

Enrico Valdinoci

Tori di transizione nella teoria KAM

Relatore Prof. Luigi Chierchia

* * * * *

0.1 Prologo (motivazioni più o meno fisiche)

Venere gira al contrario.

L'asse di rotazione di un pianeta non è esattamente perpendicolare alla sua orbita, ma possiede un'inclinazione, o obliquità. L'alternarsi delle stagioni è l'effetto più evidente del valore non nullo dell'inclinazione dell'asse terrestre. Se consideriamo i pianeti del sistema solare noti fin dall'antichità, ovvero Mercurio, Venere, Terra, Marte, Giove e Saturno, si osserva che i corrispondenti valori di obliquità spaziano in un intervallo piuttosto ristretto: dal caso di Mercurio, che ha un'obliquità praticamente nulla, a quello di Saturno, il cui asse è inclinato di 26° rispetto alla perpendicolare al piano dell'orbita.

Ad eccezione di Venere, il cui asse è inclinato di quasi 180° : Venere, quindi, ruota in senso inverso rispetto agli altri pianeti. Si può quindi congetturare¹ che, al momento della formazione del sistema solare, tutti i pianeti avessero essenzialmente la stessa obliquità, circa perpendicolare al piano orbitale, e che, in seguito, a causa di “piccole” perturbazioni dovute alla reciproca influenza tra pianeti e all'attrazione degli altri corpi celesti, l'asse di Venere abbia vagato in maniera disordinata, fino al ribaltamento completo della sua obliquità.

La teoria KAM² è un metodo matematico costruttivo e rigoroso per studiare la stabilità di questi sistemi.

Alcuni sistemi, detti integrabili, hanno una soluzione matematica definita: sono quindi completamente predicibili. Una perturbazione di questi sistemi può però essere non risolvibile esplicitamente, e il problema della stabilità può così diventare particolarmente spinoso – nel rigido mondo deterministico delle equazioni

¹Le considerazioni fisiche qui esposte sono estremamente approssimative. Per maggiori informazioni cfr. il divulgativo [CTP] e le referenze ivi segnalate.

²Il nome è in onore dei tre matematici A.N. Kolmogorov, V.I. Arnol'd e J. Moser.

di Newton³ compare l'impredicibilità⁴: le traiettorie diventano molto sensibili anche alle più piccole variazioni.

La teoria KAM nel caso sopra discusso prenderebbe in considerazione il sistema⁵ Sole-Venere, che è integrabile, e esaminerebbe poi la perturbazione di questo sistema dovuta alla presenza di Giove. In effetti, al posto del "vero" Giove viene considerato un oggetto di massa molto più piccola: se la massa di questo "pseudo-Giove" è sufficientemente piccola, alcune strutture geometriche del sistema imperturbato si conservano, garantendo la stabilità del moto in una regione piuttosto grande. È tuttavia possibile che alcuni moti si svolgano in una regione instabile: pur essendo vicini a traiettorie stabili, col passare di strani eoni⁶ l'asse si potrebbe lentamente allontanare dalla sua inclinazione originaria.

La costruzione delle regioni stabili avviene grazie a un processo iterativo in cui l'errore al passo successivo dell'algoritmo è quadratico rispetto a quello del passo precedente. La costruzione di traiettorie instabili fa uso dei tori coi baffi: si tratta di tori, invarianti per il moto, dotati di una varietà stabile e una varietà instabile; queste due varietà sono i baffi del toro. L'esistenza di una catena di tali tori che

³Se consideriamo l'energia (o hamiltoniana) di un sistema senza attrito $H(p, q)$, con p e q che variano in sottoinsiemi di \mathbf{R}^N , le equazioni del moto sono $\dot{p} = -\partial_q H$ e $\dot{q} = \partial_p H$, dove il punto indica la derivata rispetto al tempo.

⁴"L'altro passeggero era il dottor Ian Malcolm, anche lui uno scienziato, per l'esattezza un matematico.

—Questo parco non può funzionare, a causa della teoria del caos. A guardare bene il fondo delle cose, tutto è imprevedibile."

(M. Chrichton & S. Spielberg - *Jurassic Park*)

—L'elementare teoria del caos dimostra che ad un certo istante tutti i robot di questo parco si ribelleranno contro di noi!

—E quando succederà?!?

—Tra 24 ore.

