.F.N.

Sintesi della tesi di Laurea in Matematica
di

Claudia Umbro

Schemi di discretizzazione per diffusioni e applicazioni all'approssimazione numerica del prezzo di opzioni

Relatore
Prof.ssa Lucia Caramellino

ANNO ACCADEMICO 2002 - 2003
LUGLIO 2003

Classificazione AMS: 60H10, 60H35, 65C05
Parole chiave: Processi di Diffusione; formule di Feynman-Kac; schemi di discretizzazione (Eulero e Milshtein); approssimazione numerica di soluzioni di EDP; opzioni europee; opzioni con barriere; simulazioni Monte Carlo.

In questa tesi ci proponiamo di studiare una classe particolare di processi stocastici: i **processi di diffusione**. Tali processi si definiscono come soluzioni di **eds-equazioni differenziali stocastiche** (ampiamente introdotte nel Capitolo 1 di questa tesi).

Un processo di diffusione $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$, con $T \leq +\infty$ è un processo aleatorio che risolve una eds del tipo

$$\begin{aligned} &dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \qquad t \in [0, T]\,, \\ &X_0 = x, \end{aligned} \tag{1}$$

dove W denota un **moto browniano standard**. Il punto x (che qui è indicato come deterministico ma si può pensare anche aleatorio) rappresenta il dato iniziale. In generale, le diffusioni "vivono" su $\mathbb{R}^d$, dunque si assume che $x \in \mathbb{R}^d$ e che le funzioni b e σ, dette rispettivamente **drift** e **coefficiente di diffusione**, siano funzioni del tipo:

$$b\,:\,\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \quad \text{ e } \quad \sigma\,:\,\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m,$$

e soddisfacenti opportune ipotesi atte a garantire l'esistenza della soluzione dell'eds associata (per i dettagli, si veda il Capitolo 1). Inoltre, si suppone che, seguendo le notazioni precedentemente introdotte, W sia un moto Browiano m-dimensionale. In questa tesi ci occuperemo di diffusioni a valori reali, e assumeremo sempre che $d = m = 1$.

I processi di diffusione sono molto utilizzati nella pratica come modello per l'evoluzione stocastica di quantità di interesse. In questo lavoro ci occuperemo di modelli di finanza matematica: la diffusione di riferimento servirà come modello per l'evoluzione di un processo di prezzo (ad esempio, di un titolo borsistico, di una valuta etc.). Vedremo in seguito e più in dettaglio i problemi finanziari di cui ci siamo occupati.

Le eds ricorrono in molti modelli scientifici e tecnologici, anche se in generale non è possibile identificarne esplicitamente le soluzioni. A volte (soprattutto nel caso unidimensionale) le soluzioni possono essere trovate in forma implicita o troppo complicata per essere rappresentate e valutate numericamente. La necessità di studiare il comportamento delle diffusioni ha così portato allo sviluppo di metodi che permettono di prevederne a priori il comportamento *qualitativo* e/o *quantitativo*. Per ottenere informazioni sulle diffusioni, si deve così ricorrere a dei metodi numerici. Sono possibili differenti approcci, quali:

- sfruttare il fatto che le diffusioni sono processi di Markov e fare un'approssimazione dei tempi e dello spazio per delle catene di Markov;
- scrivere direttamente degli schemi di discretizzazione per soluzioni di eds come in (1).

Il primo metodo, benché molto generale, non tiene conto della struttura particolare di (1); inoltre, l'utilizzazione delle matrici di transizione si può dimostare pesante, soprattutto se la dimensione d diventa grande.

Noi cercheremo di studiare e approfondire il secondo.

I metodi di discretizzazione per le soluzioni di eds rappresentano un campo di ricerca ancora in piena evoluzione, dove molte delle questioni non sono ancora risolte, e nemmeno ancora ben poste... In effetti esistono numerosi lavori teorici che però talvolta non sono pertinenti nelle applicazioni; per esempio alcuni schemi di discretizzazione si rivelano difficilmente simulabili. Noi abbiamo scelto di analizzarne due molto noti in letteratura: lo **schema di discretizzazione di Eulero** e lo **schema di discretizzazione di Milshtein**.

Gli schemi presuppongono, per cominciare, una discretizzazione dell'intervallo temporale di interesse, ad esempio $[0, T]$. Sia $h = T/n$ il passo, con $n \in \mathbb{N}$ che rappresenta il numero dei sotto-intervalli in cui viene diviso $[0, T]$. Quindi, tali sotto-intervalli hanno estremi

$$t_j = j\,h, \qquad \text{per } j = 0, 1, \ldots, n.$$

Uno schema di discretizzazione tipicamente è volto ad approssimare il valore della diffusione X agli istanti t_j. Indichiamo con $(\bar{X}^h_{t_j})_{j=0,\ldots,n}$ lo "schema" di approssimazione di $(X_{t_j})_{j=0,\ldots,n}$. Esso sarà in generale definito in modo iterativo da una formula tipo:

$$\bar{X}^h_{t_j} = F(t_j,\, \bar{X}^h_{t_{j-1}},\, h,\, \Delta^h_j W)$$

dove la funzione F è normalmente un polinomio dipendente dai coefficienti di diffusione b e σ, che regolano la dinamica della diffusione X, ed eventualmente dalle loro derivate mentre $\Delta_j^h W = W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$ è la variazione del moto browniano nell'intervallo $[t_{j-1}, t_j]$.

