UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica
presentata da

Stefano Zucchi

Attrattori periodici per oscillatori quartici forzati in presenza di attrito

Relatore

Prof. Guido Gentile

ANNO ACCADEMICO 2003 - 2004

In questo lavoro studieremo un sistema fisico monodimensionale forzato dall'esterno in presenza di attrito.
In particolare rivolgeremo la nostra attenzione ai vari tipi di attrattori che si generano ed ai corrispondenti bacini d'attrazione.
Tali attrattori possono essere in principio di tre tipi distinti: punti fissi, orbite periodiche ed attrattori particolari che non rientrano nelle prime due categorie (per esempio attrattori strani) e di cui non ci interesseremo perchè non si presentano nei problemi trattati. Nei tre capitoli che compongono questo testo ci occuperemo di altrettanti casi sia dal punto di vista numerico che da quello analitico con crescente livello di difficoltà per quanto riguarda quest'ultimo.
Nel primo capitolo partiremo a scopo principalmente introduttivo da un caso paradigmatico di grande interesse fisico, il pendolo matematico semplice. Questo è uno dei più facili, ma non banali casi non lineari riscontrabili. Consideriamo un pendolo semplice di massa m e lunghezza l vincolato a muoversi in un piano verticale in presenza di gravità di intensità g. Il suo punto di sospensione è soggetto ad una oscillazione verticale $y_0(t) = b\cos(\omega t)$ con b ed ω entrambi positivi. Si veda a tal proposito la figura 1.1. L'equazione che descrive tale sistema sarà:

$$\ddot{\theta} + (\alpha - \beta\cos\tau)\sin\theta = 0 \tag{1.1.2}$$

con:

$$\tau = \omega t \ , \ \alpha = \frac{g}{l\omega^2} \ , \ \beta = \frac{b}{l} \tag{1.1.3}$$

e dove il punto indica la derivazione rispetto a τ e t è il tempo. Chiaramente θ sarà l'angolo che il pendolo forma con l'asse verticale y.
Quindi l'equazione (1.1.2) descrive un pendolo con punto di sospensione vincolato a muoversi nella direzione verticale con legge preassegnata (pendolo guidato verticalmente).
Questa equazione non può essere risolta analiticamente, ma, se assumiamo di rimanere vicino ad un punto di equilibrio durante il moto, possiamo linearizzarla.

La linearizzazione intorno a $(0, 0)$ porta a:

$$\ddot{\theta} + (\alpha - \beta \cos \tau)\, \theta = 0 \tag{1.1.4}$$

con α e β definiti in precedenza.
Quella intorno a $(\pi, 0)$, ponendo $\xi = \pi + \theta$, porta a:

$$\ddot{\xi} + (\alpha + \beta \cos \tau)\, \xi = 0 \tag{1.1.5}$$

con:

$$\alpha = -\frac{g}{l\omega^2} \;\; , \;\; \beta = \frac{b}{l} \; . \tag{1.1.6}$$

La presenza di attrito, come al solito, introdurrà un termine smorzante nella (1.1.2) che diviene:

$$\ddot{\theta} + (\alpha - \beta \cos \tau) \sin \theta + \gamma \dot{\theta} = 0 \tag{1.1.7}$$

dove $\gamma > 0$ è detto coefficiente dissipativo.
La linearizzazione di questa equazione intorno ai due punti di equilibrio porta alle stesse equazioni (1.1.4) e (1.1.5) con al posto di θ e ξ le nuove variabili:

$$\theta'(t) = e^{\frac{\gamma t}{2}} \theta(t)$$
$$\xi'(t) = e^{\frac{\gamma t}{2}} \xi(t)$$

e con al posto di α la nuova variabile $\alpha' = \alpha - \frac{\gamma'}{4}$ in entrambi i casi. Si osservi che abbiamo linearizzato la (1.1.2) e la (1.1.7) perchè il sistema risultante è un sistema ben noto in matematica. Infatti la (1.1.4) e la (1.1.5) sono dette equazioni di Mathieu. Si veda a tal proposito la figura 1.2. A questo punto ciò che ci interessa sarà il modo in cui la presenza di termini non lineari modifica la dinamica.
Per determinare i bacini d'attrazione provvederemo ad integrare numericamente la (1.1.7) scegliendo una serie di punti iniziali mediante un'opportuna griglia e registrando le condizioni asintotiche in tre casi distinti presi come esempio. Si vedano a tal proposito le figure 1.3, 1.4, 1.5, 1.6.
Nel secondo capitolo ci occuperemo dello studio di un oscillatore non lineare

con dinamica non banale. Questo caso è ancora alquanto generale ed in esso faranno la loro comparsa i primi due tipi di attrattori per piccoli valori del coefficiente forzante e di quello d'attrito. Si avranno, cioè, sia punti fissi che orbite periodiche. Considereremo il comportamento della seguente equazione differenziale ordinaria non lineare guidata parametricamente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + f(t)\, x^{2m+1} = 0 \tag{1.1.8}$$

dove $\gamma > 0$, $m \in \mathbb{Z}^+$ e $f(t) > 0$ è una funzione limitata superiormente ed inferiormente per ogni valore di t da f^+ ed f^- rispettivamente. Tale equazione può essere riscritta come una coppia di equazioni differenziali del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\gamma y - f(t)\, x^{2m+1} \end{cases} \tag{1.1.9}$$

dove $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\dot{x}$, $\dot{y}$ sono le derivate rispetto a t di x e y. Faremo vedere che vale la seguente.

