é

Dispense per Matematica - AA 2015-2016

Addendum equazioni differenziali

Decio Levi, Valentino Lacquaniti

levi@roma3.infn.it

Corso di Laurea in Ottica ed Optometria
Dipartimento di Scienze

1 Soluzione equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea a coefficienti costanti

Un ED del secondo ordine lineare a coefficienti costanti é descritta dall'equazione:

$$ay'' + by' + cy = f(x)\,, \qquad a, b, c \in R\,, \tag{1}$$

Teorema 1.1 *Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea*

$$ay'' + by' + cy = 0\,. \tag{2}$$

La soluzione generale del problema dato esiste ed é data da

$$y_{om} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{3}$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie, e $y_1(x)$, $y_2(x)$ soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea (2).

Le due soluzioni $y_1(x)$ ed $y_2(x)$ sono dette indipendenti se verificano l'equazione

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0 \tag{4}$$

Per quanto riguarda la soluzione di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea vale un teorema analogo a quello di un'ED del primo ordine lineare:

Teorema 1.2 *Data un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del secondo ordine non omogenea*

$$ay'' + by' + cy = f(x)\,,$$

detta $y_g(x)$ la soluzione generale di tale problema, detta $y_{om}(x)$ la soluzione generale del problema omogeneo associato e detta $y_p(x)$ una qualsiasi soluzione particolare del problema completo si ha:

$$y_g(x) = y_{om}(x) + y_p(x) \tag{5}$$

1.1 Problema non omogeneo: soluzione col metodo della variazione delle costanti

Risolviamo un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea, col metodo della variazione delle costanti. Descriviamo qui la procedura da adottare, che riprende ed amplia quanto già discusso per le ED del primo ordine.

Consideriamo l'equazione

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{6}$$

la cui equazione omogenea ha la soluzione

$$y_{om} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\,. \tag{7}$$

La soluzione particolare di (6) e' ottenuta assumendo che le costanti che appaiono in (7) siano delle funzioni variabili in x, i.e.

$$y_p = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)\,. \tag{8}$$

Differenziando (8) rispetto ad x otteniamo:

$$y_p' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2', \tag{9}$$
$$y_p'' = c_1'' y_1 + 2c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2'' y_2 + 2c_2' y_2' + c_2 y_2''. \tag{10}$$

Quando introduciamo (8, 9, 14) in (6) abbiamo un'equazione differenziale del secondo ordine per le due grandezze $c_1(x)$ e $c_2(x)$:

$$a\Big[c_1'' y_1 + 2c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2'' y_2 + 2c_2' y_2' + c_2 y_2''\Big] + \tag{11}$$
$$+b\Big[c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2'\Big] + c\Big[c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)\Big] = f(x)$$

Questa equazione non è sufficiente per ricavare $c_1(x)$ e $c_2(x)$. Dobbiamo inventarci un'altra equazione per $c_1(x)$ e $c_2(x)$ possibilmente tale che le due equazioni siano delle equazioni differenziali del **primo ordine** per $c_1(x)$ e $c_2(x)$. Una tale equazione è:

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \tag{12}$$

Imponendo l'equazione differenziale del primo ordine (12) per $c_1(x)$ e $c_2(x)$ le derivate di y_p diventano:

$$\begin{aligned} y_p' &= c_1 y_1' + c_2 y_2', \qquad (13) \\ y_p'' &= c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2''. \qquad (14) \end{aligned}$$

Quindi (6) diviene:

$$a\Big[c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2''\Big] + b\Big[c_1 y_1' + c_2 y_2'\Big] + \qquad (15)$$
$$c\Big[c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)\Big] = f(x).$$

Tenendo in conto il fatto che $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soddisfano l'equazione omogenea:

$$a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = 0, \qquad (16)$$

ricaviamo le seguenti equazioni differenziali del primo ordine per $c_1(x)$ e $c_2(x)$:

$$\begin{aligned} & c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0, \qquad (17) \\ & a\Big[c_1' y_1' + c_2' y_2'\Big] = f(x). \qquad (18) \end{aligned}$$

