



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica
di
Francesca Zabatta

Tassellazioni del Piano

Relatore
Prof. Andrea Bruno

Il Candidato

Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2002 - 2003
febbraio 2004

Classificazione AMS: 51H20

Parole chiave: geometrie localmente euclidee, gruppi di trasformazioni, gruppi cristallografici, tassellazioni

Sintesi

L'argomento principale di questa tesi è relativo alle tassellazioni del piano. Per *tassellazione* si intende la divisione regolare del piano, che è l'insieme di forme chiuse che lo ricoprono completamente, senza sovrapporsi e senza lasciare spazi vuoti. Dal punto di vista matematico, le tassellazioni del piano sono equivalentemente riferibili alle simmetrie di figure piane e a gruppi di isometrie piane.

Ci concentriamo sullo studio della simmetria che ci porta ad una delle più affascinanti applicazioni della teoria dei gruppi; in particolare ci interessiamo di studiare la simmetria delle figure piane in termini di gruppi di movimenti rigidi del piano, studiando i sottogruppi di isometrie uniformemente discontinui, che sono associati alle geometrie localmente euclidee, i gruppi di fregi e i gruppi cristallografici.

La presenza di simmetria e di equilibrio proporzionale nelle più alte espressioni creative dell'uomo, testimonia, fin dall'antichità, lo stretto rapporto che tali concetti realizzano tra scienza, estetica e arte. L'esigenza di individuare nell'arte un linguaggio decifrabile di forme, ha sempre indotto gli artisti ad utilizzare i canoni geometrici, a volte anche intuitivamente, anticipando in alcune conclusioni i matematici stessi.

Come abbiamo già accennato, nel mondo dell'arte figurativa, la ripetitività simmetrica di elementi costituisce un modello seguito fin dalle prime manifestazioni artistiche; lo studio di questa tesi è finalizzato alla classificazione dei 17 gruppi di simmetria planare legati alle tassellazioni (Teorema di Fedorov) ed all'individuazione di tali gruppi di simmetria nelle decorazioni moresche del Palazzo dell'Alhambra di Granada (XIII° secolo) e nelle decorazioni dell'arte dell'antico Egitto.

Weyl, ne "La simmetria", afferma che "gli antichi egizi eccellevano nell'arte ornamentale quattromila anni prima che i matematici scoprissero, nel concetto di gruppo, lo strumento matematico adeguato per spiegare gli ornamenti e derivarne le possibili classi di simmetria"; egli sostiene inoltre che gli Egizi utilizzarono tutte le 17 classi dei gruppi di simmetria piana nelle loro decorazioni.

In "Geometries and Groups", anche Nikulin e Shafarevich sostengono che gli Egizi, già nel 19° secolo a.C., conoscevano tutti i 17 i tipi di ornamenti; secondo altri studiosi, però, sembrerebbe che ne abbiano usati solo 10 nelle loro decorazioni.

I più grandi maestri dell'arte dell'ornamento geometrico furono gli Arabi: la ricchezza degli ornati a stucco che decorano le pareti di edifici di origine moresca, come l'Alhambra di Granada, è semplicemente sorprendente. Una delle caratteristiche peculiari dello stile moresco è infatti quella della trasformazione delle superfici mediante decorazioni, in modo da renderle più attraenti e più significative dal punto di vista architettonico.

Nikulin e Shafarevich sostengono che, nel Palazzo reale dell'Alhambra di Granada, i 17 gruppi di simmetria piana siano tutti presenti nelle decorazioni ornamentali, avvalorando la tesi secondo la quale i Mori conoscessero già tutti i gruppi di simmetria piana; vedremo successivamente, che non tutti gli studiosi sono dello stesso parere.

In dattaglio la tesi è così organizzata.

Nel **primo capitolo** abbiamo richiamato risultati fondamentali relativi alle isometrie del piano, ricordando che esistono quattro tipi di movimenti rigidi che generano, per composizione, l'intero gruppo delle isometrie piane, che sono i seguenti:

1. la *traslazione*, denotata con $\tau_{A,B}$ che porta il punto A nel punto B ;
2. la *riflessione* rispetto ad un asse m , denotata σ_m ;
3. la *rotazione* di centro un punto C e di angolo Θ , denotata con $\rho_{C,\Theta}$;
4. la *glissoriflessione*, denotata con $\gamma_m^v = \sigma_m \tau_v$ dove $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Il primo capitolo si conclude con due importanti teoremi.

