UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2011

GARA di SECONDO LIVELLO

8 febbraio 2012

1) Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. Non è ammesso l'utilizzo di calcolatrici tascabili, libri di testo e tavole numeriche. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; in particolare, è vietato l'uso di telefoni cellulari.
2) La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3) Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4) I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5) I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 15**.
6) Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!

Da riempirsi da parte dello studente:

Nome:______________________ Cognome:______________________

Indirizzo:______________________ Città:______________________

Scuola:______________________ Anno di corso:________ Città:______________________

e–mail:______________________ Taglia per eventuale maglietta: S M L XL

Codice fiscale:______________________ Nazionalità:______________________

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

PUNTEGGIO DIMOSTRAZIONI (da riempirsi a cura dell'insegnante)

valutazione esercizio n.15	
valutazione esercizio n.16	
valutazione esercizio n.17	
PUNTEGGIO TOTALE (DAL FOGLIO EXCEL)	

Visitate il sito internet delle olimpiadi: `http://olimpiadi.dm.unibo.it`

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Due numeri a e b sono tali che $\dfrac{3a+b}{a-b} = 2$. Quanto vale $\dfrac{a^3}{b^3}$?

   (A) -27 **(B)** -8 **(C)** 1 **(D)** 8 **(E)** 27.

2. Marco, Fabrizio e Giovanni, tre matematici, sfidano un gruppo di quattro fisici a un torneo di calcio balilla. Giocano un incontro per ogni possibile combinazione di due matematici (uno in attacco, uno in difesa) contro due fisici (uno in attacco, uno in difesa). Ciascun incontro ha la stessa durata, e in totale il torneo dura ben 24 ore (senza pause). Quanto tempo gioca Marco in difesa?
   Si noti che, ad esempio, vi saranno due incontri diversi di Marco e Fabrizio contro un certo attaccante e un certo difensore fra i fisici: uno con Marco attaccante e Fabrizio difensore, uno viceversa.

   (A) 2 ore e 24 minuti **(B)** 4 ore e 48 minuti **(C)** 6 ore **(D)** 8 ore **(E)** 12 ore.

3. Alice, Berto e Carlo stanno cercando un tesoro. Sapendo che i tre amici si trovano sui vertici di un triangolo equilatero e che il tesoro si trova in un punto al di fuori del triangolo, a 1 metro di distanza da Alice e da Berto e 2 metri di distanza da Carlo, quanti metri misura il lato del triangolo?

   (A) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ **(B)** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ **(C)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **(D)** $\dfrac{3}{2}$ **(E)** $\sqrt{3}$.

4. Quanti sono i numeri di 2 cifre tali che, se si sottrae la somma delle cifre dal numero di partenza, si ottiene 45?

   (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 9 **(D)** 10 **(E)** 20.

5. Si sa che $p(x)$ è un polinomio monico di grado 5. Inoltre, si sa che le soluzioni dell'equazione $p(x) = 0$ sono esattamente $x = 0, 1, 2, 4$. Determinare il massimo valore che può assumere il coefficiente del termine di primo grado.
   Nota: un polinomio è *monico* se il coefficiente del suo termine di grado più alto (nel nostro caso: quello di quinto grado) è 1.

   (A) -32 **(B)** 16 **(C)** 32 **(D)** 64 **(E)** Può assumere valori arbitrariamente grandi.

6. Dopo una gara fra cinque cavalli, cinque amici si incontrano e parlano dei risultati. Si sa che ognuno di loro ha puntato su un cavallo diverso, e che mentono entrambe le persone che hanno puntato sul primo e sull'ultimo classificato; le altre dicono la verità. Le loro affermazioni sono le seguenti:
   Alex: "Il cavallo su cui ha puntato Igor ha distanziato di almeno due posizioni il cavallo di Enrica."
   Enrica: "Il cavallo su cui ho puntato io ha vinto."
   Igor: "Il cavallo su cui ha puntato Osvaldo ha superato il mio."
   Osvaldo: "Il cavallo su cui ho puntato non è arrivato fra i primi tre."
   Umberto: "Il mio cavallo non ha vinto ma è arrivato subito dopo quello di Alex e subito prima di quello di Enrica."
   Chi ha puntato sul cavallo classificatosi terzo?

   (A) Alex **(B)** Igor **(C)** Osvaldo **(D)** Umberto **(E)** Non è possibile determinarlo.

7. Sia ABC un triangolo isoscele con base BC, sia D il punto medio di AC. Sapendo che BCD è a sua volta isoscele con base CD e che $BC = 2$, quanto misura l'area di ABC?

   (A) 2 **(B)** $\sqrt{5}$ **(C)** $\sqrt{6}$ **(D)** $\sqrt{7}$ **(E)** 3.

8. Le spese per organizzare le Olimpiadi Nazionali della Matematica incrementano ogni anno dello $0{,}5\%$ rispetto all'anno precedente. In che anno le spese saranno *esattamente il doppio* rispetto a quelle del 2012?
   Nota: nel 2012 le spese non sono nulle.

   (A) 2023 **(B)** 2150 **(C)** 2151 **(D)** 2212 **(E)** mai.