(un robot si alza da un lettino e strangola un tecnico di laboratorio)

—Oh. Ho dimenticato di riportare un 1 in un'addizione.

(Lo scienziato dei *Simpson* che ha costruito i robot-giocattolo del parco di Grattachecca & Fichetto)

⁵La teoria KAM si occupa dei sistemi senza attrito e si applica quindi a esempi più generali di quelli planetari. Con queste tecniche è possibile anche trattare problemi di stabilità relativi agli acceleratori di particelle (cfr. [M78]).

⁶"Notiamo che il comportamento delle soluzioni delle equazioni del moto su intervalli di tempo infiniti ha un rapporto solo indiretto con il problema del moto dei pianeti reali. Infatti, su un intervallo di tempo dell'ordine del miliardo di anni si risentono fortemente gli effetti non conservativi piccoli, trascurati nelle equazioni di Newton."

([ARN], pag. 409)

Per l'investigazione della stabilità per intervalli di tempo finiti si procede più facilmente con il Teorema della media di Birkhoff.

verificano alcune proprietà geometriche dimostra che il sistema non è stabile.

La linea di confine tra la stabilità e l'instabilità è segnata dalla razionalità o irrazionalità di alcune quantità fisiche. Ciò comporta una notevole imprevedibilità del sistema, in quanto, dal punto di vista fisico, a causa degli errori di misurazione, è impossibile distinguere un numero razionale da uno irrazionale.

0.2 Risultati principali

I tre risultati principali di questa tesi sono contenuti nel §8 e nel §9 della Parte II:

(★ 1) Il Teorema 8.1 presenta un Teorema KAM sulla conservazione dei tori parzialmente iperbolici su una superficie ad energia fissata per l'hamiltoniana

$$H(I, \varphi, p, q) = h(I, pq; \mu) + \mu f(I, \varphi, p, q; \mu)$$

con I in un sottoinsieme di \mathbf{R}^{N-1} , $\varphi \in \mathbf{T}^{N-1}$, $p, q \in \mathbf{R}$, $|p|, |q| \leq R$, dove μ è un parametro perturbativo piccolo. Ci riferiremo a p e a q chiamandole, a volte, “variabili iperboliche”. Le I sono le “azioni”, le φ gli “angoli”.

Fissato $I_0 \in \mathbf{R}^{N-1}$, l'hamiltoniana

$$h(I, pq) \quad (I, \varphi, p, q) \in \mathbf{R}^{N-1} \times \mathbf{T}^{N-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}, \quad |p| \leq R, \quad |q| \leq R$$

ammette il toro $\mathcal{T} \equiv \{(I_0, \varphi, 0, 0), \varphi \in \mathbf{T}^{N-1}\}$. come toro invariante.

Se poi $\mathcal{I}(s)$ è una curva qualsiasi, con $\mathcal{I}(0) = I_0$, \mathcal{T} è contenuto nella superficie $\mathcal{S} \equiv \{(\mathcal{I}(pq), \varphi, p, q), \varphi \in \mathbf{T}^{N-1}, |p| \leq R, |q| \leq R\}$, invariante per tempi brevi, su cui il moto è:

$$\Phi_h^t(\mathcal{I}(pq), \varphi, p, q) = (\mathcal{I}(pq), \varphi + \omega t, pe^{-\lambda t}, qe^{\lambda t})$$

con ω e λ che dipendono solo dal prodotto delle variabili p e q . Il Teorema 8.1 mostra che la maggior parte di questi tori si conservano sotto piccole perturbazioni e che anche le superfici invarianti si conservano, a patto di scegliere una curva opportuna. Grossolanamente, il Teorema 8.1 asserisce che:

Se l'hamiltoniana $H(I, \varphi, p, q) = h(I, pq; \mu) + \mu f(I, \varphi, p, q; \mu)$ è reale analitica, con h sufficientemente generale, e $|\mu|$ è sufficientemente piccolo, allora esiste una trasformazione canonica C^∞ e C^∞ -vicina all'identità, analitica nel parametro μ (oltre che negli angoli e nelle variabili iperboliche), tale che, su un opportuno insieme di Cantor, la nuova hamiltoniana dipenda solo dalle azioni e dal prodotto delle variabili iperboliche. Su tale insieme, le frequenze della nuova hamiltoniana sono vicine alle frequenze dell'hamiltoniana H . Si ottengono infine dei tori invarianti $(N - 1)$ -dimensionali con baffi N -dimensionali. Tali tori riempiono la maggior parte dello spazio a loro disposizione, con densità $1 - O(\sqrt{|\mu|})$.