Una volta stabilito lo schema, occorre definire il criterio di convergenza più appropriato al problema studiato. Esistono infatti differenti criteri di convergenza, che corrispondono a delle motivazioni differenti. I criteri di cui ci occupiamo sono i seguenti.

- **Convergenza forte.**

  Si impone allo schema di convergere in media quando il passo di discretizzazione h tende verso lo zero, ovvero

  $$\mathbb{E}\left[\sup_{j=0,\ldots,n}\left|X_{t_j} - \bar{X}_{t_j}^h\right|^{2p}\right] \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

  oppure di convergere q.c. verso la soluzione quando h tende verso zero:

  $$\sup_{j=0,\ldots,n}\left|X_{t_j} - \bar{X}_{t_j}^h\right| \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

- **Convergenza debole.**

  Per una certa classe di funzioni f, per esempio a crescita polinomiale, si impone allo schema di convergere in legge verso la soluzione:

  $$\left|\mathbb{E}[f(X_T)] - \mathbb{E}\left[f\left(\bar{X}_T^h\right)\right]\right| \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ovviamente la situazione è radicalmente differente da quella delle equazioni differenziali ordinarie. Ad esempio, in letteratura è stato osservato che

- non si possono scrivere degli schemi di discretizzazione che siano contemporaneamnte simulabili e che possiedano un ordine arbitrariamente grande di convergenza;
- secondo il criterio di convergenza scelto, gli schemi di discretizzazione più riusciti non sono uguali per tutti i problemi da risolvere;

- lo studio della stabilità degli schemi, è uno dei problemi più difficili da risolvere.

I due esempi di riferimento di questa tesi sono, come già detto, gli schemi classici di Eulero e Milshtein, definiti come:

- **schema di discretizzazione di Eulero**: $\bar{X}^h_{t_0} = \bar{X}^h_0 = x$ e per $j = 1, \ldots, n$,

$$\bar{X}^h_{t_j} = \bar{X}^h_{t_{j-1}} + b\left(t_{j-1}, \bar{X}^h_{t_{j-1}}\right) h + \sigma\left(t_{j-1}, \bar{X}^h_{t_{j-1}}\right) \Delta^h_j W,$$

  dove $\Delta^h_j W = W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$;

- **schema di discretizzazione di Milshtein**: $\bar{X}^h_{t_0} = \bar{X}^h_0 = x$ e per $j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} \bar{X}^h_{t_j} = \bar{X}^h_{t_{j-1}} + b\left(t_{j-1}, \bar{X}^h_{t_{j-1}}\right) h + \tfrac{1}{2}\sigma\sigma'\left(t_{j-1}, \bar{X}^h_{t_{j-1}}\right)\left(\left(\Delta^h_j W\right)^2 - h\right) \\ +\sigma\left(t_{j-1}, \bar{X}^h_{t_{j-1}}\right) \Delta^h_j W, \end{aligned}$$

  dove, ancora una volta, $\Delta^h_j W = W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$.

Osserviamo che lo schema di Eulero di fatto coincide con quello classico (deterministico) per l'approssimazione di equazioni differenziali ordinarie: si tratta di "congelare" i coefficienti di diffusione (b e σ) nelle osservazioni che man mano si vengono ad effettuare e considerare nell'eds (1) i coefficienti (costanti) che si ottengono.

Lo schema di Milshtein è un pò più sofisticato. L'idea intuitiva consiste nell'approssimare i coefficienti della diffusione con lo sviluppo all'ordine zero per il drift b e al primo ordine per il coefficiente di diffusione σ (il che spiega la presenza della derivata prima di σ). L'idea intuitiva sottostante lo schema di Milshtein si può riassumere come segue (col simbolo "$\simeq$" indicheremo una generica - o meglio non troppo specificata [vogliamo dare un'idea intuitiva!] - approssimazione). Dalla (1) segue che, per $t \in [t_{j-1}, t_j]$,

$$dX_t \simeq b(X_{t_{j-1}})\, dt + \Big(\sigma(X_{t_{j-1}}) + \sigma'(X_{t_{j-1}})\,(X_t - X_{t_{j-1}})\Big) dW_t.$$