Le equazioni (17, 18) sono un sistema algebrico per le due incognite $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$ la cui soluzione, tenendo in conto il fatto che y_1 e y_2 sono differenti da zero e che soddisfano la condizione (4), mi da:

$$\begin{aligned} c_2'(x) &= -c_1'(x)\frac{y_1}{y_2}, \qquad (19) \\ c_1'(x) &= \frac{f(x) y_2(x)}{a\Big[y_1'(x) y_2(x) - y_1(x) y_2'(x)\Big]}. \qquad (20) \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} c_2(x) &= -\int^x d\tilde{x} \frac{f(\tilde{x}) y_1(\tilde{x})}{a\Big[y_1'(\tilde{x}) y_2(\tilde{x}) - y_1(\tilde{x}) y_2'(\tilde{x})\Big]}, \qquad (21) \\ c_1(x) &= \int^x d\tilde{x} \frac{f(\tilde{x}) y_2(\tilde{x})}{a\Big[y_1'(\tilde{x}) y_2(\tilde{x}) - y_1(\tilde{x}) y_2'(\tilde{x})\Big]} \qquad (22) \end{aligned}$$

e, tendendo in conto (8), si ha:

$$y_p(x) = \int^x d\tilde{x} f(\tilde{x}) \frac{\Big[y_2(\tilde{x})y_1(x) - y_2(x)y_1(\tilde{x})\Big]}{a\Big[y_1'(\tilde{x})y_2(\tilde{x}) - y_1(\tilde{x})y_2'(\tilde{x})\Big]} \tag{23}$$

Vediamo ora alcuni esempi di applicazione della teoria presentata.

Esempio 1.1 *Data l'ED*

$$y'' + 3y' + 2y = f(x), \tag{24}$$

costruiamo col metodo dei coefficienti indeterminati, la forma della soluzione particolare nei casi in cui f(x) assume le seguenti espressioni

1) e^{2x} *2)* $x^2 + 1$ *3)* xe^x *4)* $\sin 3x$

5) $e^{2x}\cos x$ *6)* $x \sin x$ *7)* $e^x(x\cos x + 2\sin x)$

In primo luogo scriviamo il polinomio caratteristico, $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ e ne determiniamo le radici:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = -2.$$

Quindi le due soluzioni dell'equazione omogenea sono $y_1(x) = e^{-x}$ e $y_2(x) = e^{-2x}$, tali che $y_1y_2' - y_2y_1' = -e^{-3x} \neq 0$.

1. e^{2x}

   Si ha:

   $$y_p(x) = \int^x d\tilde{x}\, e^{2\tilde{x}} \frac{e^{-2\tilde{x}-x} - e^{-2x-\tilde{x}}}{-e^{-3\tilde{x}}} = \int^x d\tilde{x}\, e^{2\tilde{x}} \Big[e^{2\tilde{x}-2x} - e^{\tilde{x}-x}\Big] = -\frac{1}{12}e^{2x}$$

2. $x^2 + 1$

   Si ha:

   $$y_p(x) = \int^x d\tilde{x}\, (\tilde{x}^2 + 1)\Big[e^{2\tilde{x}-2x} - e^{\tilde{x}-x}\Big] = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$$

3. xe^x

   Si ha:

$$y_p(x) = \int^x d\tilde{x}\tilde{x}e^{\tilde{x}}\Big[e^{2\tilde{x}-2x} - e^{\tilde{x}-x}\Big] = (\frac{1}{6}x - \frac{5}{36})e^x$$

4. $\sin 3x$

   Si ha:

$$y_p(x) = \int^x d\tilde{x}\sin(3\tilde{x})\Big[e^{2\tilde{x}-2x} - e^{\tilde{x}-x}\Big] = -\frac{1}{16}\sin 3x$$

5. $e^{2x}\cos x$

   Si ha:

$$y_p(x) = \int^x d\tilde{x}\, e^{2\tilde{x}}\cos\tilde{x}\Big[e^{2\tilde{x}-2x} - e^{\tilde{x}-x}\Big] = e^{2x}(\frac{1}{9}\cos x - \frac{1}{36}\sin x)$$

6. $x\sin x$

   Si ha:

$$y_p(x) = \int^x d\tilde{x}\,\tilde{x}\sin\tilde{x}\Big[e^{2\tilde{x}-2x} - e^{\tilde{x}-x}\Big] = (\frac{23}{20} - \frac{3}{10}x)\cos x + (\frac{1}{10}x - \frac{3}{20})\sin x$$

7. $e^x(x\cos x + 2\sin x)$

   Si ha:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \int^x d\tilde{x}\, e^{\tilde{x}}(\tilde{x}\cos\tilde{x} + 2\sin\tilde{x})\Big[e^{2\tilde{x}-2x} - e^{\tilde{x}-x}\Big] \\ &= e^x\left[(\frac{1}{10}x - \frac{6}{25})\cos x + (\frac{1}{10}x + \frac{1}{10})\sin x\right] \end{aligned}$$