Tale risultato è simile al Lemma 1 di [CG94] (e anche al Teorema 3.1 di [RW97], che però è a frequenza fissata anzichè ad energia fissata). La strategia dimostrativa usata è però in parte diversa da [CG94], e si ottengono inoltre alcune proprietà aggiuntive. Le differenze più rilevanti con [CG94] sono schematizzabili nei seguenti punti:

- Usiamo le Trasformazioni di Lie al posto delle funzioni generatrici, come in [RW97].
- Otteniamo una relazione tra la costante di diofantinità γ e la taglia della perturbazione μ del tipo di quella ottenuta da [N82] e [P82] per il Teorema KAM classico, mostrando che si può prendere $\gamma = O(\sqrt{|\mu|})$. Con questo, si fa una stima della misura dell'insieme dei tori conservati: i “buchi” su cui il Teorema non vale sono non più grandi di $O(\sqrt{|\mu|})$. Si osserva anche che questa stima sulla misura dei tori conservati è ottimale, come mostra l'esempio $H(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2, p, q; \mu) = I_1^2/2 + I_2 + pq + \mu(\cos \varphi_1 - 1)$.
- Seguendo un'idea di [C90], estendiamo in maniera liscia le funzioni definite su insiemi di Cantor utilizzando le elementari funzioni C^∞ a supporto compatto. Si prova che la composizione delle trasformazioni così ottenute converge in metrica C^∞ a una trasformazione canonica C^∞ -vicina all'identità.
- Si prova la dipendenza analitica dal parametro μ , dovuta a una convergenza uniforme.

(★ 2) Nel Teorema 8.7 viene provato che i tori conservati col Teorema 8.1 esibiscono una proprietà di ostruzione secondo la definizione di [A64]: il flusso di fase di ogni intorno di un qualsiasi punto del baffo stabile interseca ogni varietà trasversa al baffo instabile. Questo è fatto nello spirito di [CG94]; ad essere precisi, però, in [CG94], pur provando l'esistenza di un'orbita instabile, si dimostra una proprietà di ostruzione apparentemente più debole di quella richiesta nella definizione di [A64], in quanto non viene dimostrata l'ostruzione per tutte le varietà trasverse, ma “solo” per quelle parametrizzate dagli angoli. Nel Lemma 8.6 proviamo però che se l'hamiltoniana è non singolare, tutte le varietà trasverse, a meno di spostarle un po' con il flusso di fase, *si possono parametrizzare con gli angoli*. Ciò permette di utilizzare il §8 di [CG94] per provare la transizione secondo la definizione di [A64].

(★ 3) Nel §9 proviamo che tutti i sistemi hamiltoniani “quasi-integrabili” posseggono, nelle vicinanze delle risonanze semplici, la geometria descritta⁷ nel §8. Più in dettaglio:

⁷Questo, almeno in teoria, costituisce una tecnica per costruire sistemi hamiltoniani

Denotiamo con $\pi : \mathbf{R}^{2N} \rightarrow \mathbf{R}^{N-1}$ la proiezione sulle prime $N - 1$ coordinate e fissiamo $\nu \in \mathbf{N}$, $\nu \geq 2$. Consideriamo il sistema $H(I, \varphi) = h(I) + \varepsilon f(I, \varphi; \varepsilon)$ con h e f sufficientemente generali. Sia \bar{I} tale che $\partial_{I_N} h(\bar{I}) = 0$. Fissiamo ε_0 sufficientemente piccolo e $\gamma = O(\varepsilon_0^{\nu/2})$. Allora, $\forall \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, esiste una trasformazione canonica $(I, \varphi) = \Phi(A', \alpha', p', q')$ ed un insieme $\Omega_\gamma \subseteq \mathbf{R}^{N-1}$, con densità non minore di $1 - O(\varepsilon_0^{\nu/2})$, tali che per tutti gli (A', α', p', q') verificanti

$$\pi \circ \Phi(A', \alpha', p', q') \in \Omega_\gamma$$

si ha che $H \circ \Phi(A', \alpha', p', q')$ dipende solo da A' e dal prodotto di p' per q' .