Teorema 0.0.1 (Teorema di addizione dell'angolo.) *Valgono i seguenti risultati:*

- Una rotazione di Θ° seguita da una rotazione di Φ° è una rotazione di $(\Theta + \Phi)^\circ$ a meno che $(\Theta + \Phi)^\circ = 0^\circ$, nel caso in cui il prodotto è una traslazione.
- Una traslazione seguita da una rotazione di Θ° diversa dall'identità è una rotazione di Θ° .
- Una rotazione diversa dall'identità di Θ° seguita da una traslazione è una rotazione di Θ° .

- Una traslazione seguita da una traslazione è una traslazione.

e con il Teorema di classificazione delle isometrie piane, dovuto al matematico francese Michel Chasles (1793-1880).

Teorema 0.0.2 (Teorema di Chasles, 1831.) *Ogni isometria diversa dall'identità è esattamente una tra le seguenti:*

- *traslazione*
- *rotazione*
- *riflessione*
- *glissoriflessione.*

Nel **secondo capitolo** studiamo una classe di sottogruppi del gruppo delle isometrie piane, che è legata alle geometrie localmente euclidee di dimensione due: i gruppi uniformemente discontinui.

Definizione 0.0.1 (Geometria localmente euclidea.) *Uno spazio metrico \mathbf{X} è una geometria localmente euclidea 2-dimensionale, se esiste un numero $r > 0$ tale che, per ogni punto a di \mathbf{X} , l'intorno sferico $D(a, r)$ del punto a avente raggio r è isometrico al disco di raggio a , nel piano.*

Costruiamo esempi di geometrie localmente euclidee e in particolare approfondiamo il toro e il nastro di Moebius, che sono geometrie piane localmente euclidee, cioè identiche al piano in regioni sufficientemente piccole, ma non globalmente, per ragioni topologiche.

Per costruire geometrie localmente euclidee, una tecnica utile è quella di costruire relazioni di equivalenza sul piano associate a certi gruppi di isometrie.

Definizione 0.0.2 *Un sottogruppo Γ di isometrie piane è un gruppo uniformemente discontinuo di isometrie del piano se esiste un numero $d > 0$ tale che*

$$|Xf(X)| \geq d$$

per ogni isometria f in Γ e per ogni punto X del piano distinto da $f(X)$.

Definizione 0.0.3 Definiamo Σ_Γ la geometria costruita a partire da un gruppo uniformemente discontinuo di movimenti del piano.

Un fatto sorprendente è che ogni geometria localmente euclidea si costruisce in tal modo:

Teorema 0.0.3 Ogni geometria localmente euclidea Σ corrisponde ad un gruppo Γ uniformemente discontinuo di movimenti del piano e Σ può essere sovrapposta a Σ_Γ .

Possiamo dividere i gruppi uniformemente discontinui in tre tipi, in base a quante traslazioni essi contengono.

- *TIPO 1*: comprende i gruppi che non contengono traslazioni eccetto l'identità;
- *TIPO 2*: comprende i gruppi che non sono del *TIPO 1* e che contengono traslazioni di vettori allineati;
- *TIPO 3*: comprende i gruppi che non sono nè del *TIPO 1* nè del *TIPO 2*, quindi i gruppi contenenti almeno due traslazioni di vettori non allineati.

Teorema 0.0.4 Ci sono cinque diversi tipi di gruppi uniformemente discontinui di movimenti del piano:

TIPO1, TIPO2a, TIPO2b, TIPO3a, TIPO3b.

Questi possono essere generati nella maniera seguente:

1. *TIPO1.* $\Gamma = \langle id \rangle$;
2. *TIPO2a.* $\Gamma = \langle \tau_a \rangle$;
3. *TIPO2b.* $\Gamma = \langle \gamma_l^{a/2} \rangle$;
4. *TIPO3a.* $\Gamma = \langle \tau_a, \tau_b \rangle$ con a e b vettori non allineati;
5. *TIPO3b.* $\Gamma = \langle \gamma_l^{a/2}, \tau_b \rangle$ dove a e b sono vettori non nulli ortogonali e con a parallelo ad l .