Proposizione 1.1.1. *Sia γ tale che:*

$$\gamma > -\min_{t \geqslant 0} \left(\frac{\dot{f}(t)}{2f(t)} \right) .$$

Allora ogni soluzione di (1.1.9) *soddisfa:*

$$(x(t), y(t)) \to (0, 0) \quad \textit{per} \quad t \to \infty.$$

Inoltre cercheremo condizioni su γ che garantiscano che la convergenza delle soluzioni di (1.1.9) sia monotona. Introdurremo a tal proposito due nuove variabili di stato $u(t)$ e $v(t)$ definite come:

$$\begin{cases} u = x^{-2m} \\ v = \dot{u} \, . \end{cases} \tag{1.1.10}$$

Il risultato principale che otterremo sarà un'analisi accurata delle varie regioni del piano delle fasi (u, v). Avremo la seguente.

Proposizione 1.1.2. *Siano date le ipotesi della Proposizione* (1.1.1)*. Allora le traiettorie di* (2.3.2) *devono giacere nel primo quadrante aperto in un tempo finito ed ivi restare.*

Alla luce di ciò sarà sufficiente considerare traiettorie che iniziano nel primo quadrante aperto ed assumere da adesso che $u(t), v(t) > 0$ per ogni $t \geq 0$. Passeremo poi a cercare condizioni da imporre su γ e sulle condizioni iniziali perchè $u(t)$ e $v(t)$ non diventino infinite in un tempo finito. A tale proposito varrà la seguente.

Proposizione 1.1.3. *Supponiamo che* $u(0), v(0) > 0$ *e valgano le ipotesi della Proposizione* (1.1.1)*. Inoltre sia:*

$$\gamma^2 > \frac{4f^+}{u(0)} \quad e \quad \frac{v(0)}{u(0)} < m\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \frac{4f^+}{u(0)}}\right) .$$

Allora avremo che $u(t)$ *e* $v(t)$ *restano finite per ogni tempo* t.

Proseguiamo con il seguente.

Teorema 1.1.4. *Siano valide le ipotesi della Proposizione* (1.1.3)*. Allora le soluzioni di* (1.1.9) *sono tali che* $(x(t), y(t)) \to (0,0)$ *monotonicamente per* $t \to \infty$.

Concluderemo il capitolo esaminando lo spazio delle fasi (u, v) con alcune simulazioni numeriche utili per studiare la dinamica del sistema ed in particolare il modo in cui si ha la convergenza $(x(t), y(t)) \to (0,0)$ per $t \to \infty$ e per valori opportunamente grandi di $\gamma > 0$. Faremo vedere che se $t \to \infty$ le traiettorie nel piano delle fasi (u, v) sono tipicamente localizzate tra gli asintoti orizzontali delle due curve Γ^+ e Γ^- definite rispettivamente come i limiti superiore ed inferiore di $f(t)$ sotto opportune ipotesi.
Si vedano a tal proposito le figure 1.7, 1.8, 1.9.
Nel terzo capitolo analizzeremo un oscillatore non lineare forzato di quarto

grado in presenza di attrito. Questo è un caso particolare di (1.1.8) per il quale si rende possibile uno studio più approfondito. Infatti considerando valori dei parametri opportunamente piccoli avremo modo di descrivere analiticamente più nel dettaglio la situazione. Troveremo alcune regole di selezione che prevedano quali orbite sopravviveranno sia per quanto concerne i punti fissi che le orbite periodiche. Infine osserveremo che la nostra scelta è caduta proprio su un oscillatore quartico perchè abbiamo gli strumenti matematici per calcolare esplicitamente le soluzioni in termini di funzioni note, le funzioni ellittiche di Jacobi. Si vedano a tal proposito le figure 1.10, 1.11, 1.12. Per comodità ricorderemo brevemente le loro proprietà principali in un apposito paragrafo.
Per cominciare considereremo la seguente equazione:

$$\ddot{x} + x^3 + \varepsilon f\,(t + t_0)\, x^3 + \varepsilon\, C\, \dot{x} = 0 \tag{1.1.11}$$

con $f\,(t) = \cos\,(t)$ per piccoli valori di $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Inoltre si ha che C è un parametro reale ed i punti indicano le derivate rispetto al tempo.
Considereremo il caso in cui $\varepsilon\, C > 0$ per poter vedere $\varepsilon\, C\dot{x}$ come un termine d'attrito.
Per $\varepsilon = 0$ la soluzione si potrà scrivere mediante funzioni ellittiche di Jacobi e sarà:

$$x^{(0)}\,(t) = \alpha\, cn\,(\alpha t) \tag{1.1.12}$$

dove:

$$\alpha = (4E)^{\frac{1}{4}}$$

ed:

$$E = H\,(x, \dot{x})$$

con $H\,(x, \dot{x})$ che è l'Hamiltoniana del sistema. Da questo punto per semplificare le cose lavoreremo con le variabili azione–angolo (φ, I) e per fare ciò porremo:

$$\begin{cases} x = (3I)^{1/3}\, cn\,\varphi \\ y = -\,(3I)^{2/3}\, sn\,\varphi\, dn\,\varphi \end{cases} \tag{1.1.13}$$

dove:

$$(\varphi, I) \in \frac{\mathbb{R}}{4K\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}^+.$$