Si ottengono così dei tori invarianti $(N - 1)$ -dimensionali con baffi N -dimensionali, con densità non minore di $1 - O(\varepsilon_0^{\nu/2})$ sul livello di energia.

La differenza tra il §8 e il §9 è che il modello considerato nel §8 ha due parametri, come, ad esempio

$$H(J, \psi, p, q) = h(J) + \frac{1}{2}p^2 + \varepsilon(\cos q - 1) + \mu f(J, \psi, p, q; \varepsilon; \mu)$$

dove (J, ψ) variano in un sottoinsieme di $\mathbf{R}^{N-1} \times \mathbf{R}$, $(\psi, q) \in \mathbf{T}^{N-1} \times \mathbf{S}^1$, μ è un parametro piccolo e ε è un parametro qualsiasi (non necessariamente piccolo): questi sistemi per $\mu = 0$ e $\varepsilon \neq 0$ possiedono separatrici e sono per questo chiamati in [CG94] *a priori instabili*. I risultati dimostrati nel §8 valgono per μ sufficientemente piccolo rispetto a ε . Nel §9 si applicano questi risultati ad hamiltoniane del tipo

$$H(I, \varphi) = h(I) + \varepsilon f(I, \varphi; \varepsilon)$$

con I in un sottoinsieme di \mathbf{R}^N e $\varphi \in \mathbf{T}^N$. Questi sistemi, che sono completamente integrabili per $\varepsilon = 0$, vengono definiti in [CG94] *a priori stabili*. Il §9, quindi, si propone di esibire la struttura iperbolica dei sistemi a priori stabili nelle vicinanze delle risonanze semplici.

0.3 Schema della tesi

La tesi è divisa in due parti, più alcune appendici. La prima parte raccoglie i prerequisiti necessari, molti dei quali noti in letteratura; la seconda si occupa dei tori di transizione.

con “diffusione di Arnol’d”. Nelle vicinanze delle risonanze semplici si formano catene di tori iperbolici; se si riuscisse a dimostrare che il baffo instabile di ogni toro di una catena sufficientemente lunga interseca trasversalmente il baffo stabile del toro successivo, si proverebbe la diffusione.

Parte I

§1 Un sistema è detto completamente integrabile se ammette un'hamiltoniana del tipo $H(I, \varphi) = h(I)$, con $(I, \varphi) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{T}^N$, dipendente cioè dalle sole variabili di azione. Il moto è: $\Phi_H^t(I_0, \varphi_0) = (I_0, \varphi_0 + \omega_0 t)$, avendo denotato $\omega_0 \equiv h'(I_0)$. Se ω_0 è razionalmente indipendente l'orbita riempie densamente il toro $I_0 \times \mathbf{T}^N$. Nella Proposizione 1.5 si dimostra che se ω_0 è razionalmente dipendente la traiettoria si avvolge su un toro di dimensione più bassa: se ω_0 verifica r “relazioni indipendenti”, il moto avviene su un toro di dimensione $N - r$; la Proposizione 1.6 chiarisce meglio la definizione di “relazione indipendente”.

§2 Nel Teorema 2.12, si prova che ogni trasformazione canonica ammette una funzione generatrice. Da questo risultato segue che il determinante di una matrice simplettica è uguale a uno. Ciò è dimostrato nel Corollario 2.14, senza utilizzare le forme differenziali, come fa invece [ARN], ma seguendo un'idea di [DAU] che era stata considerata erronea (cfr. [ARN], pag. 236). Mostro poi che *ogni trasformazione canonica vicina all'identità* $(P, Q) = \Phi(p, q; \varepsilon)$ ammette una funzione generatrice del tipo $\mathcal{G}(P, q; \varepsilon) = P \cdot q + \varepsilon \chi(P, q; \varepsilon)$, e si dà una condizione necessaria e sufficiente affinché una trasformazione canonica vicina all'identità sia un *flusso hamiltoniano*.

Ci occupiamo poi delle Trasformazioni di Lie, cioè delle trasformazioni canoniche con struttura⁸ di flusso hamiltoniano. Si fornisce uno sviluppo in serie di un'hamiltoniana qualsiasi su cui agisce una Trasformata di Lie, dando anche una stima del resto.