Ora, poiché

$$\begin{aligned} X_t - X_{t_{j-1}} &\simeq \int_{t_{j-1}}^{t} \Big(b(X_{t_{j-1}})\, dt + \sigma(X_{t_{j-1}})\, dW_t \Big) \\ &= b(X_{t_{j-1}})(t - t_{j-1}) + \sigma(X_{t_{j-1}})(W_t - W_{t_{j-1}}), \end{aligned}$$

sostituendo nell'approssimazione di sopra otteniamo

$$X_{t_j} \simeq X_{t_{j-1}} + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Big(b(X_{t_{j-1}})\, dt + \sigma(X_{t_{j-1}})\, dW_t \Big)$$
$$+ \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sigma'(X_{t_{j-1}}) \Big(b(X_{t_{j-1}})(t - t_{j-1}) + \sigma(X_{t_{j-1}})(W_t - W_{t_{j-1}}) \Big)\, dW_t.$$

Svolgendo, si ottiene:

$$X_{t_j} \simeq X_{t_{j-1}} + b(X_{t_{j-1}})\, h + \sigma(X_{t_{j-1}})\, \Delta_j^h W$$
$$+ \sigma'(X_{t_{j-1}}) b(X_{t_{j-1}})\, h\, \Delta_j^h W + \sigma\, \sigma'(X_{t_{j-1}}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} (W_t - W_{t_{j-1}}) dW_t,$$

ed è facile vedere che

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} (W_t - W_{t_{j-1}}) dW_t = \frac{1}{2} \Big((\Delta_j^h W)^2 - h \Big).$$

Questo termine quindi si comporta come h, come d'altra parte tutti gli altri termini eccetto $\sigma'(X_{t_{j-1}}) b(X_{t_{j-1}})\, h\, \Delta_j^h W$. Ma poiché quest'ultimo si comporta come[1] $h\sqrt{h}$, lo ignoriamo ed otteniamo:

$$X_{t_j} \simeq X_{t_{j-1}} + b(X_{t_{j-1}})\, h + \sigma(X_{t_{j-1}})\, \Delta_j^h W + \frac{1}{2} \sigma\, \sigma'(X_{t_{j-1}}) \Big((\Delta_j^h W)^2 - h \Big),$$

il che giustifica (almeno intuitivamente) lo schema di Milshtein.

I criteri di convergenza che studieremo sono la convergenza forte e la convergenza debole, così come elencate in precedenza. Al secondo daremo maggiore spazio, perché, come vedremo, si rivela più interessante e utile per l'approssimazione del prezzo di opzioni, argomento che vogliamo approfondire in questa tesi.

[1] Ricordiamo infatti che $\Delta_j^h W \overset{\mathcal{L}}{=} \sqrt{h}\, Z$ (il simbolo "$\overset{\mathcal{L}}{=}$" denota l'uguaglianza in legge), dove Z è una gaussiana standard.

Nel Capitolo 2 riportiamo i risultati classici di convergenza forte (presi principalmente dalla bella tesi di dottorato di Faure [12]): sotto ipotesi classiche[2] sui coefficienti di diffusione, lo schema di discretizzazione di Eulero ha velocità di convergenza forte pari a $\sqrt{h}$, mentre lo schema di discretizzazione di Milshtein ha velocità di convergenza forte pari a h. In pratica, l'approssimazione con lo schema di Milshtein risulta la migliore fra le due prese in considerazione. In tutte le dimostrazioni di questo capitolo utilizziamo la markovianità del processo e alcune proprietà di martingala, unite a disuguaglianze opportune (ad esempio Gronwall e Burkholder).

La convergenza debole è studiata nel Capitolo 3, dove si dimostra, seguendo il celebre lavoro di Talay e Tubaro [26], che in tal caso i due schemi risultano essere dello stesso ordine: la velocità di convergenza è infatti h in entrambi i casi. Dunque, l'aggiunta del termine correttivo tipica dello schema di Milshtein non produce migliorie rispetto ad Eulero quando l'interesse è per la convergenza debole. Le tecniche di dimostrazione da noi usate in questo capitolo utilizzano principalmente la rappresentazione delle soluzioni tramite la formula di Feynman-Kac e lo sviluppo di Taylor al quarto ordine.

Nella seconda parte della tesi si considera la convergenza debole per **diffusioni uccise**[3], utili per le applicazioni finanziarie di cui parleremo in seguito. Vediamo di cosa si tratta.

In poche parole, "uccidere" una diffusione significa congelarla qualora essa raggiunga il bordo di un dominio prefissato, o anche non considerare affatto ciò che le capita in caso di uscita. Il dominio che qui trattiamo è semplicemente un intervallo del tipo (L, U), dove $L < U$ sono due punti fissati che hanno il significato di barriere. L'istante in cui la diffusione raggiunge il bordo è quindi dato da

$$\tau = \inf\{t > 0 \,:\, X_t \notin (L, U)\}$$

(con la convenzione di porre $\tau = +\infty$ qualora $X_t \in (L, U)$ per ogni $t \in [0, T]$). Come approssimare τ sulla base di uno schema di discretizzazione? In una

[2]Ad esempio, $b(t, x)$ e $\sigma(t, x)$ lipschitziane rispetto ad entrambe le variabili t e x.