9. Quante sono le coppie di interi positivi (m,n) tali che la frazione $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini e strettamente minore di 1, e che il prodotto mn sia uguale a $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 24 \cdot 25$ (ovvero al prodotto dei primi 25 interi positivi)?

(A) 2^7 **(B)** $2^8 - 1$ **(C)** 2^8 **(D)** $2^9 - 1$ **(E)** 2^9.

10. Tre persone A, B, C si trovano in prossimità di un incrocio stradale tra due strade perpendicolari. A si trova esattamente sull'incrocio, mentre B e C si trovano su due strade distinte. Nel campo nei pressi dell'incrocio (all'interno dell'angolo retto $C\widehat{A}B$) c'è un cartellone pubblicitario, sostenuto da due pali piantati nel terreno nei punti D ed E, che distano tra loro esattamente un metro. A, B e C vedono tutti il lato frontale del cartellone. Sapendo che gli angoli $D\widehat{A}E$, $D\widehat{B}E$ e $D\widehat{C}E$ misurano tutti 30 gradi, qual è la distanza (in linea d'aria) tra B e C?

(A) $\frac{3}{2}$ m **(B)** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ m **(C)** $\sqrt{3}$ m **(D)** 2 m **(E)** Non è possibile determinarlo.

11. Una scacchiera 8 per 8 viene riempita con le lettere A, B, C, D in modo che due caselle con un lato o un vertice in comune contengano lettere diverse, e in modo che le lettere A e le lettere B abbiano la proprietà seguente: ogni qual volta una A o una B ha una certa lettera X adiacente in orizzontale o verticale (X può essere A, B, C o D), allora dal lato opposto c'è un'altra X (a meno che non ci sia il bordo). In quanti modi è possibile sistemare tali lettere nella scacchiera?

(A) 136 **(B)** 144 **(C)** 168 **(D)** 328 **(E)** 360.

12. Un folletto sceglie due numeri dispari x, y tali che $0 < y < x < 2012$, calcola $x^2 - y^2$ e scrive il risultato su un foglio. Ogni mattina (a partire da quella del giorno successivo) si sveglia, legge il numero scritto sul foglio e, se questo numero è pari, lo sostituisce con la sua metà e va a fare uno scherzetto a qualcuno.
Il giorno in cui per la prima volta legge un numero dispari, scompare ritornando nel mondo delle fate.
Quanti scherzetti fa al massimo il folletto?

(A) 11 **(B)** 12 **(C)** 14 **(D)** 21 **(E)** 22.

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. Sia Γ_0 una circonferenza di raggio 2^{2012}, e sia $A_0B_0C_0$ un triangolo equilatero inscritto in Γ_0. Sia Γ_1 la circonferenza di raggio più piccolo tangente ad A_0B_0 nel suo punto medio H_0, e a Γ_0. Si costruiscono le circonferenze $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ allo stesso modo, in modo che Γ_n sia una delle circonferenze di raggio più piccolo tangente a Γ_{n-1} e ad un lato di un triangolo equilatero inscritto in Γ_{n-1} nel suo punto medio. Qual è il più piccolo valore di n per cui l'area del cerchio racchiuso da Γ_n è minore di 1?

14. Siano $p(x)$ e $q(x)$ due polinomi *distinti* di grado minore o uguale a 3, a coefficienti interi e tali che

$$p(1) = q(1),\ p(2) = q(2),\ p(3) = q(3),$$

$$p(-1) = -q(-1),\ p(-2) = -q(-2),\ p(-3) = -q(-3).$$

Qual è il minimo valore che può assumere $[p(0)]^2 + [q(0)]^2$?

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Dato un qualsiasi intero positivo n, chiamiamo *ciclostilato* di n il numero che si ottiene concatenando 2012 scritture di n (in base 10). Per esempio il ciclostilato di 314 è $314314314\ldots314$, dove le cifre "314" si ripetono 2012 volte.

(a) Determinare tutti gli interi positivi m tali che il ciclostilato di m sia multiplo di 9.

(b) Determinare tutti gli interi positivi m tali che il ciclostilato di m sia multiplo di 11.

SOLUZIONE

Nome:______________________ Cognome:______________________

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Normalmente Davide ha bisogno di dormire almeno 8 ore per notte. Se una notte dorme k ore meno di quanto gli occorra, si ritrova ad aver bisogno di k ore in più di sonno per le k notti successive. Ogni notte dorme comunque un numero intero di ore minore o uguale al suo fabbisogno. Ad esempio, se lunedì notte ha bisogno di 8 ore, ma ne dorme 7, martedì avrà bisogno di 9 ore. Se mercoledì ha bisogno di 8 ore, ma ne dorme 6, giovedì e venerdì avrà bisogno di almeno 10 ore di sonno; se giovedì ne dorme solo 9, venerdì sentirà la necessità di 11 ore (8, più 2 per le ore perse mercoledì, più 1 per quella non dormita giovedì).