Avremo che le equazioni del moto (1.1.11) si potranno scrivere come:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = (3I)^{\frac{1}{3}} + \varepsilon\,(3I)^{\frac{1}{3}}\, f\,(t+t_0)\, cn^4\varphi + \\ \qquad -\varepsilon\, C\, cn\,\varphi\, sn\,\varphi\, dn\,\varphi \\ \dot{I} = \varepsilon\,(3I)^{\frac{4}{3}}\, f\,(t+t_0)\, cn^3\varphi\, sn\,\varphi\, dn\,\varphi + \\ \qquad -\varepsilon\, C\,(3I)\ sn^2\varphi\, dn^2\varphi\ . \end{cases} \tag{1.1.14}$$

In termini di queste nuove variabili la soluzione non perturbata ($\varepsilon = 0$) diviene:

$$\left(\varphi^{(0)}(t), I^{(0)}(t)\right) = \left(\alpha t, I^{(0)}\right) = \left(\alpha t, \frac{\alpha^3}{3}\right).$$

Nel caso generale in cui $\varepsilon \neq 0$ cercheremo una soluzione $z\,(t) = (\varphi\,(t)\,, I\,(t))$ del tipo:

$$z\,(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n z^{(n)}\,(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{Z}^2} e^{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu} t} z_{\nu}^{(n)} \tag{1.1.15}$$

dove abbiamo sviluppato dapprima $z\,(t)$ in serie di Taylor ed in un secondo momento $z^{(n)}\,(t)$ in serie di Fourier. Si osservi che $\boldsymbol{\nu}$ è un vettore in $\mathbb{Z}^2$ e $\boldsymbol{\omega} = (\omega, 1)$ è un vettore in $\mathbb{R}^2$. Proseguiremo calcolando $z^{(n)}\,(t) = \left(\varphi^{(n)}\,(t)\,, I^{(n)}\,(t)\right)$ ed otterremo che:

$$\begin{cases} \varphi^{(n)}\,(t) = \bar{\varphi}^{(n)} + \int_0^t d\tau \tilde{F}_1^{(n)}\,(\tau) + \alpha^{-2}\int_0^t d\tau\ \mathfrak{F}_2^{(n)}\,(\tau) \\ I^{(n)}\,(t) = \bar{I}^{(n)} + \int_0^t d\tau\ \tilde{F}_2^{(n)}\,(\tau). \end{cases} \tag{1.1.16}$$

dove le funzioni $\tilde{F}_1^{(n)}\,(\tau)$ e $\tilde{F}_2^{(n)}\,(\tau)$ sono definite in modo ricorsivo.

A questo punto, dopo aver analizzato il caso in cui il coefficiente d'attrito è εC (risonanze primarie), passeremo a considerare quello in cui il contributo dovuto all'attrito è presente in misura minore in quanto compare dal secondo ordine in poi (risonanze secondarie).

L'equazione che descrive tale caso sarà:

$$\ddot{x} + x^3 + \varepsilon f\,(t+t_0)\, x^3 + \varepsilon^2 D\dot{x} = 0 \tag{1.1.17}$$

con $f\,(t) = \cos\,(t)$. Avremo i seguenti.

Teorema 1.1.5. *Si fissi:*

$$\omega = \frac{p}{q} = \frac{1}{2n} \in \mathbb{Q}$$

dove $n \in \mathbb{Z}^{+}$. *Allora si avranno soluzioni* $x_2\,(t, \varepsilon, D)$ *periodiche di periodo* $2\pi/\omega$ *della* (1.1.17) *che coincideranno con le soluzioni* $x_1\,(t, \varepsilon, \varepsilon\, D)$ *della* (1.1.11).

Teorema 1.1.6. *Si fissi:*

$$\omega = \frac{p}{q} = \frac{1}{2n+1} \in \mathbb{Q}$$

dove $n \in \mathbb{Z}^{+}$. *Allora esistono:*

$$D_0 = D_0\left(\frac{1}{q}\right),$$

decrescente a zero in q, *e, per ogni* $|D| < D_0$, *un valore* $\varepsilon_0 > 0$ *tale che per ogni* $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ *il sistema* (1.1.17) *ammette una soluzione periodica di periodo* $2\pi/\omega$ *ed analitica in* (t, ε, D).
Inoltre non ci sono soluzioni periodiche di frequenza $\omega = \dfrac{p}{q}$ *per* $p \neq 1$.

Anche in questo caso concluderemo il capitolo con un'analisi numerica fatta sull'equazione:

$$\ddot{x} + x^3 + \varepsilon f\,(t)\, x^3 + \gamma \dot{x} = 0 \tag{1.1.18}$$

dove prenderemo $\varepsilon = 0.1$ e dove si considera nullo il valore di t_0 perchè in un approccio numerico è più conveniente avere la stessa fase iniziale per tutte le soluzioni. Noteremo che per γ sufficientemente grande ogni traiettoria tende all'origine, mentre al decrescere di γ compaiono nuovi attrattori. Inoltre per γ che diminuisce il bacino d'attrazione dell'origine che all'inizio occupa l'intero spazio delle fasi tende a ridursi a vantaggio di quelli dei nuovi attrattori che compaiono. Si vedano a tal proposito le figure 1.13, 1.14, 1.15.