A questo punto è possibile dimostrare il seguente teorema:

Teorema 0.0.5 *Ci sono esattamente cinque tipi di geometrie localmente euclidee:*

1. *la geometria euclidea;*
2. *la geometria sul cilindro;*
3. *la geometria sul nastro di Moebius;*
4. *la geometria sul toro;*
5. *la geometria sulla bottiglia di Klein.*

Nel **terzo capitolo**, studiamo i gruppi di fregi e i gruppi cristallografici piani.

Definizione 0.0.4 *Un gruppo di fregi con centro c è un gruppo di isometrie che fissa una data retta prefissata c e le cui traslazioni formano un gruppo ciclico infinito.*

Definizione 0.0.5 *Un gruppo cristallografico piano è un gruppo di isometrie che soddisfa le seguenti proprietà:*

1. *per ogni punto A dello spazio, esiste un numero positivo d tale che, per ogni isometria f nel gruppo Γ tale che $f(A) \neq A$, si ha che $|Af(A)| \geq d$;*
2. *il gruppo delle traslazioni è generato da due isometrie tra loro distinte.*

Definizione 0.0.6 *Un reticolo di traslazione per un gruppo cristallografico piano \mathcal{W} , determinato da un punto P , è l'insieme di tutte le immagini di P sotto le traslazioni in \mathcal{W} .*

Definizione 0.0.7 *Un dominio fondamentale o cella unitaria per \mathcal{W} rispetto ad un punto A generato dalle traslazioni τ_1 e τ_2 è un quadrilatero di vertici $A_{i,j}, A_{i+1,j}, A_{i,j+1}, A_{i+1,j+1}$.*

Definizione 0.0.8 *Una regione generatrice per \mathcal{W} è la più piccola regione poligonale del piano le cui immagini, sotto l'intero gruppo delle simmetrie, ricoprono tutto il piano.*

Definizione 0.0.9 *Un punto P è un **n -centro** per un gruppo \mathcal{G} di isometrie se le rotazioni di centro P , appartenenti al gruppo \mathcal{G} , formano un gruppo ciclico finito C_n , con $n > 1$.*

Per classificare i gruppi di simmetria piana, ci siamo avvalsi del seguente teorema:

Teorema 0.0.6 (Restrizione Cristallografica.) *Se il punto P è un n -centro per un gruppo cristallografico \mathcal{W} , allora $n = 2, 3, 4, 6$.*

ed abbiamo esaminato tutti i possibili gruppi \mathcal{W} a seconda dei loro n -centri, sapendo che i casi significativi sono solo quelli per $n = 2, 3, 4, 6$ per la Restrizione Cristallografica.

Prima di classificare i gruppi cristallografici in dimensione due, abbiamo dato una classificazione dei reticoli. Essi si possono suddividere in 5 classi in base alla forma del parallelogrammo di base formato dai due vettori che generano il reticolo, a e b . I possibili reticoli sono i seguenti:

1. a forma di parallelogramma;
2. rettangolare;
3. romboidale;
4. quadrato;
5. esagonale.

Ogni gruppo cristallografico in dimensione due, viene indicato con un nome che ha una simbologia internazionale che è appunto quella usata in cristallografia (UIC nella successiva tabella), che sfrutta caratteri e numeri nel senso specificato nell'articolo di D. Schattschneider "The plane symmetry groups: their recognition and notation".¹

Possiamo ora enunciare il **Teorema di classificazione dei gruppi cristallografici piani**:

Teorema 0.0.7 (Teorema di Fedorov (1891).) *Se \mathcal{W} è un gruppo cristallografico, allora esistono punti e rette tali che \mathcal{W} è uno dei seguenti 17 gruppi:*

¹Ci siamo avvalsi anche della notazione del matematico Tóth "W".

$$\begin{array}{cccccc}
\mathcal{W}_1 & \mathcal{W}_2 & \mathcal{W}_4 & \mathcal{W}_3 & \mathcal{W}_6 & \\
\mathcal{W}_1^1 & \mathcal{W}_2^1 & \mathcal{W}_4^1 & \mathcal{W}_3^1 & \mathcal{W}_6^1 & \\
\mathcal{W}_1^2 & \mathcal{W}_2^2 & \mathcal{W}_4^2 & \mathcal{W}_3^2 & & \\
\mathcal{W}_1^3 & \mathcal{W}_2^3 & & & & \\
& & \mathcal{W}_2^4 & & &
\end{array}$$