Un certo lunedì notte Davide avrebbe necessità di dormire 8 ore; lo stesso si verifica la notte del lunedì della settimana successiva. Nel corso della settimana ci sono state 7 ore in cui avrebbe avuto bisogno di dormire ma non l'ha fatto: quante ore ha dormito come minimo Davide nelle sette notti che vanno da lunedì a domenica?

SOLUZIONE

Nome:____________________ Cognome:____________________

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Sia ABC un triangolo acutangolo; sia O il suo circocentro e siano P, Q i punti (diversi da A) in cui rispettivamente l'altezza uscente dal vertice A e il prolungamento di AO incontrano la circonferenza circoscritta ad ABC.

(a) Si dimostri che gli angoli $B\widehat{A}P$ e $Q\widehat{A}C$ sono congruenti;

(b) Si dimostri che i triangoli BCP e CBQ sono congruenti;

(c) Si dimostri che, detti M e N i punti medi di AB e AC, l'area del quadrilatero $ABPC$ vale quattro volte l'area del quadrilatero $AMON$.

SOLUZIONE

Nome:____________________ Cognome:____________________

UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2011

GARA di SECONDO LIVELLO

8 febbraio 2012

1) Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI TASCABILI, LIBRI DI TESTO E TAVOLE NUMERICHE. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; IN PARTICOLARE, È VIETATO L'USO DI TELEFONI CELLULARI.
2) La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3) Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4) I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5) I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 15**.
6) Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!

Da riempirsi da parte dello studente:

Nome:________________ Cognome:________________

Indirizzo:________________ Città:________________

Scuola:________________ Anno di corso:________ Città:________________

e–mail:________________ Taglia per eventuale maglietta: S M L XL

Codice fiscale:________________ Nazionalità:________________

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	D	E	D	C	A	D	E	C	D	A	B	1007	36

PUNTEGGIO DIMOSTRAZIONI (da riempirsi a cura dell'insegnante)

valutazione esercizio n.15	
valutazione esercizio n.16	
valutazione esercizio n.17	
PUNTEGGIO TOTALE (DAL FOGLIO EXCEL)	

Scala di valutazione per la correzione dell'esercizio 15
La parte (a) del problema ha un valore di **5 punti**, mentre la parte (b) vale **10 punti**.
Ovviamente per ciascuna delle due parti si assegni il massimo dei punti nel caso in cui venga presentata una soluzione completa, anche con traccia diversa da quella proposta.
Nel punto (b) è possibile caratterizzare in più modi le soluzioni; ad esempio va altrettanto bene dimostrare che gli n richiesti sono tutti i numeri tra 10^{2k} e $10^{2k+1}-1$ (al variare di $k \in \mathbb{N}$) e tutti i multipli di 11 tra 10^{2k+1} e $10^{2k+2}-1$ (al variare di $k \in \mathbb{N}$).
Per soluzioni parziali del punto (a) si valuti secondo le seguenti indicazioni (con $f(m)$ indichiamo il ciclostilato di m e con $s(m)$ indichiamo la somma delle cifre di m).

- **1 punto** per chi osserva che i multipli di 9 sono soluzioni.
- **1 punto** (cumulabile con il precedente) per chi dimostra che $s(f(n))$ deve essere multiplo di 9.
- **1 ulteriore punto** per chi osserva che $s(f(n))$ è uguale a $2012 \cdot s(n)$.
- Comunque **non più di 4 punti** a chi non giustifica il passaggio "$2012 \cdot s(n)$ è multiplo di 9, quindi $s(n)$ è multiplo di 9" (attenzione: il fatto che 2012 non sia multiplo di 9 non basta).

Per soluzioni parziali del punto (b) si valuti secondo le seguenti indicazioni (con $f(m)$ indichiamo il ciclostilato di m e con $r(m)$ indichiamo la somma delle cifre a segni alterni di m).

- **5 punti** per chi dimostra che gli n con un numero pari di cifre che risolvono il problema sono tutti e soli i multipli di 11. Questi 5 punti sono a loro volta ripartiti in modo del tutto analogo alla parte (a) del problema.
- **5 punti** per chi dimostra che tutti gli n con un numero dispari di cifre risolvono il problema. Di questi 5 punti **non se ne attribuiscano più di 3** a chi non giustifica che $r(f(n)) = 0$.

Sempre a proposito della correzione del punto (b) nel suo complesso, si tengano presente anche le seguenti precisazioni.

- **2 punti** in totale per aver descritto tutte le soluzioni senza dimostrare nulla.
- **Non più di 1 punto** in totale per aver dimostrato che $r(f(n))$ deve essere multiplo di 11.