[3]Va detto che in letteratura non sono presenti risultati di convergenza forte per diffusioni uccise

prima fase, lo si può fare semplicemente prendendo il primo istante tra i t_j in cui lo schema $(\bar{X}_{t_j})_{j=0,1,\dots,n}$ si osserva al di fuori di (L,U), ovvero ponendo l'approssimazione di τ pari a

$$\tau^h = \inf\{j \geq 0 \,:\, \bar{X}^h_{t_j} \notin (L,U)\}$$

(con la convenzione di porre $\tau^h = +\infty$ qualora $\bar{X}^h_{t_j} \notin (L,U)$ per ogni $j = 0,1,\dots,n$).

Per le applicazioni finanziare di cui ci occuperemo (prezzo di opzioni con barriere), si rivela utile l'approssimazione di medie del tipo

$$\mathbb{E}[f(X_T)\,\mathbb{I}_{\tau>T}],$$

dunque la convergenza debole in questo caso, che denomineremo schema **standard** di dicretizzazione per diffusioni uccise, sarà per noi la seguente:

- **convergenza debole per diffusioni uccise:**

  per una certa classe di funzioni f, per esempio a crescita polinomiale, si impone allo schema di diffusione uccisa di convergere in legge verso la soluzione nel modo seguente:

$$\left|\mathbb{E}\left[f(X_T)\,\mathbb{I}_{\tau>T}\right] - \mathbb{E}\left[f(\bar{X}^h_T)\,\mathbb{I}_{\tau^h>T}\right]\right| \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Il Capitolo 4 contiene i risultati sulla velocità di convergenza, presi dal lavoro di Costantini, Pacchiarotti e Sartoretto [9]. Va detto che essi riguardano funzionali più generali[4] di $f(X_T)\,\mathbb{I}_{\tau>T}$. Il risultato principale mostra che, sotto opportune ipotesi sui coefficienti e di "non degenerazione" di f sul bordo, la velocità di convergenza non supera $h^{1/2-\varepsilon}$, per ogni $\varepsilon \in (0,1/2)$ (quindi, "moralmente" non supera $\sqrt{h}$). Occorre sottolineare che tale risultato riguarda lo schema (qui, standard) di Eulero e che in letteratura non ci sono

[4]In dettaglio, si considerano funzionali della forma

$$F_{t,T}(X) = \mathbb{I}_{T<\tau} f(X_T)\, e^{\int_0^T c(r,X_r)\,dr} + \mathbb{I}_{T>\tau} g_1(\tau, X_\tau)\, e^{\int_0^\tau c(r,X_r)\,dr}$$

dove, $c : [0,T] \times [L,U] \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua e posto ∂D il bordo (frontiera) di un insieme D, $f : [L,U] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g_1 : [0,T] \times \partial(L,U) \longrightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue.

risultati di velocità di convergenza riguardanti lo schema di Milshtein. Tecniche essenziali per le dimostrazioni proposte in questo capitolo sono state la rappresentazione delle soluzioni tramite la formula di Feynman-Kac e lo sviluppo di Taylor al terzo o quarto ordine.

Nel Capitolo 5 analizzeremo un ulteriore schema per diffusioni uccise, detto **continuo**, recentemente introdotto da Gobet [13] e [14].

Abbiamo visto che lo schema di Eulero per diffusioni uccise, che abbiamo chiamato "standard", consiste di fatto nell'approssimare la diffusione usando l'usuale schema di Eulero agli istanti delle discretizzazione t_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, e, di fatto, approssiamando il processo durante $[t_{j-1}, t_j)$ congelandone la posizione al tempo t_{j-1}, cioè matenendolo costante. In tal modo, il tempo di uscita è inevitabilmente il primo istante dei t_{j-1} in cui la diffusione si è osservata fuori da (L, U).

Lo schema "continuo" differisce dal precedente solo nell'approssimazione durante $[t_{j-1}, t_j)$: in tal caso, infatti, si considera l'approssimante che si ottiene interpolando "linearmente" (sulla variabile temporale t e sul moto browniano) le posizioni agli istanti t_{j-1} e t_j. In formule, detto $(\tilde{X}_t^h)_{t\in[0,T]}$, con $t_j = jh$ e $j = 1, \ldots, n$, tale schema, si ha

$$\begin{aligned} &\tilde{X}_0^h = \tilde{X}_{t_0}^h = X_0 \\ &\tilde{X}_{t_j}^h = \tilde{X}_{t_{j-1}}^h + b(\tilde{X}_{t_{j-1}}^h)\,(t - t_{j-1}) + \sigma(\tilde{X}_{t_{j-1}}^h)\,(W_t - W_{t_{j-1}}), \end{aligned} \tag{2}$$

per $t \in [t_{j-1}, t_j]$. Il tempo di uscita approssimante si definisce quindi come il primo istante in cui $\tilde{X}_t^h$ esce da (L, U):

$$\tilde{\tau}_c := \inf\Big\{t > 0 \ : \ \tilde{X}_t \notin (L, U)\Big\}.$$

L'obiettivo è analizzare l'errore

$$Err_c(f, x, h) := \mathbb{E}_x\left[f(\tilde{X}_T)\mathbb{I}_{T<\tilde{\tau}_c}\right] - \mathbb{E}_x\left[f(X_T)\mathbb{I}_{T<\tau}\right] \tag{3}$$

come funzione di h e studiarne la velocità di convergenza a 0.