Riassumiamo, nella tabella seguente, le principali caratteristiche dei 17 gruppi di simmetria:

<i>Tóth</i>	<i>UIC</i>	<i>Reticolo</i>	<i>Ord.rotaz.</i>	<i>Assi rifl.</i>	<i>Reg.gener.</i>
\mathcal{W}_1	p1	parallel.	1	no	1 unità
\mathcal{W}_2	p2	parallel.	2	no	1/2 unità
\mathcal{W}_1^2	pm	rettang.	1	sì	1/2 unità
\mathcal{W}_1^3	pg	rettang.	1	no	1/2 unità
\mathcal{W}_1^1	cm	rombo	1	sì	1/2 unità
\mathcal{W}_2^2	pmm	rettang.	2	sì	1/4 unità
\mathcal{W}_2^3	pmg	rettang.	2	sì	1/4 unità
\mathcal{W}_2^4	pgg	rettang.	2	no	1/4 unità
\mathcal{W}_2^1	cmm	rombo	2	sì	1/4 unità
\mathcal{W}_4	p4	quadrato	4	no	1/4 unità
\mathcal{W}_4^1	p4m	quadrato	4	sì	1/8 unità
\mathcal{W}_4^2	p4g	quadrato	4	sì	1/8 unità
\mathcal{W}_3	p3	esagono	3	no	1/3 unità
\mathcal{W}_3^2	p31m	esagono	3	sì	1/6 unità
\mathcal{W}_3^1	p3m1	esagono	3	sì	1/6 unità
\mathcal{W}_6	p6	esagono	6	no	1/6 unità
\mathcal{W}_6^1	p6m	esagono	6	sì	1/12 unità

Nel **quarto capitolo** riportiamo esempi di decorazioni egizie e moresche dell'Alhambra di Granada, rappresentanti i gruppi di simmetria planare.

La nostra attenzione si concentra sullo studio dettagliato di alcuni fregi che sono stati rinvenuti su soffitti e pareti di antiche tombe, utensili e sarcofagi egizi, e sui mosaici e le decorazioni presenti nel Palazzo dell'Alhambra di Granada dove è stato specificato, per ogni gruppo quanto segue:

- il reticolo;
- il dominio fondamentale;

- gli n -centri;
- la regione generatrice;
- le varie simmetrie che fanno parte di quel gruppo.

Diamo qui, per brevità, solo un esempio del lavoro che è stato svolto, analizzando il gruppo $p4 = \mathcal{W}_4$:



Figura 1: Fregio egizio (a sinistra) e moresco (a destra) di tipo $p4 = \mathcal{W}_4$

CARATTERISTICHE DEL GRUPPO $p4$.

- La lettera p indica che il dominio fondamentale è primitivo;
- il numero $n = 4$ indica che l'ordine massimo di rotazione è 4, quindi nel gruppo
- ci sono 4-centri;
- il reticolo è a forma di quadrato, sui cui vertici si trovano gli n -centri di ordine massimo;
- la regione generatrice è un quarto del dominio fondamentale;
- non ci sono riflessioni, nè glissoriflessioni.

Abbiamo infine raccolto i diversi punti di vista di più studiosi relativamente al fatto che sia gli Egizi che i Mori avessero rappresentato tutti i 17 gruppi di simmetria nelle loro opere.

Era opinione diffusa ai primi studiosi che si occuparono matematicamente degli ornamenti, che tutti i 17 tipi di tassellazioni del piano fossero presenti nell'arte sia egizia che moresca, e questo è il pensiero sia di Pólya, che, più tardi, di Weyl.

Al contrario, B.Grunbaum, relativamente agli Egizi, sostiene che quest'antica civiltà fosse a conoscenza di soli 12 modelli, e che ignorasse l'esistenza dei 5 gruppi aventi 3-centri.

Nel palazzo dell'Alhambra sono conservati magnifici esempi dello stile moresco e poichè nei suoi ambienti si possono ammirare diversi tipi di arabeschi, gli storici e i matematici che hanno cercato di dare una risposta a tale quesito, hanno concentrato le loro ricerche sul problema di stabilire se effettivamente tutti i 17 tipi di ornamenti siano o meno presenti nell'Alhambra.

Il primo matematico che ha seriamente studiato il problema è uno studente di dottorato di Weyl, Jones, che ne ha trovati 11, attorno agli anni '20.