§3 Un vettore $\omega \in \mathbf{R}^N$ si dice (γ, τ) -diofantino se $|\omega \cdot n| \geq \gamma/|n|^\tau, \forall n \in \mathbf{Z}^N - \{0\}$. Le Proposizioni 3.2 e 3.4 provano che per $\tau > N - 1$ i vettori diofantini hanno misura piena, mentre per $\tau < N - 1$ non ci sono vettori diofantini. L'Appendice C applicherà questi risultati per esibire un esempio di una serie di funzioni che converge su un insieme di misura piena, ma diverge su un insieme denso.

§4 Si presenta il Teorema della media di Birkhoff: assumendo opportune condizioni di non risonanza, un'hamiltoniana quasi integrabile $H(I, \varphi) = h(I) + \varepsilon f(I, \varphi; \varepsilon)$ può essere trasformata in una “ancora più vicina” all'integrabilità, del tipo $\mathcal{H}(y, x) = h_k(y) + O(\varepsilon^{k+1})$. Questo permette di avere una stima migliore dei tempi di stabilità, in quanto, per hamiltoniane del tipo $\mathcal{H}(y, x) = h_k(y) + O(\varepsilon^{k+1})$ le azioni sono vicine al loro valore iniziale per tempi di ordine ε^{-k} .

⁸Tramite i risultati sopra esposti, si può dimostrare che le Trasformazioni di Lie sono *tutte e sole le trasformazioni canoniche vicine all'identità* $\Phi(p, q; \varepsilon)$ verificanti una condizione di flusso. Esse ammettono una funzione generatrice del tipo $\mathcal{G}(P, q; \varepsilon) = P \cdot q + \varepsilon \chi(P, q; \varepsilon)$.

La tentazione è ora quella di “mandare k all’infinito”: formalmente otterremmo un’hamiltoniana completamente integrabile, in cui le azioni sono stabili per tempi infiniti. Tuttavia, tale procedimento è in genere divergente. Una delle cause di tale divergenza risiede nel fatto che nel procedimento compaiono dei denominatori che possono diventare molto piccoli⁹ al crescere di k . Tale fenomeno è noto come problema dei *piccoli denominatori*.

Il Teorema 4.7 è un Teorema della media in presenza di risonanze, in cui le variabili angolari risonanti andranno pensate come variabili “lente”.

§5 Si dimostra che le hamiltoniane “tipo pendolo” possono essere trasformate, conservando la struttura canonica, nelle vicinanze dell’equilibrio iperbolico, in hamiltoniane *puramente iperboliche*, cioè che dipendono solo dal prodotto delle variabili. Inoltre la trasformazione conserva l’esponente di Liapunov. In questo modo, i rami della separatrice vengono “raddrizzati” in modo da coincidere, nelle vicinanze dell’origine, con gli assi coordinati. In [CG94] si dimostra questo risultato con un algoritmo KAM. In questa tesi si procede invece come in [M56], applicando il metodo dei maggioranti, per provare direttamente che, in questo caso, *le serie di Birkhoff convergono*.

§6 Si considera l’hamiltoniana “quasi integrabile” $H(I, \varphi) = h(I) + \varepsilon f(I, \varphi; \varepsilon)$ con frequenza $\omega \equiv h'$ e si definiscono le condizioni di non degenerazione e non degenerazione isoenergetica. La Proposizione 6.2 mostra che la non degenerazione isoenergetica permette di mettere in relazione azioni e frequenze.

Nella Proposizione 6.3 otteniamo una semplice relazione tra la matrice di non degenerazione isoenergetica e la derivata seconda di una variabile di azione rispetto alle altre variabili di azione su un livello di energia non singolare¹⁰.

⁹In effetti, non credo che i piccoli denominatori siano l’*unica* causa della suddetta divergenza: nell’Appendice E esibirò un modello senza piccoli denominatori le cui serie di Birkhoff divergono! inoltre, anche nei casi in cui non ci sono piccoli denominatori, la dimostrazione della (eventuale) convergenza delle serie di Birkhoff può essere non banale, come nel caso del successivo Teorema 5.1. Nell’Appendice E, inoltre, si fa una stima del resto del Teorema della media, dalla quale sembra che la divergenza delle serie di Birkhoff non sia legata esclusivamente ai piccoli denominatori.