Il risulato di convergenza che si ottiene mostra che, sotto ipotesi di regolarità su b, σ, si ha

$$Err_c(f, x, h) = C\,h + o(h),$$

purché f sia una funzione misurabile con supporto esattamente incluso in (L, U) (questa condizione di supporto può essere un pò indebolita se f è abbastanza regolare). Tali fatti saranno riportati senza dimostrazione. Infatti, poiché prerequisito essenziale per la comprensione delle dimostrazioni di questi risultati è il Calcolo di Malliavin (argomento assolutamente non banale che esula dagli scopi di questa tesi), per gli approfondimenti rimanderemo direttamente agli articoli già citati di Gobet [13] e [14].

In questa tesi, proporremo in seguito anche uno schema di Milshtein "continuo". L'idea che ci ha ispirati è dettata dalle seguenti considerazioni, che tengono ovviamente conto di parallelismi con lo schema di Eulero continuo. Posto, al solito, $t_j = jh$, $j = 1, \ldots, n,$, il nostro schema, denotato con $\tilde{X}^h$, pone $\tilde{X}^h_0 = \tilde{X}^h_{t_0} = X_0$ e

$$\begin{aligned} \tilde{X}^h_{t_j} = \tilde{X}^h_{t_{j-1}} + &\left[b(\tilde{X}^h_{t_{j-1}}) + \frac{1}{2}\sigma\sigma'(\tilde{X}^h_{t_{j-1}}) \frac{(\Delta_j W)^2 - h}{h} \right] h \\ &+ \sigma(\tilde{X}^h_{t_{j-1}}) \, (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}). \end{aligned} \tag{4}$$

Fin qui, niente di nuovo: abbiamo semplicemente scritto lo schema di Milshtein (discreto). La novità infatti consiste nella definizione di $\tilde{X}^h_t$ per $t \in [t_{j-1}, t_j)$: l'idea è di sostituire h (nella parte in dt) con $(t - t_{j-1})$ e $(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})$ (nella parte in dW) con $(W_t - W_{t_{j-1}})$, come d'altra parte già fatto nel caso di Eulero. Dunque, per $t \in [t_{j-1}, t_j]$ poniamo

$$\begin{aligned} \tilde{X}^h_t = \tilde{X}^h_{t_{j-1}} + &\left[b(\tilde{X}^h_{t_{j-1}}) + \frac{1}{2}\sigma\sigma'(\tilde{X}^h_{t_{j-1}}) \frac{(\Delta_j W)^2 - h}{h} \right] (t - t_{j-1}) \\ &+ \sigma(\tilde{X}^h_{t_{j-1}}) \, (W_t - W_{t_{j-1}}). \end{aligned} \tag{5}$$

La domanda che sorge spontanea è: in legge, gli schemi per diffusioni uccise (Eulero e Milshtein, discreto e continuo) si comportano allo stesso modo? Ricordiamo che in letteratura gli unici risultati esistenti riguardano le diffusioni libere (ovvero, niente bordi e tempi di uscita) e garantiscono che i due schemi hanno stessa velocità di convergenza. Il problema è: accade la stessa cosa anche per diffusioni uccise?

Tali domande, a nostro avviso, sono pertinenti. Infatti, abbiamo visto che Milshtein dà risultati più precisi quando si consideri l'approssimazione forte.

Ciò significa che in prossimità del bordo, i valori approssimanti dati dallo schema di Milshetin sono più vicini ai valori veri e questo fa presumere che la conseguente approssimazione del tempo di uscita sia più realistica di quella che si ottiene usando lo schema di Eulero. Per dare una prima risposta a tali domande, abbiamo effettuato uno studio numerico, usando una particolare diffusione molto apprezzata dagli studiosi di finanza matematica. Prima di entrare nei dettagli dei risvolti finanziari di questa tesi, anticipiamo i risultati del nostro studio empirico: senz'altro gli schemi continui sono più veloci di quelli discreti (il che, non è affatto sorprendente, anche alla luce dei risultati di convergenza debole esposti in precedenza), e per quanto riguarda il confronto Milshtein-Eulero, si ha:

- approssimazione "standard": i nostri risultati concordano sempre nel postulare che i due schemi (Eulero e Milshtein) abbiano stessa velocità di convergenza;

- approssimazione "continua": in linea di massima abbiamo conclusioni analoghe al caso precedente. Tuttavia quando il passo è molto piccolo, in taluni casi abbiamo ottenuto risultati migliori con lo schema di Milshtein.

Vediamo ora qual è il problema finanziario di cui ci siamo occupati, che da una parte giustifica l'esigenza di costruire schemi precisi e dall'altra ci ha consentito di effettuare prove numeriche particolarmente stimolanti per lo studio della velocità di convergenza.

Il contesto finanziario in cui ci siamo posti è il problema del calcolo del prezzo di opzioni.