Scala di valutazione per la correzione dell'esercizio 16
Soluzioni che si discostino da quella ufficiale andranno valutate con un punteggio compreso fra 0 e 15, e a una soluzione corretta andranno assegnati 15 punti, anche se diversa da quella riportata. Per soluzioni parziali che seguano grossomodo la linea dimostrativa della soluzione ufficiale, si assegnino:

- **1 punto** per chi imposti il problema ponendo come variabili i deficit di sonno nelle 7 notti.
- **1 punto** per l'osservazione che le ore aggiunte al fabbisogno per via delle carenze di sonno devono ricadere tutte all'interno della settimana.
- **1 punto** per chi ne deduca che la notte di domenica Davide è costretto a dormire il suo intero fabbisogno.
- **2 punti** per l'osservazione che esiste dunque almeno una notte con almeno due ore di deficit.
- **3 punti** per l'espressione delle ore totali dormite in funzione dei sette deficit di sonno, come $7 \cdot 8 - 7 + k_1^2 + \cdots + k_7^2$ o simile.
- **3 punti** per chi esibisca una configurazione valida con 58 ore di sonno dichiarandola minimale (anche eventualmente fornendo solo i deficit $k_1, \ldots, k_7$ e non il fabbisogno che ne risulta per ciascuna notte).
- **4 punti** per una dimostrazione completa della minimalità: ad esempio trattando il caso in cui vi sia una notte con almeno 3 ore di deficit e quello in cui per più di una notte ci siano almeno 2 ore di deficit, e mostrando che entrambi portano a più di 58 ore di sonno in totale. Si assegnino punteggi parziali in caso di giustificazioni poco puntuali o insufficienti.

Scala di valutazione per la correzione dell'esercizio 17
La parte (a) del problema ha un valore di **7 punti**, mentre la parte (b) e la parte (c) valgono **4 punti** ciascuna.
Come sempre, qualunque dimostrazione completa di una qualsiasi delle tre parti del problema merita il massimo dei punti, anche se diversa da quella ufficiale (ad esempio, fatta usando la geometria analitica o la trigonometria); l'impostazione di calcoli analitici o trigonometrici che non portino alla tesi né a nessuno dei passi intermedi sotto riportati vale **0 punti**.
Chi dimostrasse correttamente la seconda o la terza parte (o qualche passo intermedio di esse) assumendo per vere le parti precedenti senza dimostrarle ha diritto ai punti che vale ciò che ha dimostrato.
Per soluzioni parziali del punto (a) che seguano approssimativamente la traccia proposta, si valuti secondo le seguenti indicazioni.

- **2 punti** per la dimostrazione dell'uguaglianza $\widehat{BAK} = 90° - \widehat{ABC}$.
- **2 punti** per la dimostrazione dell'uguaglianza $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$.
- **2 punti** per la dimostrazione dell'uguaglianza $\widehat{AOC} = 180° - 2\,\widehat{OAC}$.
- **1 punto** per il corretto utilizzo delle uguaglianze precedenti al fine di concludere la parte (a).

Per soluzioni parziali del punto (b) che seguano approssimativamente la traccia proposta, si valuti secondo le seguenti indicazioni.

- **2 punti** per la dimostrazione dell'uguaglianza di una qualsiasi coppia di angoli di BCP e CBQ.
- **1 punto** per la dimostrazione dell'uguaglianza di un'altra coppia di angoli di BCP e CBQ.
- **1 punto** per la dimostrazione della congruenza di BCP e CBQ.

Per soluzioni parziali del punto (c) che seguano approssimativamente la traccia proposta, si valuti secondo le seguenti indicazioni.

- **2 punti** per la dimostrazione dell'uguaglianza delle aree di $ABPC$ e $ABQC$.
- **2 punti** per chi dimostra che l'area di $ABQC$ è uguale a 4 volte l'area di $AMON$.

SOLUZIONI DEI QUESITI

1. La risposta è **(A)**. Vale $3a + b = 2a - 2b$, quindi $a = -3b$, e perciò $\frac{a^3}{b^3} = (-3)^3 = -27$.

2. La risposta è **(D)**. Per simmetria, ciascuno fra Marco, Fabrizio e Giovanni deve trascorrere lo stesso tempo alla difesa della squadra dei matematici, che dunque risulta essere un terzo delle 24 ore del torneo, cioè 8 ore. In alternativa possiamo osservare che ci saranno $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3$ incontri in totale (3 modi di scegliere l'attaccante dei matematici, 2 per il difensiore, 4 per l'attaccante dei fisici e 3 per il difensore); gli incontri in cui Marco è difensore sono $2 \cdot 4 \cdot 3$, e dunque le ore che trascorre in difesa sono $\frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3} 24 = \frac{24}{3} = 8$.

3. La risposta è **(E)**. Siano A, B, C i tre amici e T il tesoro. Per simmetria CT è perpendicolare ad AB.
Consideriamo il triangolo ACT. $\widehat{ACT} = 30°$ e $CT = 2\,AT$; questo è sufficiente per concludere che ACT è emiequilatero (ovvero è la metà di un triangolo equilatero). In particolare $\widehat{CAT} = 90°$ e per il teorema di Pitagora $AC = \sqrt{CT^2 - AT^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

4. La risposta è **(D)**. Un numero che abbia a come cifra delle decine e b come cifra delle unità si può esprimere come $10a+b$; l'esercizio chiede di contare i numeri di due cifre per cui $10a+b-(a+b) = 45$, ovvero tali che $9a = 45$. Tali numeri sono tutti quelli che hanno cifra delle decine 5: gli interi da 50 a 59, che sono 10.