¹⁰Precisamente, denotando con il suffisso “tilde” la proiezione sulle prime $N - 1$ componenti, abbiamo dimostrato il risultato seguente:

Consideriamo l’hamiltoniana $h(I)$ con $I \in V \subseteq \mathbf{R}^N$ e sia $\omega(I) \equiv h'(I)$. Sia $N \geq 2$ e supponiamo $\omega_N \neq 0$. Sia $I_N(\tilde{I})$ tale che $h(\tilde{I}, I_N(\tilde{I})) = E$. Allora

$$\det \partial_{\tilde{I}}^2 I_N = (-1)^N \omega_N^{-N-1} \det \begin{pmatrix} h'' & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

Parte II

§7 Un toro \mathcal{T} si dice *toro coi baffi* se \mathcal{T} è una componente connessa dell'intersezione di due varietà W^s e W^u invarianti per il flusso di fase Φ^t e tali che $\forall x \in W^s$, $\text{dist}(\Phi^t(x), \mathcal{T}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ e $\forall x \in W^u$, $\text{dist}(\Phi^t(x), \mathcal{T}) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$.

Un *toro di transizione* è un toro coi baffi \mathcal{T} con la seguente proprietà: il flusso di fase di un qualsiasi intorno di un qualsiasi punto del baffo in arrivo W^s interseca ogni varietà trasversa al baffo in partenza W^u .

Assumiamo che il sistema abbia $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_i, \dots$ tori di transizione. Si dice che essi costituiscono una *catena di transizione* se il baffo in partenza di \mathcal{T}_{i-1} interseca trasversalmente il baffo in arrivo di \mathcal{T}_i .

L'esistenza di una catena di transizione con tori "lontani" mostra l'esistenza di un'orbita instabile.

Un esempio di toro di transizione è il toro coi baffi standard, discusso nell'Appendice F. Il Teorema 7.7 è un criterio di trasversalità per grafici contenuti in un livello di energia.

§8 Il Teorema 8.1, enunciato per sommi capi a pagina 3, si occupa della conservazione, sotto piccole perturbazioni, dei tori parzialmente iperbolici. Se μ è la taglia della perturbazione, tali tori riempiono la maggior parte dello spazio a loro disposizione, con densità $1 - O(\sqrt{|\mu|})$.

Ci occupiamo quindi di tori coi baffi in coordinate "normali": cioè di tori $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n$ per l'hamiltoniana $H(J, \psi, y, x)$, $(J, \psi, y, x) \in \mathbf{R}^{N-1} \times \mathbf{T}^{N-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, su cui facciamo le seguenti assunzioni:

- Il baffo instabile di ogni toro interseca trasversalmente il baffo stabile del toro successivo.
- Esiste una trasformazione canonica

$$\Phi : (I, \varphi, p, q) \longrightarrow (J, \psi, y, x)$$

e n funzioni $\mathcal{I}_i : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^{N-1}$ $1 \leq i \leq n$ in modo che

$$\Phi_H^t(\Phi(\mathcal{I}_i(pq), \varphi, p, q)) = \Phi(\mathcal{I}_i(pq), \varphi + \omega_i(pq)t, pe^{-\lambda_i(pq)t}, qe^{\lambda_i(pq)t})$$

$\forall |p|, |q| \leq R$, con $\omega_i(0)$ diofantino.

- il baffo stabile dell' i -esimo toro si scrive come grafico trasverso negli angoli, nei pressi dell' $(i - 1)$ -esimo toro.

La Proposizione 8.5 afferma che quest'ultima ipotesi è generale; il Teorema 8.1 giustifica invece la seconda assunzione.

Il Teorema 8.7 prova che *i tori coi baffi in coordinate normali sono di transizione*.

§9 Il sistema $H(I, \varphi) = h(I) + \varepsilon f(I, \varphi; \varepsilon)$ possiede generalmente una struttura iperbolica al primo ordine in ε su un sottoinsieme di densità grande di ogni livello di energia nelle vicinanze di una risonanza semplice. L'enunciato del Teorema 9.3 è riassunto a pagina 5.

Appendici

Appendice A. Evidenziamo un risultato di algebra lineare, utilizzato nella Proposizione 6.3.