Sia S_t il prezzo al tempo t del titolo finanziario sottostante l'opzione (ad esempio, un'azione quotata in borsa o una valuta). Una opzione d'acquisto, detta ***call***, è un contratto che garantisce al suo acquirente il diritto, ma non l'obbligo, di comprare una certa quantità di un'attività finanziaria (**titolo di base**), entro una certa data (**tempo di maturità**), ad un certo prezzo fissato (**prezzo di esercizio**). In questo caso, l'eventuale (perché aleatorio) profitto da parte dell'acquirente, detto ***payoff***, è dato da

$$\phi_{call}(S_T) = \max(S_T - K, 0)$$

dove: T denota la maturità, S_T è il valore del titolo sottostante a maturità e K denota il prezzo di esercizio.

In modo analogo si introducono le opzioni di vendita, dette ***put***: a maturità, colui che compra, compra il diritto, ma non l'obbligo, di vendere qualcosa, a maurità T e al prezzo di esercizio K. Il *payoff* di un'opzione *put* è quindi dato da

$$\phi_{put}(S_T) = \max(K - S_T, 0).$$

Ovviamente, esistono opzioni molto più generali delle *call* e *put*, caratterizzate dal valore a maturità T. Tale valore si modellizza come $F(S)$, dove $F(S)$ denota una variabile aleatoria non negativa e misurabile rispetto alla sigma algebra $\sigma(S_t\,;\, t \leq T)$. Nei casi sopra riportati, si ha $F(S) = \phi_{call}(S_T)$ e $F(S) = \phi_{put}(S_T)$: quindi, F è semplicemente una funzione di S_T. Esistono casi invece in cui F dipende da tutta l'evoluzione del processo di prezzo S durante l'intervallo di tempo $[0, T]$. Le opzioni che ne conseguono prendeono il nome di ***path dependent***. Un esempio classico, che qui abbiamo studiato, è dato dalle **opzioni call con barriere**, in particolare le opzioni ***knock-out***. In questo caso al contratto vengono aggiunti due livelli $L < U$ e

- se il processo di prezzo non ha mai raggiunto le barriere prefissate allora il *payoff* associato è uguale a quello visto in precedenza per una *call* standard;

- se invece almeno uno dei due livelli è stato raggiunto allora l'opzione si annulla, cioè il *payoff* diventa 0.

Per formalizzare meglio in termini matematici il *payoff* di una opzione con barriere, è quindi necessario introdurre il tempo in cui S raggiunge le barriere, ovvero il tempo di uscita di S dall'intervallo (L, U):

$$\tau = \inf\{t > 0 \,:\, S_t \notin (L, U)\}$$

(ovviamente, $\tau = +\infty$ se $S_t \in (L, U)$ per ogni $t \leq T$). Allora, il payoff è dato da:

$$F(S) = \phi_{call}(S_T)\, \mathbb{I}_{\tau > T}.$$

È evidente che in tal caso occorre conoscere $\mathbb{I}_{\tau > T}$, dunque c'è dipendenza da tutta l'evoluzione di S su $[0, T]$.

Le opzioni, così come descritte, hanno un costo: colui che detiene l'opzione "acquista" la possibilità di fare un affare all'istante T e colui che la cede deve coprirsi da eventuali perdite. Vediamo come si calcola il prezzo di un'opzione.

Un modo classico di modellizzare il processo di prezzo sottostante l'opzione è di assumere che S_t si evolva seguendo un processo di diffusione. Sotto buone ipotesi sui coefficienti di diffusione[5], si dimostrano due condizioni essenziali da imporre sul mercato per poter calcolare in modo univoco il prezzo di un'opzione: la **mancanza di arbitraggio** (rozzamente, l'impossibilità di fare profitti certi) e la **completezza del mercato** (in breve, la possibilità di costruirsi univocamente un buon portafoglio da parte del venditore dell'opzione che gli consenta di onorare il contratto stabilito col compratore). Sotto queste ipotesi, si dimostra che il prezzo di una opzione con *payoff* $F(S)$ è dato dalla formula:

$$prezzo = e^{-rT}\, \mathbb{E}[F(S)]$$

dove r denota il **tasso istantaneo di interesse** e la media va intesa sotto un'opportuna misura detta **neutrale al rischio** (la cui esistenza è garantita dall'assenza di arbitraggio e la cui unicità segue dalla completezza del mercato).

Ritornando agli esempi di opzioni sopra descritte, nel caso di call ottenamo:

$$\begin{array}{ll} prezzo = e^{-rT}\, \mathbb{E}[\max(S_T - K, 0)] & \textit{call} \text{ standard} \\ prezzo = e^{-rT}\, \mathbb{E}[\max(S_T - K, 0)\, \mathbb{I}_{\tau > T}] & \textit{call knock-out} \text{ con barriere.} \end{array}$$

Dunque, occorre approssimare (anche con una buona precisione!) quantità del tipo:

$$\mathbb{E}[f(S_T)] \quad \text{e} \quad \mathbb{E}[f(S_T)\, \mathbb{I}_{\tau > T}]$$

[5]Più o meno le classiche: lipschitzianeità nelle variabili tempo e spazio, e una certa non degenerazione del coefficiente di diffusione

dove S_T è il valore di una diffusione al tempo T.