5. La risposta è **(C)**. Il polinomio si può scrivere come prodotto di cinque fattori di primo grado: $x(x-1)(x-2)(x-4)(x-k)$, dove $k \in \{0, 1, 2, 4\}$. Il termine di primo grado ha coefficiente $(-1)(-2)(-4)(-k) = 8k$, che è massimo per $k = 4$ e vale in tal caso 32.

6. La risposta è **(A)**. Enrica non può che mentire (se il suo cavallo fosse arrivato primo come lei asserisce dovrebbe mentire, assurdo) e dunque il suo cavallo è ultimo. Se Umberto dicesse il vero il suo cavallo sarebbe penultimo, quello di Alex terzo. In tal caso Osvaldo mente (le ultime due posizioni sono già occupate) e quindi il suo cavallo è il vincitore; il cavallo di Igor è secondo, e sia Igor sia Alex dicono la verità. Se invece Umberto mentisse dovrebbe aver puntato sul cavallo vincitore; Osvaldo dovrebbe aver puntato sul cavallo classificatosi quarto per non trovarsi sul podio, ma allora Igor dovrebbe aver mentito, assurdo.

7. La risposta è **(D)**. Tracciamo l'altezza BH di BCD, che sarà anche una mediana poiché il triangolo è isoscele. Allora $CD = 2CH$, e $BA = CA = 2CD = 4CH$, perciò $HA = 3CH$ e quindi $BH = \sqrt{7}CH = \frac{\sqrt{7}}{2}CD$ per il teorema di Pitagora. Inoltre $BCD \sim ABC$ poiché sono entrambi isosceli ed hanno lo stesso angolo alla base in $\widehat{C}$, perciò anche l'angolo al vertice è uguale. Allora, detta AK l'altezza di ABC, $AK = \frac{\sqrt{7}}{2}BC$ per la similitudine; poiché $BC = 2$, $\texttt{Area}(ABC) = \frac{AK \cdot BC}{2} = \sqrt{7}$.

8. La risposta è **(E)**. Se in un certo anno le spese sono pari a x, nell'anno successivo le spese diventano $\frac{100,5}{100}x = \frac{201}{200}x$. Dopo k anni le spese sono quindi $\left(\frac{201}{200}\right)^k x$. Ci chiediamo quindi per quali interi positivi k si ha che $\left(\frac{201}{200}\right)^k = 2$, ovvero $201^k = 2 \cdot 200^k$. In questa equazione entrambi i membri sono numeri interi, il membro di sinistra è sempre dispari mentre il membro di destra è sempre pari. Concludiamo quindi che le spese non saranno mai esattamente il doppio rispetto a quelle del 2012.

9. La risposta è **(C)**. Se m è multiplo di un certo primo p, allora deve essere divisibile per la massima potenza di p che divida $25!$ (dove per $25!$ intendiamo il prodotto degli interi da 1 a 25) affinché $n = \frac{25!}{m}$ non abbia fattori p (altrimenti la frazione $\frac{m}{n}$ non sarebbe ridotta ai minimi termini). Dobbiamo perciò contare i divisori m di $25!$ tali che

(a) m contenga nella sua fattorizzazione alcuni fra i fattori primi di 25!, elevati ciascuno alla stessa potenza a cui compare nella fattorizzazione di 25! e

(b) $m < \frac{25!}{m}$.

Accoppiando ciascun divisore d dotato della proprietà (a) con il divisore $\frac{25!}{d}$, poiché fra i due solo il minore avrà la proprietà (b) (viste le nostre richieste sui fattori primi di d non può valere $d = \frac{25!}{d}$), otteniamo che i divisori da contare saranno la metà di quelli a cui si richieda soltanto la proprietà (a).
Nella fattorizzazione di 25! compaiono 9 primi diversi: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. I divisori con la proprietà (a) sono perciò 2^9, e tra questi 2^8 godono della proprietà (b).

10. La risposta è **(D)**. Poiché $\widehat{DAE} = \widehat{DBE} = \widehat{DCE}$ e A, B, C si trovano dalla stessa parte della retta DE, i punti A, B, C, D, E si trovano su di una circonferenza. Inoltre, dato che gli angoli alla circonferenza che insistono su DE hanno un'ampiezza di 30°, detto O il centro di tale circonferenza l'angolo $\widehat{DOE}$ vale 60°, e quindi il triangolo DOE è equilatero. Perciò, essendo $OD = DE$, abbiamo che la circonferenza ha raggio 1m. Poiché $\widehat{BAC}$ è retto il segmento BC dev'essere un diametro; ne consegue che la sua lunghezza è 2m.

11. La risposta è **(A)**. Numeriamo le righe da 1 a 8 e le colonne da 1 a 8; consideriamo il quadrato 2×2 centrale, quello formato dalle colonne 4 e 5 intersecate con le righe 4 e 5. Esaminiamo separatamente due casi:

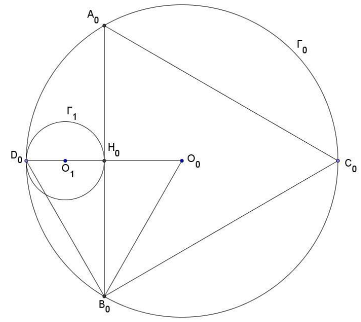
    (a) nel quadrato mettiamo una A e una B in caselle che s'intersecano in un vertice, una C e una D nelle due caselle rimanenti; possiamo farlo in 8 modi diversi. Una volta riempito il quadrato in uno di questi modi, vi è uno e un solo modo di completare l'intera scacchiera.