Nel 1982 B.Grunbaum, Z.Grunbaum, G.C.Shephard, dopo accurate ricerche, arrivano alla seguente conclusione: in realtà nell'Alhambra ne sono presenti 13, mancando infatti esempi per i gruppi pg , pgg , $p2$, $p3m1$. Dobbiamo però notare che una rappresentazione del gruppo $p3m1$ è stata trovata da B.Grunbaum in una sinagoga di Toledo, coeva dell'Alhambra.

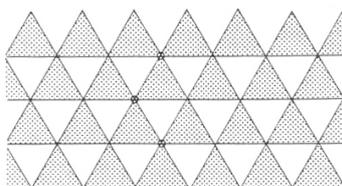


Figura 2:

In seguito, P.Pérez-Gómez afferma di aver trovato esempi di tassellazioni associate ai gruppi mancanti, ed espone il suo punto di vista in un articolo che abbiamo illustrato nella tesi. Il matematico H.S.M.Coxeter sostiene però, nella recensione dell'articolo di Pérez-Gómez, che la dimostrazione della presenza di tassellazioni di tipo $p3m1$ nell'Alhambra sia dubbia, opinione

alla quale ci associamo: infatti Pérez-Gómez individua il modello in Figura 2 come esempio di decorazione associata al gruppo $p3m1$, mentre tale disegno è facilmente riconducibile a $p31m$.

Concludiamo asserendo che è comunque accertato che, poichè esempi relativi al gruppo $p3m1$ sono stati trovati a Toledo, i Mori, nel XIII° secolo, conoscessero, senza saperlo, l'enunciato del Teorema di Fedorov.

Bibliografia

- [1] M.A.Armstrong. *Groups and Symmetry*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [2] P.Chinellato. *Gli Arabeschi dell'Alhambra*.
- [3] M.Gilardi. *Ritmi e Simmetrie*. Zanichelli, 1986.
- [4] B.Grunbaum. *The emperor's new clothes: full regalia, g-string, or nothing?*, con i commenti di P.Hilton e J.Pederson. In *Mathematic Intelligencer* vol.6, n.4, 1984.
- [5] B.Grunbaum, Z.Grunbaum e G.C.Shephard. *Symmetry in Moorish and other ornaments*. In *Computers and Mathematics with Applications*, vol.12 Part B, 1987.
- [6] G.Grunbaum e G.C.Shephard. *Interlace patterns in Islamics and Moorish art*. In *The Visual Mind*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1993.
- [7] G.Grunbaum e G.C.Shephard. *Tilings and Patterns*. W.H.Freeman and Company, New York, 1987.
- [8] G.Marconi. *Elogio della Simmetria*. Istituto FRAE-CNR. www.isof.cnr.it
- [9] G.E.Martin. *Transformation Geometry: an Introduction to Symmetry*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [10] J.M.Montesinos. *Classical Tassellations and Three-Manifolds*. Springer-Verlag, Berlino, 1987.
- [11] V.V.Nikulin e I.R.Shafarevich. *Geometries and Groups*. Springer-Verlag, 1994.

- [12] R.Perez-Gomez. *The four regular mosaics missing in the Alhambra.* In *Computers and Mathematics with Applications* vol.14, 1987.
- [13] G.M.Piacentini Cattaneo. *Algebra un approccio algoritmico.* Decibel Zanichelli, 1996.
- [14] D.Schattschneider. *The plane symmetry groups: their recognition and notation.* In *American Mathematical Monthly*, vol.85, 1978.
- [15] E.Sernesi. *Geometria 1.* Bollati-Boringhieri, 1994.
- [16] C.Vian. *L'Alhambra di Granada.* Istituto Geografico De Agostini, 1981.
- [17] H.Weyl. *La Simmetria.* Feltrinelli, 1962.
- [18] www.clarku.edu *Wallpaper Groups.*
- [19] www2.polito.it *Gruppi di Simmetrie.*
- [20] www2.spsu.edu/math/tile/grammar/egypt.html *Egyptian Patterns.*
- [21] www2.spsu.edu/math/tile/grammar/moor.html *Moresque Tiles.*
- [22] www.truman.edu *Plane Patterns-Mathematics and the Liberal Arts.*
- [23] www.web.unife.it *Escher e il ricoprimento periodico del piano.*