Ci ritroviamo, quindi, a dover usare:

- schemi di discretizzazione per diffusioni libere, nel caso di opzioni non *path-dependent*;
- schemi di discretizzazione per diffusioni uccise, nel caso di opzioni *path-dependent* di tipo *knock-out* con barriere.

Il processo di diffusione che abbiamo analizzato in questa tesi per l'evoluzione del prezzo $(S_t)_{t\in[0,T]}$, è il modello **CEV** (*Constant Elasticity of Variance*). La sua caratteristica principale è che la volatilità è funzione del prezzo e coinvolge due parametri (al contrario del più classico modello di Black e Scholes, che prevede un solo parametro). Nel modello CEV il prezzo S_t è soluzione di una equazione differenziale stocastica (direttamente sotto la misura neutrale al rischio) del tipo

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_1 S_t^{\alpha/2} dW_t. \tag{6}$$

dove $\sigma_1 = \delta S_0^{1-\alpha/2}$, mentre δ , α sono delle costanti, con $\delta > 0$ e $\alpha \in [0, 2]$ (r denota, al solito, il tasso di interesse istantaneo).

Per testare gli schemi di discretizzazione (Eulero e Milshtein, standard e continuo), abbiamo studiato l'andamento dell'approssimazione numerica del prezzo di opzioni *call* con barriere, scritte sul modello CEV per il titolo sottostante, utilizzando un metodo Monte Carlo (il linguaggio di programmazione usato è stato **C** - in Appendice riportiamo i listati). La valutazione (empirica) dell'errore è stata effettuata confrontando i risultati delle nostre simulazioni, al variare del passo di discretizzazione h, con quelli provenienti dal lavoro di Boyle e Tian [7], che utilizzano un metodo deterministico (ad albero) per il calcolo di opzioni call e put con barriere sotto il modello CEV. Tale metodo è piuttosto noto in letteratura, ampiamente studiato e ormai concordemente accettato per la sua validità e precisione.

Concludiamo con una descrizione dei contentuti di questa tesi capitolo per capitolo.

- **Capitolo 1.** Iniziamo il nostro lavoro riportando alcuni risultati preliminari che saranno utilizzati nei prossimi capitoli. Si tratta soprattutto di risultati classici, per le cui dimostrazioni rimandiamo a Baldi [2], Billingsley [5], Kloeden e Platen [17] e Øksendal [20], che sono stati i nostri testi di riferimento per la stesura dell'intero capitolo. Le dimostrazioni che abbiamo presentato riguardano esclusivamente alcuni Teoremi fondamentali per la rappresentazione delle soluzioni di equazione alle derivate parziali paraboliche e lineari per un problema di Cauchy-Dirichlet (formula di Feynman-Kac).

- **Capitolo 2.** In questo capitolo studieremo la convergenza forte dello schema di discretizzazione di Eulero e dello schema di discretizzazione di Milshtein. In particolare scopriremo che il primo schema ha velocità di convergenza pari a $\sqrt{h}$, mentre il secondo ha velocità di convergenza pari a h. Ci basiamo principalmente sulla tesi di Dottorato di Faure [12], ma un altro testo fondamentale è stato Kloeden-Platen [17].

- **Capitolo 3.** Qui studiamo la convergenza debole per diffusioni libere, ovvero l'approssimazione di quantità del tipo $\mathbb{E}[f(X_T)]$. Vedremo che sia nel caso dello schema di discretizzazione di Eulero sia nel caso di Milshtein, la convergenza è del primo ordine, cioè hanno velocità h. I lavori di riferimento di questo capitolo sono l'articolo di Talay e Tubaro [26] e l'articolo di Talay [25].

- **Capitolo 4.** Dato un intervallo aperto (L, U) di $\mathbb{R}$, un tempo fissato T e un passo di discretizzazione $h = T/n$, studiamo l'andamento dell'errore debole per una diffusione uccisa, approssimata utilizzando lo schema di discretizzazione di Eulero *standard*. In particolare dimostriamo che, sotto opportune ipotesi sui coefficienti e di "non degenerazione" di f sul bordo, la velocità di convergenza non supera $\sqrt{h}$. Il riferimento principale per questo capitolo è il lavoro di Costantini, Pacchiarotti e Sartoretto [9].

- **Capitolo 5.** In questo capitolo, dopo aver richiamato alcuni risultati preliminari in finanza matematica, introduciamo il modello di diffusione di studio in questa tesi: il modello CEV. Inoltre, presentiamo qui i risultati numerici ottenuti testando gli schemi standard. Per la stesura di questo capitolo abbiamo fatto riferimento principalmente al lavoro di rassegna di Runggaldier [23] e all'articolo di Boyle e Tian [7].

