II Esonero di Elementi di Analisi - I parte - 14-11-2013

D. Levi, E. Scoppola

1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sin n}{n-\cos n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{\sin n}{n}}{1-\frac{\cos n}{n}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2}-\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = 0$$

2)

$$\lim_{n\to\infty} n^2 - 2n + 1 = +\infty$$

$f(n) = (n-1)^2$ da cui $(n-1)^2 > 10^6$ se $n > N = 10^3 + 1$.

$$\lim_{n\to\infty} -n^2 + n = -\infty$$

studio la disequazione

$$-n^2 + n < -10^6$$

da cui $n > N = \frac{1+\sqrt{1+4.10^6}}{2}$.

3)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x + 5}{-x^3 + x} = 0$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 1}{x^{\frac{1}{4}} - 1} = \frac{4}{3}$$

infatti se definisco y tale che $y^{12} = x$ abbiamo

$$\lim_{y\to 1} \frac{y^4 - 1}{y^3 - 1} = \lim_{y\to 1} \frac{(y-1)(y+1)(y^2+1)}{(y-1)(y^2+y+1)} = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln(3x+1) - \ln(x) = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{3x+1}{x}\right) = \ln 3$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}\right)^{x+2} = \frac{e^{-1}}{e^3} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}\right)^2 = e^{-4}$$

4)

$$f(x) = x^2(1-\cos x) = \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$g(x) = \frac{x^5}{\sin(2x)} = x^4 \frac{x}{\sin(2x)} = \frac{x^4}{2} \frac{2x}{\sin(2x)} = \frac{x^4}{2}(1 + o(x)) = \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

da cui $K = 1$.

5) La funzione

$$f(x) = \sqrt{2 + \frac{x^2}{2}}$$

è definita ovunque sull'asse reale e tende a infinito per $x \to \pm\infty$ dunque non ha nè asintoti verticali nè orizzontali. Ha però asintoti obliqui poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

e

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \mp \sqrt{\frac{1}{2}}\,x = 0$$

poiché

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{2 + \frac{x^2}{2}} - \sqrt{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{2 + \frac{x^2}{2}} - \sqrt{\frac{x^2}{2}}\right) \frac{\sqrt{2 + \frac{x^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2 + \frac{x^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{2 + \frac{x^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2}{2}}} = 0$$

dunque gli asintoti obliqui sono $y = \sqrt{\frac{1}{2}}\,x$ a $+\infty$ e $y = -\sqrt{\frac{1}{2}}\,x$ a $-\infty$.

II Esonero di Elementi di Analisi - I parte - 14-11-2013

D. Levi, E. Scoppola

1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+(-1)^n}{n^2-(-1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+\frac{(-1)^n}{n^2})}{n^2(1-\frac{(-1)^n}{n^2})}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+5^{n+1}}{2^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n(2(\frac{2}{5})^n+5)}{5^n((\frac{2}{5})^n+1)}=5$$

2)

$$\lim_{n\to\infty} n^2-1=\infty$$

$n^2-1>10^6$ se $n>N=\sqrt{10^6+1}$

$$\lim_{n\to\infty} -n^2+3n=-\infty$$

per trovare i valori di n tali che $|f(n)|>10^6$ risolviamo la disequazione

$$-n^2+3n<-10^6$$

da cui otteniamo $n>N=\frac{3+\sqrt{9+4.10^6}}{2}$

3)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^2(x-1)^3}{x^5+5}=4$$

$$\lim_{x\to\infty} x\Big(\sqrt{x^2+1}-x\Big)=\lim_{x\to\infty} x\Big(\sqrt{x^2+1}-x\Big)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty} x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos 3x}{\sin 3x}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}=\frac{1}{4}$$

4)

$$f(x)=x^3\ln(1+x)=x^3(x+o(x)=x^4+o(x^4)$$

$$g(x)=x(\sin x-\tan x)=x\frac{\sin x}{\cos x}(\cos x-1)=x\Big(\frac{x+o(x)}{\cos x}\Big)\Big(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\Big)=-\frac{x^4}{2}+o(x^4)$$

da cui $K=-2$.

5) La funzione

$$f(x) = \frac{4x^2 + x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{4x^2 + x + 2}{(x-1)^2}$$

è definita per $x \neq 1$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$$

dunque in $x = 1$ c'è un asintoto verticale.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 4$$

dunque c'è un asintoto orizzontale a $y = 4$ per $x \to \pm\infty$.