Appendice B. Diamo una stima della dipendenza C^n -regolare del flusso di fase Φ^t dai dati iniziali, provando che $\forall n \in \mathbf{N}$ esistono due costanti c_n e G_n in modo che

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}^N \\ |\alpha| \leq n}} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} \Big|_{y=\xi} \Phi^t(y) - \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} \Big|_{y=\eta} \Phi^t(y) \right| \leq c_n e^{G_n |t|} |\xi - \eta|$$

Appendice C. Usiamo i risultati del §3 per dare un esempio di una serie di funzioni che *converge su un insieme di misura piena, ma diverge su un insieme denso*: la serie

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}^2} (\cos n \cdot x)^{|n|^3} \quad x \in \mathbf{R}^2$$

converge se x è $(\gamma, 2)$ -diofantino, ma diverge se x è razionalmente dipendente.

Appendici D–E. Diamo due stime del resto nel Teorema della media di Birkhoff. La prima stima mostra una crescita del resto come una potenza di $1/\varepsilon_0$, ma ε_0 va a zero molto rapidamente al crescere di k . Nella seconda stima, invece, la piccolezza di ε_0 sarà dovuta solo ai piccoli denominatori, ma il resto crescerà fattorialmente¹¹.

¹¹La seconda stima afferma che l'hamiltoniana $H(I, \varphi) = h(I) + \varepsilon f(I, \varphi)$, con f polinomio trigonometrico nelle φ di grado P e con frequenza non risonante fino all'ordine kP , viene trasformata mediante l'algoritmo descritto dal Teorema della media in

$$H(y, x) = h_k(y) + \varepsilon^{k+1} R_k(y, x; \varepsilon)$$

con

$$|R_k| \leq \frac{(cP)^{2(k+1)} (k+1)!}{\varepsilon_0^{k+1}}$$

con $\varepsilon_0 = O(\gamma^2)$, essendo c un'opportuna costante e γ la taglia dei piccoli denominatori.

Mentre la prima stima è sicuramente eccessiva, dando una divergenza del resto più che esponenziale a causa della piccolezza di ε_0 , la seconda stima è, in un certo senso, “sharp”: possiamo costruire un *modello senza piccoli denominatori le cui serie di Birkhoff divergono*.¹²

Appendice F. Ci si occupa del toro standard, provando che è di transizione e stimando il tempo di diffusione per catene di tori standard a frequenze diofantine. Si prova, inoltre, più in generale, che i tori $\mathcal{T}_{I_0} \equiv \{(I, \varphi, p, q) \in \mathbf{R}^{N-1} \times \mathbf{T}^{N-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}, I = I_0, ; p = q = 0\}$ sono di transizione per hamiltoniane del tipo $h(I, pq)$.

Appendice G. Vengono raccolti alcuni lemmi (e alcune loro generalizzazioni) usati negli algoritmi KAM.

Vorrei salutare e ringraziare tutti i miei compagni di studio. In particolare Daniele che mi ha insegnato i rudimenti del $T_{E}X$, e Luca per n^n buone ragioni, l’ultima delle quali è avermi segnalato alcune inesattezze che avevo scritto. Colgo l’occasione per dire che la probabilità che le cose scritte qui siano giuste è un $O(\varepsilon)$, per cui ringrazio in anticipo chi mi segnalerà errori e imprecisioni.

Dedico questa tesi a Ielma.

¹²Consideriamo la perturbazione di un oscillatore armonico unidimensionale: $H(I, \varphi) = \omega I + 2\varepsilon(1-I) \cos \varphi$, con $(I, \varphi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{S}^1$. Un ragionevole modello senza piccoli denominatori consiste nella seguente equazione funzionale:

$$u + \varepsilon f(\partial_\varphi u, \varphi) = 0$$

Se consideriamo la serie di Birkhoff della funzione incognita $u = \sum \varepsilon^j u_j$, si dimostra che tale serie è divergente, e che la divergenza è fattoriale, come ottenuto nella seconda stima: $|u_j| \sim (j-1)!$.