- **Capitolo 6.** In questo capitolo introdurremo i due schemi continui di discretizzazione per diffusioni uccise ed i nostri test numerici. I principali articoli di riferimento sono: Gobet [13] e [14], Boyle e Tian [7] e Baldi, Caramellino e Iovino [3].

- **Appendice.** In questa appendice riportiamo il testo dei programmi che abbiamo scritto per le nostre simulazioni. In particolare nel primo paragrafo illustriamo la procedura del generatore `KNUTH` di variabili aleatorie *Uniformi su (0,1)*, che è comune a tutti i programmi. Questo infatti viene richiamato direttamente o all'interno di un'altra procedura che, attraverso l'algoritmo di Box-Muller (listato subito dopo `KNUTH`), genera variabili aleatorie *Normali standard.*

Bibliografia

[1] P. Baldi. Exact Asymptotics for the Probability of Exit from a Domain and Applications to Simulation. *Ann. Probab.*, 23(4):1644–1670, 1995.

[2] P. Baldi. *Equazioni Differenziali Stocastische e Applicazioni*, volume 28 of *Quaderni dell'unione matematica*. Pitagora, Bologna, 2000.

[3] P. Baldi, L. Caramellino e M.G. Iovino. Pricing General Barrier Options: a Numerical Approach using Sharp Large Deviations. *Math. Finance*, 9(4):293–322, 1999.

[4] P. Baldi e L. Caramellino. Asymptotics of Hitting Probabilities for General One-Dimensional Pinned Diffusions. *Ann. Appl. Probab.*, 12(3):1071–1095, 2002.

[5] P. Billingsley. *Probability and measure*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, third edition, 1995. A Wiley-Interscience Publication.

[6] F. Black e M. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81:637–654, 1973.

[7] P.P. Boyle e Y. Tian. Lookback and Barrier Options under the CEV Process. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 34(2):241–264, 1999.

[8] L. Caramellino e B. Pacchiarotti. Weak Approximation of a Brownian Motion Killed on Time-Dependent Barriers. *Monte Carlo Methods Appl.*, 8(3):221–236, 2002.

[9] C. Costantini, B. Pacchiarotti e F. Sartoretto. Numerical Approximation for Functionals of Reflecting Diffusion Processes. *SIAM J. Appl. Math.*, 58(1):73–102, 1998.

[10] J. Cox e S. Ross. The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics*, (3):145–166, 1976.

[11] M. Di Fazio. *Il Calcolo di Malliavin, con applicazioni alla Finanza Matematica.* Tesi di Laurea. Università degli studi Roma Tre, 2001.

[12] O. Faure. *Simulation du Mouvement Brownien et des Diffusion.* PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1992.

[13] E. Gobet. Weak Approximation of Killed Diffusion using Euler Schemes. *Stochastic Process. Appl.*, 87(2):167–197, 2000.

[14] E. Gobet. Euler Schemes and Half-Space Approximation for the Simulation of Diffusion in a Domain. *ESAIM Probab. Statist.*, 5:261–297 (electronic), 2001.

[15] J.M. Harrison e S.R. Pliska. Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading. *Stochastic Process. Appl.*, 11(3):215–260, 1981.

[16] N. Ikeda e S. Watanabe. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, volume 24 of *North-Holland Mathematical Library.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1981.

[17] P.E. Kloeden e E. Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, volume 23 of *Applications of Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[18] H. Kunita. Stochastic Differential Equations and Stochastic Flows of Diffeomorphisms. In *École d'été de probabilités de Saint-Flour, XII—1982*, volume 1097 of *Lecture Notes in Math.*, pages 143–303. Springer, Berlin, 1984.

[19] N. Kunitomo e M. Ikeda. Pricing Options with Curved Boundaries. *Math. Fin.*, 2:275–297, 1992.

[20] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, fourth edition, 1995. An introduction with applications.

[21] B. Pacchiarotti. *Approssimazione Numerica per Medie di Funzionali di Diffusioni Riflettenti.* Tesi di Dottorato in Matematica. Università degli studi di Roma La Sapienza, 1997.

[22] D. Revuz e M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1994.

[23] W. Runggaldier. Aspetti matematico probabilistici di nuove problematiche in finanza. *Boll. Un. Mat. Ital. A (7)*, 10(1):19–36, 1996.

[24] L. Słomiński. On Approximation of Solutions of Multidimensional SDEs with Reflecting Boundary Conditions. *Stochastic Process. Appl.*, 50(2):197–219, 1994.

[25] D. Talay. Discrétisation d'une Équation Différentielle Stochastique et Calcul Approché d'Espérances de Fonctionnelles de la Solution. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 20(1):141–179, 1986.

[26] D. Talay e L. Tubaro. Expansion of the Global Error for Numerical Schemes solving Stochastic Differential Equations. *Stochastic Anal. Appl.*, 8(4):483–509 (1991), 1990.

[27] S. Watanabe e T. Yamada. On the Uniqueness of Solutions of Stochastic Differential Equations. II. *J. Math. Kyoto Univ.*, 11:553–563, 1971.