    (b) La A e la B inserite nel quadrato centrale sono adiacenti orizzontalmente o verticalmente (possiamo riempire il quadrato in $4! - 8$ modi in modo che ciò avvenga). Supponiamo che la A si trovi in riga 4, colonna 4 e la B in riga 4, colonna 5 (gli altri casi sono perfettamente analoghi). La riga 4 deve essere riempita con A e B che si alternino; la riga 5 deve contenere, a sua volta, C e D alternate (a partire da C o da D a seconda di come abbiamo riempito il quadrato centrale). Le righe dispari devono essere tutte identiche alla riga 5. Le righe pari conterranno A e B alternate: nella riga 4 la lettera iniziale è fissata (nel nostro caso è A) per in tutte le altre righe pari (2, 6 e 8) possiamo scegliere (indipendentemente) se comincino con A o con B. Nel complesso abbiamo contato $(4! - 8)2^3$ configurazioni.

    In totale le configurazioni ammissibili sono dunque 136.

12. La risposta è **(B)**. $x^2 - y^2$ può essere scomposto come $(x + y)(x - y)$. Non è possibile che $x + y$ e $x - y$ siano entrambi multipli di 4, perchè altrimenti lo sarebbe anche $(x+y)+(x-y) = 2x$ il quale tuttavia è il doppio di un numero dispari. Abbiamo che $\max\{x + y, x - y\} \leq 2011 + 2011 < 2^{12}$, pertanto la massima potenza di 2 ottenibile nella fattorizzazione di $x^2 - y^2$ è 2^{12}; essa si ottiene ponendo per esempio $x + y = 2^{11} = 2048$ (la potenza successiva è troppo grande) e $x - y = 2$, cioè $x = 1025$ e $y = 1023$.

13. La risposta è **1007**. Sia $R(\Gamma_n)$ il raggio della circonferenza Γ_n.
Sia O_0 il centro di Γ_0, e sia H_0 il piede dell'altezza avente vertice in C_0, come mostrato in figura. Sia D_0 il punto di tangenza tra Γ_0 e Γ_1.
Allora $O_0B_0 = O_0D_0 = R(\Gamma_0)$ e $\widehat{D_0O_0B_0} = 2\widehat{D_0C_0B_0} = 60°$. Perciò il triangolo $O_0D_0B_0$ è equilatero. Quindi, poichè B_0H_0 è perpendicolare a C_0D_0, H_0 è punto medio di O_0D_0 e il diametro di Γ_1 è $\frac{1}{2}R(\Gamma_0)$, da cui $R(\Gamma_1) = \frac{1}{4}R(\Gamma_0)$.



Con la stessa costruzione si mostra che in generale vale $R(\Gamma_n) = \frac{1}{4}R(\Gamma_{n-1})$.
L'area del cerchio racchiuso da Γ_n è quindi:

$$S_n = \pi R(\Gamma_n)^2 = \frac{\pi}{4^{2n}}(2^{2012})^2 = \frac{\pi}{2^{4n-4024}}$$

L'area richiesta è pari a π per $n = 1006$, e pari a $\pi/4 < 1$ per $n = 1007$.

14. La risposta è **36**. Il polinomio $p(x) + q(x)$ si annulla per $x = -1$, $x = -2$ e $x = -3$; inoltre è di grado minore o uguale a 3 ed è a coefficienti interi. Quindi, per il teorema di Ruffini, esso si scompone in questo modo: $p(x) + q(x) = k(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ con k intero. In modo analogo osserviamo che $p(x) - q(x) = h(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ con h intero.
Abbiamo che $p(x) = \frac{1}{2}\Big(k(x+1)(x+2)(x+3) + h(x-1)(x-2)(x-3)\Big)$; da questa uguaglianza è facile osservare che $p(x)$ è a coefficienti interi se e solo se k e h hanno la stessa parità. La condizione affinché $q(x)$ sia a coefficienti interi è esattamente la stessa. Il problema inoltre richiede che $p(x)$ e $q(x)$ siano distinti, il che accade se e solo se $h \neq 0$.
Valutando in $x = 0$ le due identità iniziali otteniamo $p(0)+q(0) = 6k$ e $p(0)-q(0) = -6h$. Elevando al quadrato e sommando queste due uguaglianze troviamo

$$\Big(p(0) + q(0)\Big)^2 + \Big(p(0) - q(0)\Big)^2 = 36(k^2 + h^2),$$

ovvero $2\cdot\Big([p(0)]^2+[q(0)]^2\Big) = 36(k^2+h^2)$. Alla luce delle osservazioni precedenti, il minimo di k^2+h^2 si ottiene per $k = \pm1$ e $h = \pm1$. Quindi il minimo valore di $[p(0)]^2+[q(0)]^2$ è $\frac{1}{2}\cdot36\cdot\Big((\pm1)^2+(\pm1)^2\Big) = 36$.