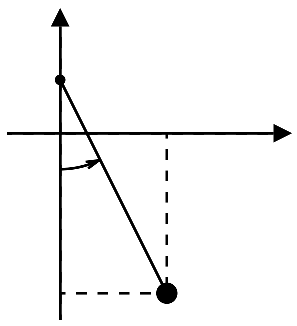

Figura 1.1: *Il pendolo con il punto di supporto P oscillante lungo un asse verticale*

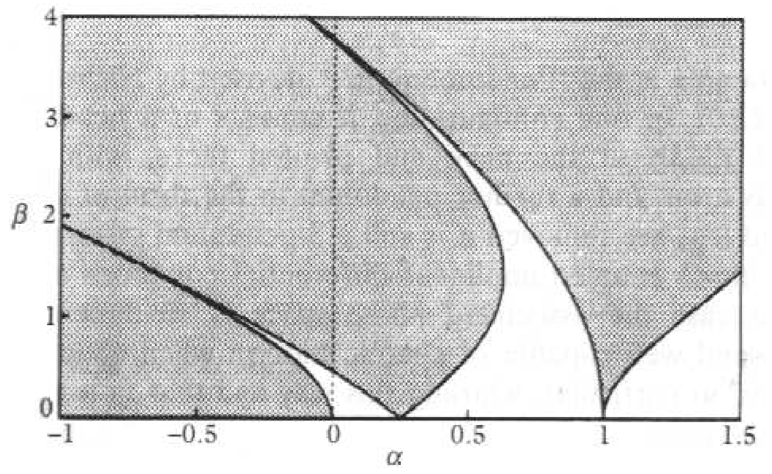

Figura 1.2: *Diagramma di stabilità per le equazioni di Mathieu (1.1.4) e (1.1.5). Sulla destra della linea* $\alpha = 0$ *lo stato* $\theta = 0$ *è instabile nella regione ombreggiata, mentre sulla sinistra di tale linea è lo stato* $\theta = \pi$ *ad essere instabile nella zona ombreggiata.*

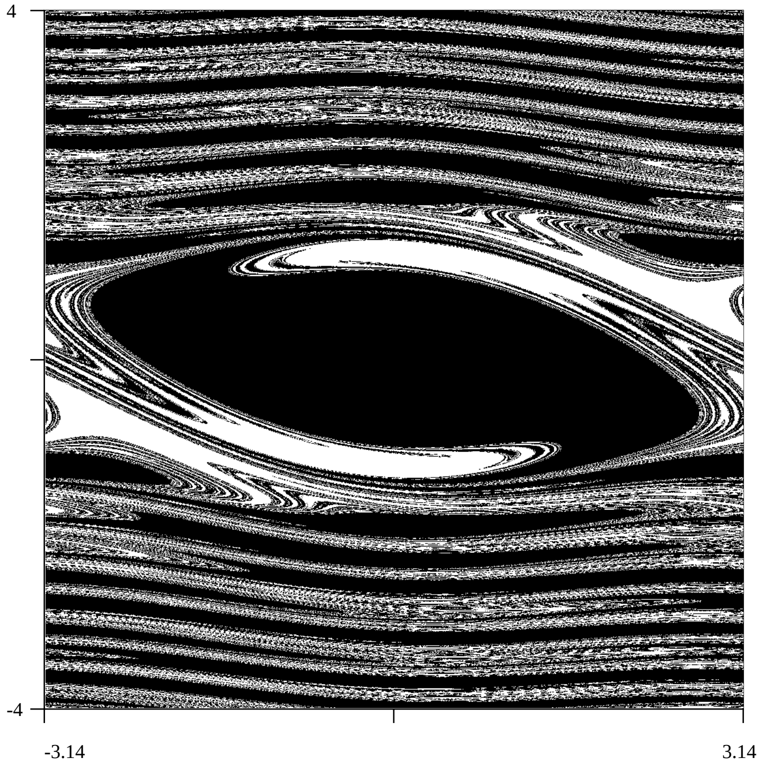

Figura 1.3: *Bacino d'attrazione della soluzione stazionaria per il pendolo a guida verticale con* $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$ *e* $\gamma = 0.03$.

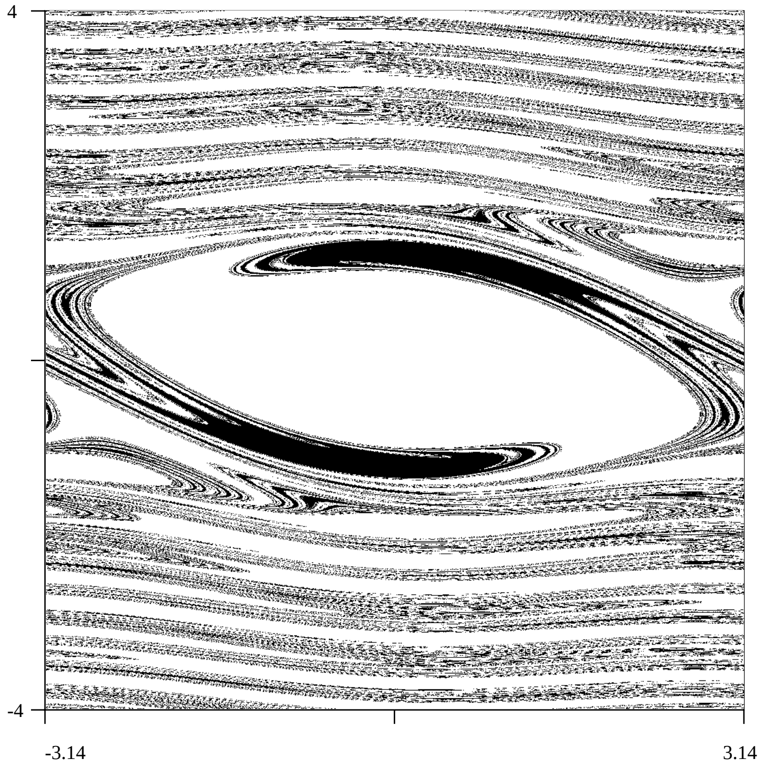

Figura 1.4: *Bacino d'attrazione della soluzione oscillante per il pendolo a guida verticale con* $\alpha = 0.5$*,* $\beta = 0.1$ *e* $\gamma = 0.03$*.*