BIBLIOGRAFIA

- [AP] Ambrosetti, A. – Prodi, G. *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge, Cambridge University Press, 1993.
- [A63] Arnol'd, V.I. “Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics”
in Russian Mathematical Survey 18, 1963.
- [A64] Arnol'd, V.I. “Instability of Dynamical Systems with several degrees of freedom”
in Soviet Mathematics – Doklady 5, 1964.
- [ARN] Arnol'd, V.I. *Metodi matematici della meccanica classica*, Roma, Editori Riuniti, 1979.
- [ED3] Arnol'd, V.I. ed. *Dynamical Systems III*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 3, New York, Springer-Verlag, 1985.
- [BOT] Bott, R. – Tu, L.W. *Differential Forms in Algebraic Topology*, New York, Springer, 1982.
- [CTP] Celletti, A. – Perozzi, E. *Meccanica celeste*, Napoli, CUEN, 1996.
- [CC96] Celletti, A. – Chierchia, L. “On the stability of realistic three-body problems” preprint, 1996.
- [C90] Chierchia, L. “A direct method for constructing solutions of Hamilton-Jacobi Equation”
in Meccanica, 25, 1990.
- [C94] Chierchia, L. “Arnold Instability for Nearly-integrable Hamiltonian Systems”
in Proceedings of the Workshop – Variational and Local Methods in the study of Hamiltonian Systems, International Centre of Theoretical Physics, Trieste, Ottobre 1994. London, World Scientific.
- [C] Chierchia, L. *Lezioni di Analisi matematica 2*, Roma, Aracne, 1996.
- [CF94] Chierchia, L. – Falcolini, C. “A Direct Proof of a Theorem by Kolmogorov in Hamiltonian Systems”
in Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, serie IV, vol. XXI, 1994.
- [CG94] Chierchia, L. – Gallavotti, G. “Drift and diffusion in phase space”
in Ann. Inst. H. Poincaré, 60, 1994.
- [CP95] Chierchia, L. – Perfetti, P. “Second Order Hamiltonian Equations on \mathbf{T}^∞ and Almost-Periodic Solutions”
in Journal of Differential Equations, vol. 116, 1, 1995.
- [JC97] Cresson, J. “A λ -lemma for partially hyperbolic tori and the obstruction property” preprint, 1997.
- [EA81] Easton, R.W. “Orbit structure near trajectories biasymptotic to invariant tori”
in Classical Mechanics and Dynamical Systems, 70, 1981.
- [FM] Fasano, A. – Marmi, S. *Meccanica analitica*,

- Torino, Boringhieri, 1994.
- [FON] Fontana, M. – Gabelli, S. *Insiemi, numeri e polinomi*, Roma, Cisu, 1989.
- [GAL] Gallavotti, G. *Meccanica elementare*, Torino, Boringhieri, 1986.
- [GH] Greenberg, M.J. – Harper, J.R. *Algebraic Topology: A First Course*, USA, Addison–Wesley Publishing Company, 1981.
- [HW] Hardy, G.H. – Wright, E.M. *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford, Clarendon Press, 1979.
- [FJ] John, F. *Partial Differential Equations*, New York, Springer–Verlag, 1982.
- [DAU] Landau, L.D. – Lifšits, E.M. *Meccanica*, Roma, Editori Riuniti, 1994.
- [MA96] Marco, J.P. “Transition le long des chaînes de tores invariants pour les systemes hamiltoniens analytiques” in *Ann. Inst. H. Poincaré*, 64, 1996.
- [M56] Moser, J. “The Analytic Invariants of an Area-Preserving Mapping near a Hyperbolic Fixed Point” in *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. IX, 1956.
- [M78] Moser, J. “Is the Solar System Stable?” in *Mathematical Intelligencer*, 1, 1978.
- [N82] Neishtadt, A.I. “Estimates in the Kolmogorov Theorem on Conservation of Conditionally Periodic Motions” in *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 45, 6, 1982.
- [P82] Pöschel, J. “Integrability of Hamiltonian Systems on Cantor Sets” in *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 35, 1982.
- [RW97] Rudnev, M. – Wiggins, S. “KAM Theory Near Multiplicity One Resonant Surfaces” in *Journal of Nonlinear Science*, 7, 1997.
- [S1] Sernesi, E. *Geometria 1*, Torino, Boringhieri, 1989.
- [S42] Siegel, C.L. “Iteration of Analytic Functions” in *Annals of Mathematics*, vol. 43, 4, 1942.
- [SM] Siegel, C.L. – Moser, J. *Lectures on Celestial Mechanics*, New York, Springer–Verlag, 1971.
- [T91] Treshchev, D.V. “The mechanism of destruction of resonance tori of Hamiltonian Systems” in *Math. USSR Sbornik*, 68, 1991.