15. Sia $f(n)$ il ciclostilato di n.

(a) Chiamiamo $s(m)$ la somma delle cifre di m. Per il criterio di divisibilità per 9 si ha che $f(n)$ è multiplo di 9 se e solo se $s(f(n))$ è multiplo di 9; d'altra parte $s(f(n)) = 2012 \cdot s(n)$, il quale è multiplo di 9 se e solo se lo è $s(n)$ (perché il massimo comun divisore tra 2012 e 9 è uguale a 1). Usando di nuovo il criterio di divisibilità per 9 osserviamo che $s(n)$ è multiplo di 9 se e solo se lo è n.
In conclusione gli n cercati sono tutti e soli i multipli di 9.

(b) Chiamiamo $r(m)$ la somma a segni alterni delle cifre di m (fatta in modo che la cifra delle unità sia presa con segno positivo). Per il criterio di divisibilità per 11 abbiamo che $f(n)$ è multiplo di 11 se e solo se $r(f(n))$ è multiplo di 11.
Distinguiamo i seguenti due casi.
   - <u>n ha un numero pari di cifre.</u>
     Allora $r(f(n)) = 2012 \cdot r(n)$, infatti ogni cifra di n viene sommata 2012 volte con lo stesso segno. Dato che $MCD(2012, 11) = 1$ osserviamo che $2012 \cdot r(n)$ è multiplo di 11 se e solo se lo è $r(n)$. Utilizzando nuovamente il criterio di divisibilità per 11 abbiamo che $r(n)$ è multiplo di 11 se e solo se lo è n.
     Pertanto gli n con un numero pari di cifre che vogliamo sono tutti e soli i multipli di 11.
   - <u>n ha un numero dispari di cifre.</u>
     Nella somma a segni alterni delle cifre di $f(n)$ si ha che ciascuna cifra di n viene sommata $\frac{2012}{2}$ volte con il segno + e altrettante volte con il segno −; pertanto $r(f(n)) = 0$, ovvero $f(n)$ è sempre multiplo di 11.

In conclusione gli n cercati sono gli interi positivi con un numero dispari di cifre e i multipli di 11 con un numero pari di cifre.

16. Davide ha dormito come minimo 58 ore.

    Numeriamo i giorni della settimana da 1 a 7 e supponiamo che Davide dorma k_1 ore meno del suo fabbisogno il lunedì, k_2 ore il martedì, $\ldots$, k_7 ore la domenica. Sappiamo che $k_1 + \cdots + k_7 = 7$.

    Poiché trascorsa una settimana Davide avrebbe necessità di dormire lo stesso numero di ore del lunedì precedente, le ore aggiunte al suo fabbisogno per via delle varie carenze di sonno devono ricadere tutte all'interno della settimana; in particolare, la somma dei valori del suo fabbisogno per ciascuna delle sette notti si può calcolare come $7 \cdot 8 + k_1^2 + k_2^2 + ... + k_7^2$. Inoltre dev'essere $k_7 = 0$, altrimenti Davide avrebbe bisogno di dormire più di 8 ore il lunedì successivo.

    Davide dorme dunque $56 + k_1^2 + \cdots + k_6^2 - k_1 - \cdots - k_7 = 49 + k_1^2 + ... + k_6^2$ ore nel corso della settimana.

    Sicuramente, affinché $k_1 + \cdots + k_7 = 7$ e k_7 sia 0, dovrà esserci un giorno i (con i diverso da 7) in cui Davide dorme almeno 2 ore meno del necessario ($k_i \geq 2$).

    Osserviamo che porre, ad esempio, $k_1 = 2$ e $k_2 = \cdots = k_6 = 1$ dà un totale di $49 + 2^2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 58$ ore nell'arco della settimana.

    Mostriamo che non è possibile per Davide dormire meno di 58 ore: se esiste un giorno j per cui $k_j \geq 3$, Davide dormirà strettamente più di $49 + 3^2 = 58$ ore; possiamo perciò supporre che per $i = 1, \ldots, 7$ $k_i \leq 2$. Se Davide avesse un deficit di 2 ore per più di una volta nell'arco della settimana, di nuovo dovrebbe dormire più di $49 + 2^2 + 2^2 + 1 = 58$ ore.

    Dunque la configurazione in cui ha un unico deficit di 2 ore e 5 di un'ora è davvero minimale.

    Abbiamo in conclusione mostrato che da un lato Davide non può dormire meno di 58 ore, e dall'altro una configurazione come quella descritta (ad esempio: 6 ore di sonno il lunedì, 9 il martedì, 10 il mercoledì, 8 da giovedì a sabato e 9 la domenica) ne prevede esattamente 58.