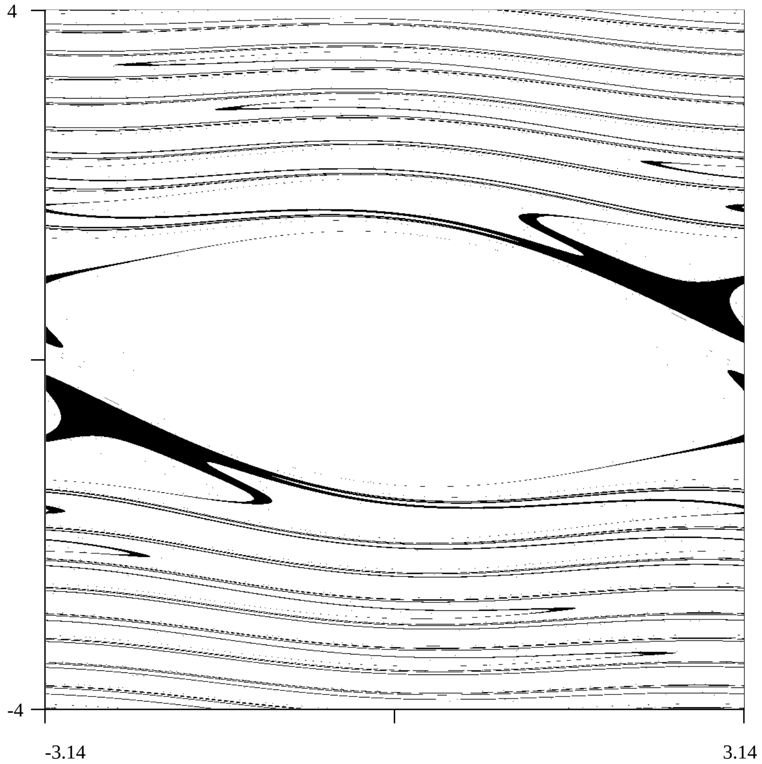

Figura 1.5: *Bacino d'attrazione delle soluzioni rotatorie per il pendolo a guida verticale con* $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$ *e* $\gamma = 0.03$.

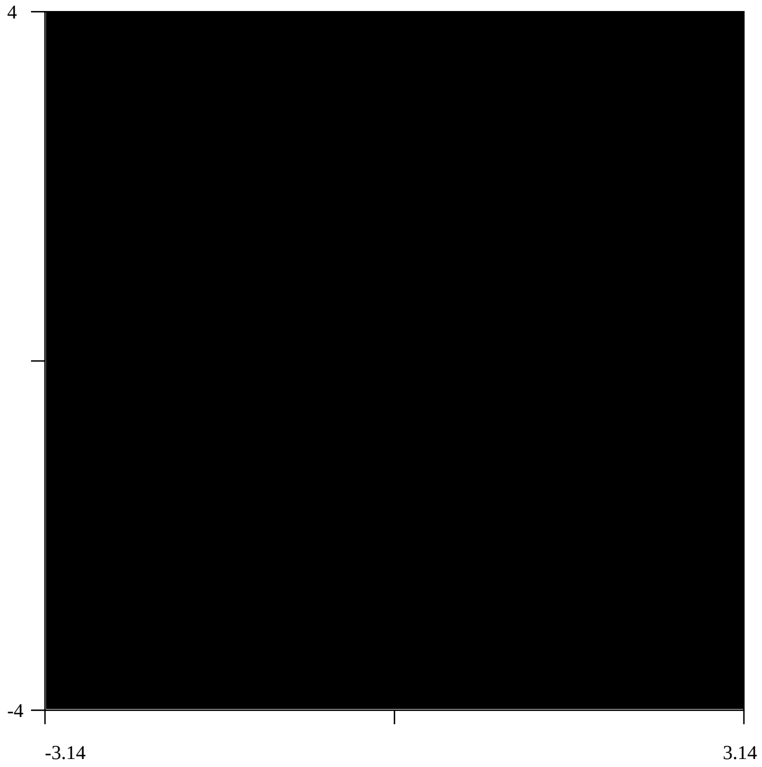

Figura 1.6: *Bacino d'attrazione delle quattro soluzioni per il pendolo a guida verticale con* $\alpha = 0.5$*,* $\beta = 0.1$ *e* $\gamma = 0.03$*. Si osservi che, come era lecito aspettarsi, ricopre l'intero quadrato preso in esame del piano* $\left(\theta, \dot{\theta}\right)$*.*

