

## Elementi di Analisi - I parte - 17-9-2014

E. Scoppola

### ESONERO I

1) La retta  $r$  è data dall'equazione

$$y = \frac{1}{2} - x$$

dunque la retta ad essa perpendicolare ha coefficiente angolare 1 e imponendo che passi per  $(2,1)$  risulta essere definita dall'equazione

$$y = x - 1.$$

Le intersezioni della retta  $r$  con la parabola sono determinata dall'equazione

$$\frac{1}{2} - x = x^2 + x - 1$$

e dunque i punti

$$\left(-1 + \sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{2}}\right), \quad \left(-1 - \sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right).$$

- 2) .  $\bar{u} + \bar{v} = (-1, 1)$   
.  $\bar{u} - \bar{v} = (3, -3)$   
.  $\bar{u} \cdot \bar{v} = -4$   
.  $\bar{u} \times \bar{v}$  è il vettore nullo perchè  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$  sono paralleli.

### ESONERO II

1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{800-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n(\frac{800}{n}-1)} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)}{x-3} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\tan x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos x}{\sin x (1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \frac{x^2}{1 - \cos x} \cos x = 2.$$

2)

$$x^2 + \sin(2x^3) + 1 - e^{-x^2} = x^2 + 2x^3 + o(x^3) + 1 - (1 - x^2 + o(x^2)) = 2x^2 + o(x^2)$$

è un infinitesimo del secondo ordine.

### ESONERO III

Vedi esercizio 2.49 del Marcellini-Sbordone vol I tomo 3

**ESONERO IV** Per  $a = 0$  abbiamo

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \tan x + C.$$

Per  $a \neq 0$ , utilizzando il cambiamento di variabile  $t = \tan x$ , abbiamo

$$\int \frac{e^{a \tan x}}{(\cos x)^2} dx = \int e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} + C = \frac{1}{a} e^{a \tan x} + C.$$

$$\int \frac{\sqrt{1 - \sin x} \sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{\sin x} \sqrt{\sin x}} dx = \int \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{(\sin x)^{\frac{3}{4}}} dx$$

e con il cambiamento di variabile  $s = \sin x$  otteniamo

$$= \int \frac{ds}{s^{\frac{3}{4}}} = 4(\sin x)^{\frac{1}{4}} + C.$$

La verifica di entrambi gli integrali indefiniti è immediata ricordando le seguenti derivate

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \frac{d}{dx} \sin x = \cos x.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x [1 - \sin x] dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x [1 - \sin x] dx$$

e col cambiamento di variabile  $s = \sin x$  otteniamo

$$= 2 \int_0^1 s[1 - s] ds = s^2 \Big|_0^1 - \frac{2}{3} s^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

### ESONERO V

#### Testo 1

1) a)

$$D = A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

b)

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Vedi esercizio 5.28 del Marcellini-Sbordone vol I tomo 1