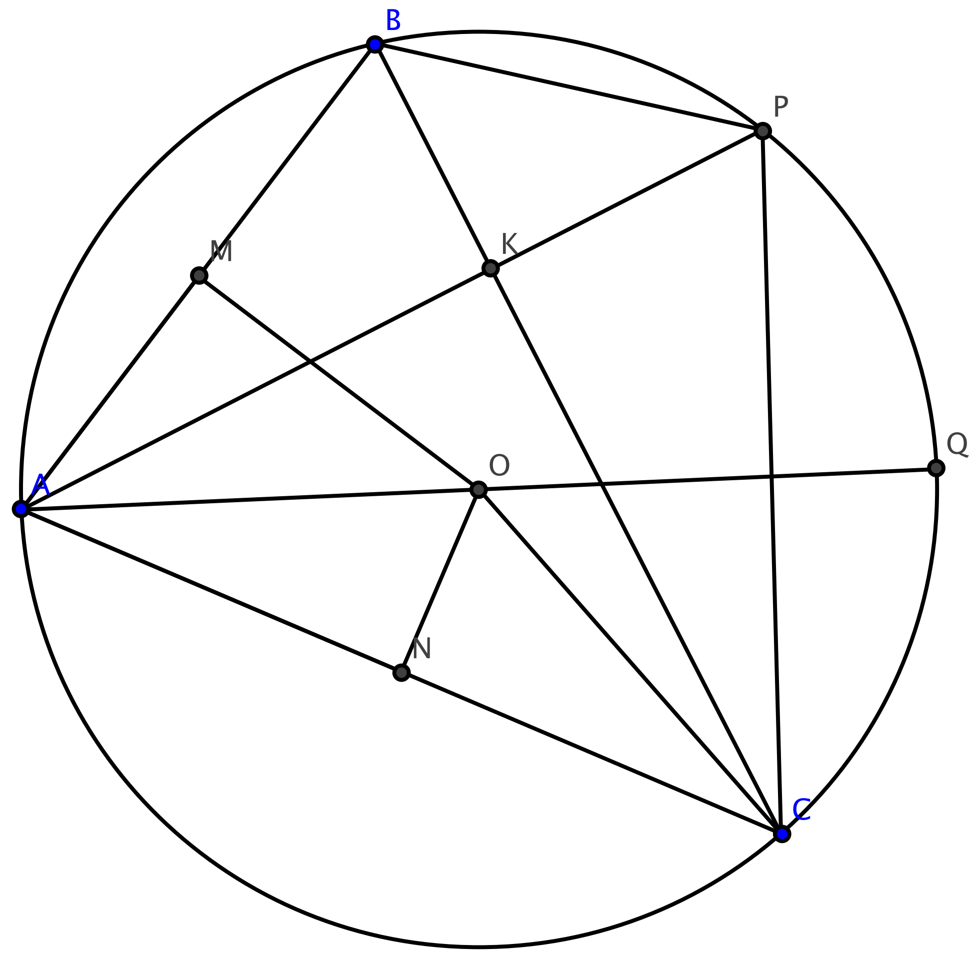
17. (a) Sia K il punto d'intersezione tra AP e BC (ovvero il piede dell'altezza uscente da A). Dato che $\widehat{AKB} = 90°$, abbiamo che $\widehat{BAK} = 90° - \widehat{ABC}$. Inoltre $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$ (angoli rispettivamente alla circonferenza e al centro che insistono sullo stesso arco). Infine, poiché AOC è isoscele (AO e CO sono raggi della circonferenza circoscritta ad ABC), abbiamo anche che $\widehat{AOC} = 180° - 2\,\widehat{OAC}$. Quindi

    $$\widehat{BAP} = \widehat{BAK} = 90° - \widehat{ABC} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{AOC} = 90° - \frac{1}{2}\left(180° - 2\,\widehat{OAC}\right) = \widehat{OAC} = \widehat{QAC}.$$

    (b) $\widehat{BCP} = \widehat{BAP}$ in quanto angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco. Per lo stesso motivo, $\widehat{QBC} = \widehat{QAC}$. Allora, per quanto dimostrato nel punto (a), $\widehat{BCP} = \widehat{BAP} = \widehat{QAC} = \widehat{QBC}$. Inoltre $\widehat{BPC} = \widehat{BQC}$ (sempre perché angoli alla circonferenza insistenti sullo stesso arco).

    Consideriamo ora i triangoli BCP e CBQ. Abbiamo dimostrato che hanno due coppie di angoli uguali, ma allora per differenza anche il terzo angolo è uguale nei due triangoli: $\widehat{CBP} = \widehat{BCQ}$. Questi triangoli hanno inoltre il lato BC in comune, quindi sono congruenti per il secondo criterio.

    (c) Per la congruenza dimostrata nel punto (b), l'area di $ABPC$ è uguale all'area di $ABQC$. Inoltre, per definizione di M, N e O, si ha che $AB = 2\,AM$, $AC = 2\,AN$ e $AQ = 2\,AO$; quindi l'omotetia di centro A e fattore 2 manda il quadrilatero $AMON$ nel quadrilatero $ABQC$. Il rapporto tra l'area di $ABQC$ e l'area di $AMON$ è pertanto $2^2 = 4$.



B
P
M
K
Q
O
A
N
C