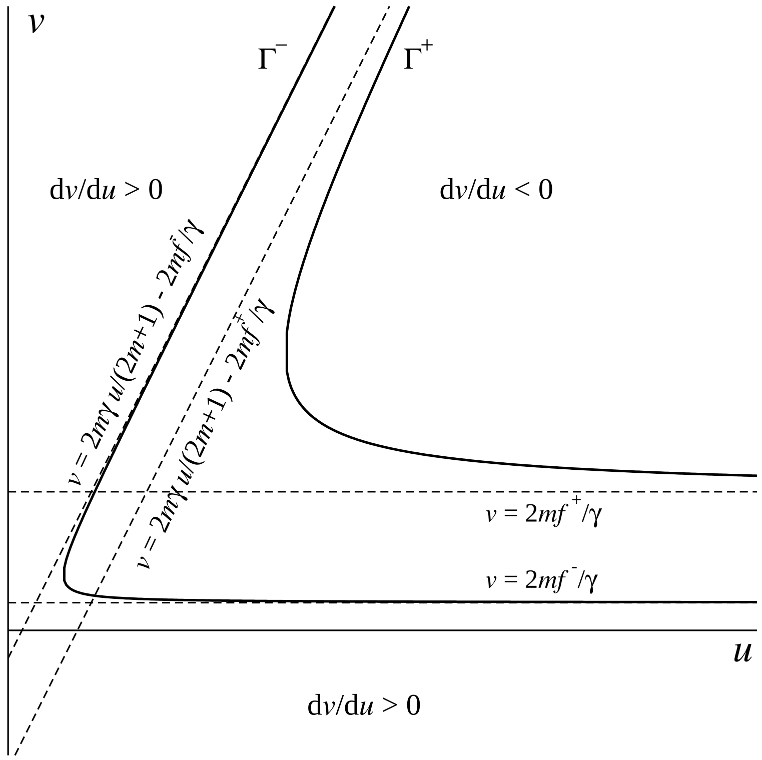

Figura 1.7: *Le curve* Γ^+ *e* Γ^- *ed i loro asintoti. Sulla sinistra di* Γ^- $\frac{dv}{du}$ *è positivo mentre sulla destra di* Γ^+ *è negativo. Fra le due curve può essere positivo, negativo o nullo.*

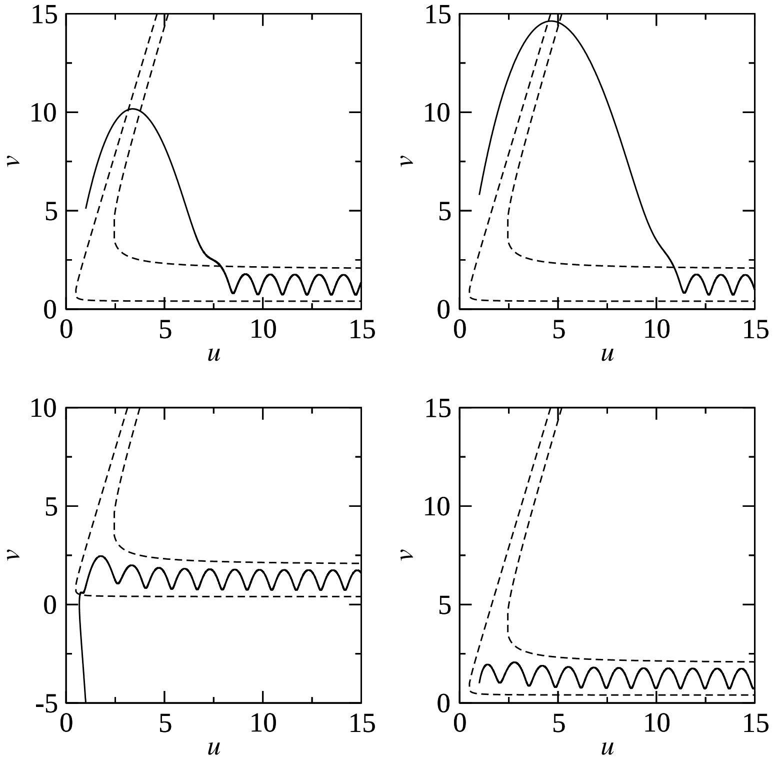

Figura 1.8: *Soluzioni periodiche ottenute con metodi numerici partendo da vari punti del piano* (u, v) *con* $f(t) = 3 + 2\cos(2\pi t)$, $f^{+} = 5$ *e dove i parametri che soddisfano le condizioni del Teorema 2.3.3 sono* $m = 1$, $u(0) = 1$ *e* $\gamma = 5$

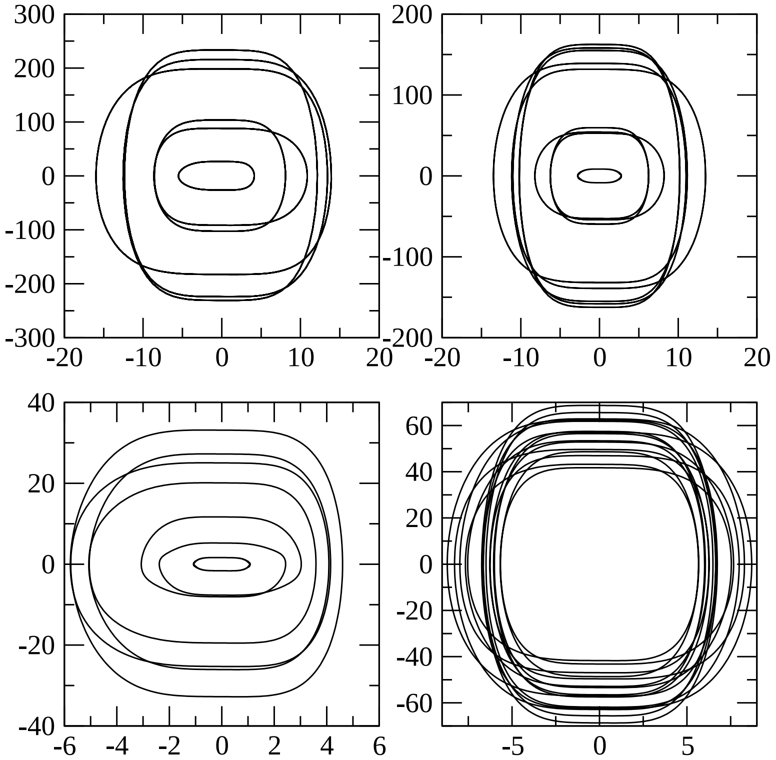

Figura 1.9: *Soluzioni numeriche di 1.2.1 con* $f(t) = 3 + 2\cos(2\pi t)$ *e* $\gamma = 0.04$*. In tutti i quattro grafici* x *è posto orizzontalmente e* y *verticalmente.*

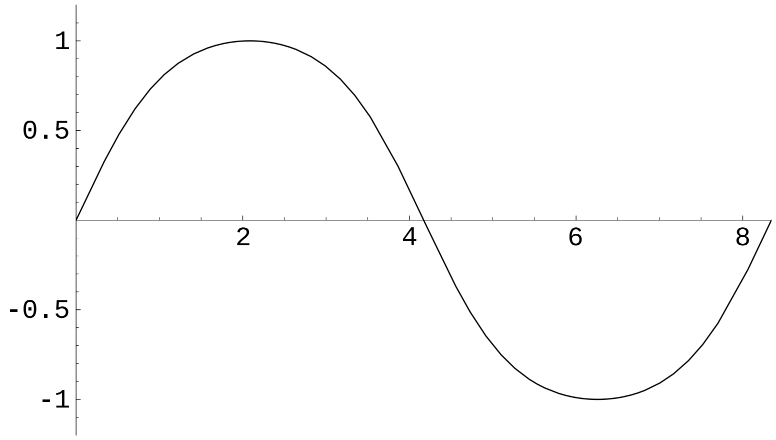

Figura 1.10: *Funzione ellittica di Jacobi seno ellittico* $sn\,(u,k)$ *con modulo ellittico* $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

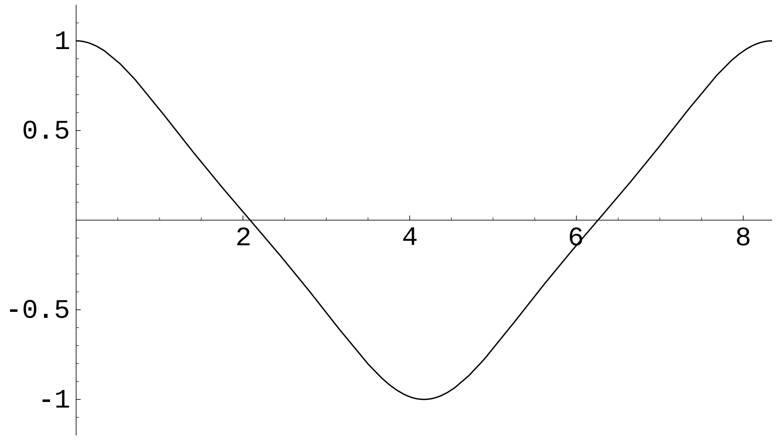

Figura 1.11: *Funzione ellittica di Jacobi coseno ellittico* $cn\,(u,k)$ *con modulo ellittico* $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

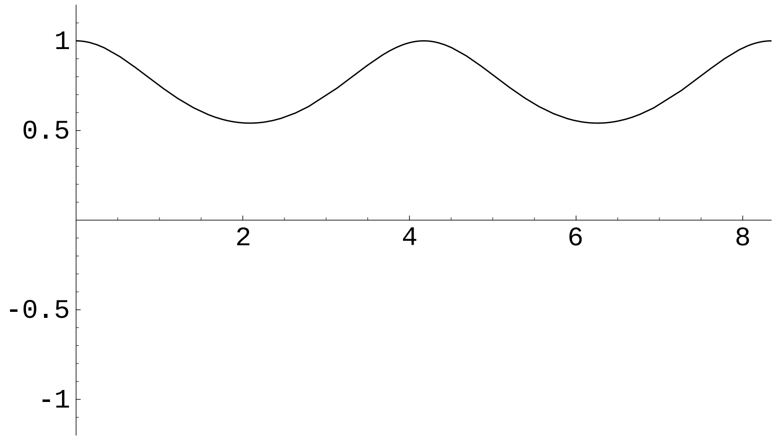

Figura 1.12: *Funzione ellittica di Jacobi delta amplitudine* $dn\,(u,k)$ *con modulo ellittico* $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

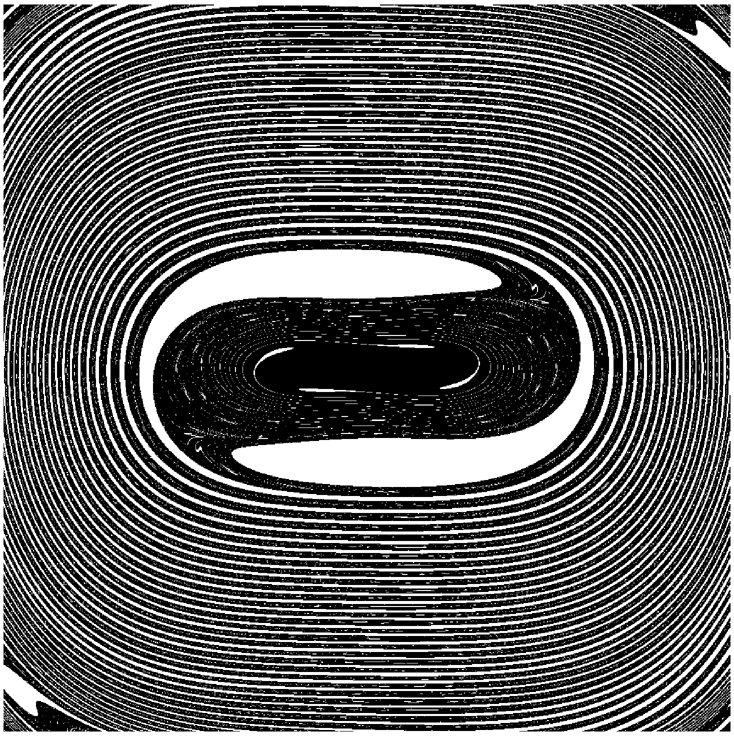

Figura 1.13: *Parte del bacino d'attrazione dell'origine contenuta in Q per $\varepsilon = 0.1$ e $\gamma = 0.005$ in (3.1.1) .*

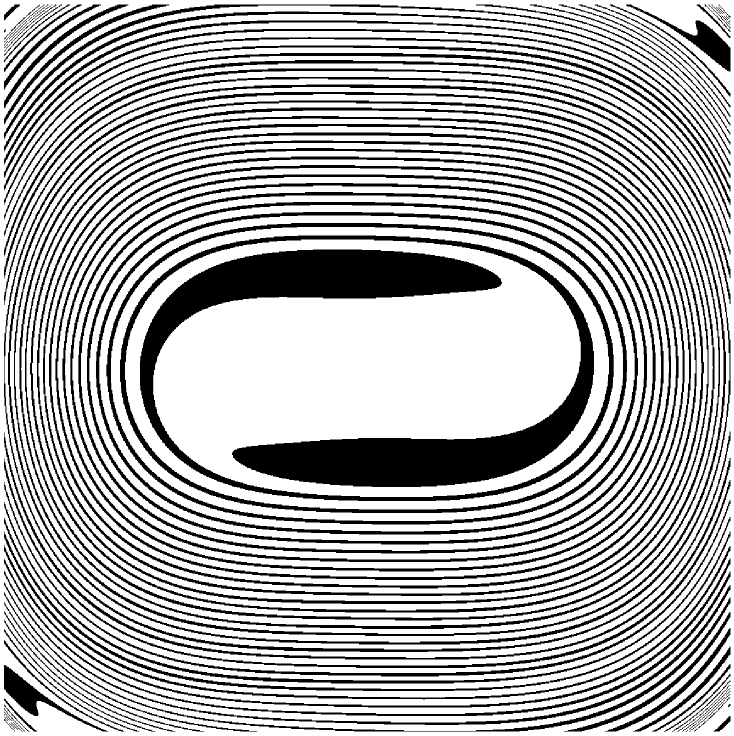

Figura 1.14: *Parte del bacino d'attrazione dell'orbita periodica di frequenza* $\omega = \frac{1}{2}$ *(cioè di periodo* π*) contenuta in* Q *per* $\varepsilon = 0.1$ *e* $\gamma = 0.005$ *in (3.1.1) .*

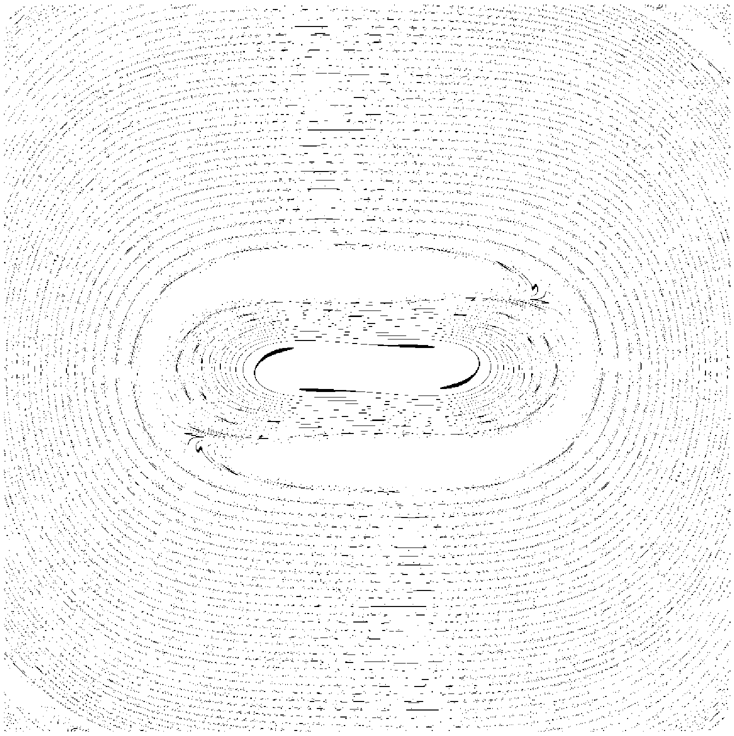

Figura 1.15: *Parte del bacino d'attrazione dell'orbita periodica di frequenza* $\omega = \frac{1}{4}$ *(cioè di periodo* $\frac{\pi}{2}$*) contenuta in* Q *per* $\varepsilon = 0.1$ *e* $\gamma = 0.005$ *in (3.1.1) .*